ANALYSE MP

Cours, méthodes et exercices corrigés

ANALYSE MP

Cours, méthodes et exercices corrigés

Jean-Marie Monier

Professeur en classe de Spéciales
au lycée La Martinière-Montplaisir à Lyon

5e édition

DUNOD

Maquette intérieure : Lasertex

Couverture : Bruno Loste

ISBN 978-2-10-070116-2

Table des matières

Cours

CHAPITRE 1 **Espaces vectoriels normés** 3

1.1 Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé 4

1.1.1 Norme, distance associée 4
1.1.2 Boules, sphères 11
1.1.3 Parties bornées d'un evn 13
1.1.4 Voisinages 14
1.1.5 Ouverts, fermés 15
1.1.6 Comparaison de normes 19
1.1.7 Intérieur, adhérence, frontière 26
1.1.8 Distance d'un point à une partie non vide d'un evn 29
1.1.9 Suites dans un evn 31

1.2 Limites, continuité 39

1.2.1 Limites 39
1.2.2 Continuité 42
1.2.3 Continuité uniforme 49
1.2.4 Applications lipschitziennes 49
1.2.5 Applications linéaires continues 52

1.3 Compacité 58

1.3.1 Généralités 58
1.3.2 Cas de la dimension finie 62

1.4 Complétude 66

1.4.1 Suites de Cauchy 66
1.4.2 Parties complètes 68
1.4.3 Supplément : théorème du point fixe 71

1.5 Connexité par arcs 72

1.6 Espaces préhilbertiens 76

1.6.1 Produit scalaire 76
1.6.2 Inégalités, normes euclidiennes 79
1.6.3 Orthogonalité 83
1.6.4 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt 88
1.6.5 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie 90
1.6.6 Norme d'un endomorphisme d'un espace euclidien 95
Problèmes 98

CHAPITRE 2 Fonctions vectorielles d'une variable réelle 99

2.1 Généralités 100

2.1.1 Structure de E^X 100
2.1.2 Parité 101
2.1.3 Périodicité 102
2.1.4 Applications bornées 103
2.1.5 Limites 105
2.1.6 Continuité par morceaux 106

2.2 Dérivation 109

2.2.1 Dérivée en un point 109
2.2.2 Propriétés algébriques des applications dérivables en un point 110
2.2.3 Application dérivée 112
2.2.4 Dérivées successives 115
2.2.5 Classe d'une application 116
2.2.6 Différentielle 120
2.2.7 Dérivation des fonctions à valeurs matricielles 121

2.3 Intégration sur un segment 122

2.3.1 Intégration des applications en escalier sur un segment 122
2.3.2 Suites d'applications (première étude) 124
2.3.3 Approximation uniforme par des applications en escalier ou par des applications affines par morceaux et continues 127
2.3.4 Intégration des applications continues par morceaux sur un segment 129
2.3.5 Sommes de Riemann 135
2.3.6 Intégration et dérivation 136
2.3.7 Inégalité des accroissements finis 139
2.3.8 Changement de variable 142
2.3.9 Intégration par parties 143
2.3.10 Formule de Taylor avec reste intégral 145
2.3.11 Théorème de relèvement 146

2.4 Comparaison locale 148

2.4.1 Prépondérance, domination 148
2.4.2 Équivalence 150
2.4.3 Développements limités vectoriels 151
Problèmes 152

CHAPITRE 3 Intégration sur un intervalle quelconque 153

3.1 Fonctions intégrables à valeurs réelles positives ou nulles 154

3.1.1 Définition 154
3.1.2 Propriétés algébriques 156
3.1.3 Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert 158

3.2 Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes 165

3.2.1 Généralités 165
3.2.2 Propriétés 167
3.2.3 Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert 173

3.3 Supplément : intégration des relations de comparaison 182

3.3.1 Cas des fonctions intégrables 182
3.3.2 Cas des fonctions non intégrables 183

3.4 Intégrales impropres 184

3.5 Intégrales dépendant d'un paramètre 189

3.5.1 Continuité 189
3.5.2 Dérivation 192
3.5.3 La fonction Γ d'Euler 200

3.6 Intégrales doubles 206

3.6.1 Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux segments 206
3.6.2 Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux intervalles 207
3.6.3 Intégrale sur une partie simple du plan 212
Problème 217

CHAPITRE 4 Séries 219

4.1 Séries à termes dans un evn (1re étude) 220

4.1.1 Généralités 220
4.1.2 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes 223

4.2 Séries à termes dans $\mathbb{R}_+$ 225

4.2.1 Lemme fondamental 226
4.2.2 Théorèmes de comparaison 226
4.2.3 Séries de Riemann 227
4.2.4 Série géométrique 230

4.3 Séries à termes dans un evn (2e étude) 242

4.3.1 CNS de Cauchy 242
4.3.2 Convergence absolue 244
4.3.3 Séries usuelles dans une algèbre de Banach 247
4.3.4 Espaces $\ell^1(\mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{K})$ 248
4.3.5 Séries alternées 250
4.3.6 Exemples d'utilisation d'un développement asymptotique 252
4.3.7 Comparaison d'une série à un intégrale 255
4.3.8 Étude de la somme d'une série convergente 262
4.3.9 Sommation des relations de comparaison 269
4.3.10 Séries doubles 275
Problèmes 283

CHAPITRE 5 Suites et séries d'applications 287

5.1 Suites d'applications 288

5.1.1 Convergences 288
5.1.2 Convergence uniforme et limite 292
5.1.3 Convergence uniforme et continuité 293
5.1.4 Convergence uniforme et intégration sur un segment 296
5.1.5 Convergence uniforme et dérivation 299
5.1.6 Convergence d'une suite d'applications
et intégration sur un intervalle quelconque 301

5.2 Approximation des fonctions d'une variable réelle 307

5.2.1 Approximation par des fonctions en escalier ou affines par morceaux et continues 307
5.2.2 Approximation par des polynômes 307
5.2.3 Approximation par des polynômes trigonométriques 312

5.3 Séries d'applications 314

5.3.1 Convergences 314
5.3.2 Convergence uniforme et limite 325
5.3.3 Convergence uniforme et continuité 326
5.3.4 Convergence uniforme et intégration sur un segment 330
5.3.5 Convergence uniforme et dérivation 334
5.3.6 Convergence d'une série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque 341
Problèmes 345

CHAPITRE 6 Séries entières 351

6.1 Rayon de convergence 352

6.1.1 Notion de série entière 352
6.1.2 Rayon de convergence et somme d'une série entière 352
6.1.3 Comparaisons de rayons 355
6.1.4 Règle de d'Alembert 356

6.2 Opérations sur les séries entières 367

6.2.1 Structure vectorielle 367
6.2.2 Dérivation 368
6.2.3 Produit de deux séries entières 369

6.3 Convergence 371

6.4 Régularité de la somme d'une série entière 372

6.5 Développements en série entière 376

6.5.1 Généralités 376
6.5.2 Opérations sur les fonctions développables en série entière 378
6.5.3 DSE(0) usuels 381

6.6 Fonctions usuelles d'une variable complexe 395

6.6.1 L'exponentielle complexe 395
6.6.2 Fonctions circulaires directes 398
6.6.3 Fonctions hyperboliques directes 399
Problèmes 402

CHAPITRE 7 Séries de Fourier 403

7.1 Généralités 404

7.1.1 Ensemble $\mathcal{CM}_T$ 404
7.1.2 Coefficients de Fourier d'un élément de $\mathcal{CM}_T$ 405
7.1.3 Série de Fourier d'un élément de $\mathcal{CM}_T$ 409

7.2 Structure préhilbertienne 412

7.2.1 Espace préhilbertien $\mathcal{D}_T$ 412
7.2.2 Famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 414
7.2.3 Le théorème de Parseval 415

7.3 Convergence ponctuelle 419

7.3.1 Convergence normale 419
7.3.2 Le théorème de Dirichlet 420

7.4 Exemples 423

Problèmes 428

CHAPITRE 8 Équations différentielles 431

8.1 Généralités 432

8.1.1 Définitions 432
8.1.2 Remplacement théorique d'une équation différentielle d'ordre n par une équation différentielle d'ordre 1 433
8.1.3 Équations différentielles autonomes 433

8.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz 435

8.2.1 Théorie 435
8.2.2 Exemples d'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz 440

8.3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre 450

8.3.1 Généralités 451
8.3.2 Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy sur tout l'intervalle I 455
8.3.3 Structures de $\mathcal{S}_0$ et de $\mathcal{S}$ 456
8.3.4 Résolution de (E_0) 457
8.3.5 Résolution de (E) 458
8.3.6 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants 462
8.3.7 Systèmes différentiels autonomes linéaires d'ordre 1, à deux inconnues, à coefficients constants et sans second membre 473

8.4 Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre 478

8.4.1 Généralités 478
8.4.2 Résolution de (E_0) 480
8.4.3 Résolution de (E) 482
8.4.4 Problème des raccords 485
8.4.5 Utilisation de séries entières 487

CHAPITRE 9 Fonctions de plusieurs variables réelles 493

9.1 Dérivées partielles premières 496

9.1.1 Définitions 496
9.1.2 Applications de classe C^1 sur un ouvert 498
9.1.3 Différentielle d'une application de classe C^1 499
9.1.4 Différentiabilité 506

9.1.5 Inégalité des accroissements finis 509
9.1.6 C^1-difféomorphismes 512
9.1.7 Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre 515

9.2 Dérivées partielles successives 521

9.2.1 Définition 521
9.2.2 Applications de classe C^k sur un ouvert 522
9.2.3 Interversion des dérivations 523
9.2.4 C^k-difféomorphismes 527
9.2.5 Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre $\geqslant 2$ 528

9.3 Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles 533

9.3.1 Définitions 533
9.3.2 Étude à l'ordre 1 534
9.3.3 Étude à l'ordre 2 534
9.3.4 Extremums globaux 540

9.4 Fonctions implicites 543

9.5 Formes différentielles 546

9.5.1 Définition 546
9.5.2 Formes différentielles exactes 546
9.5.3 Formes différentielles fermées 547
Problème 552

Solutions des exercices

Chapitre 1 554
Chapitre 2 574
Chapitre 3 584
Chapitre 4 618
Chapitre 5 648
Chapitre 6 701
Chapitre 7 723
Chapitre 8 738
Chapitre 9 757

Index des notations 777

Index alphabétique 779

Préface

Jeune lycéen, j'avais, pour les manuels scolaires, une vénération quasi-religieuse. Que représentaient pour moi ces livres qu'une main zélée avait soigneusement recouverts en début d'année ? Je ne saurais le dire avec précision : ils contenaient, sans doute, la Vérité. A mon sens, par exemple, un théorème ne pouvait être énoncé que dans le scrupuleux respect des termes de l'ouvrage ; approximative, la restitution n'était pas valable. L'utilisation, par les professeurs, des polycopiés (rappels et compléments de cours, énoncés de problèmes ...) n'était pas, alors, habituelle ; je pense, aujourd'hui, que cela était dû bien plus aux difficultés de reprographie qu'à un non-désir de ces professeurs d'imprimer leur griffe personnelle par le choix d'exercices originaux. Ils se référaient constamment aux manuels, en suivaient fidèlement la progression, y puisaient les exercices. Je me souviens, d'ailleurs, d'avoir été troublé quand, en Terminale, mon professeur de Math., que je révérais aussi, se permettait parfois quelques critiques à l'égard d'un ouvrage qu'il nous avait pourtant conseillé ! Quant aux auteurs de ces livres, ils restaient énigmatiques : qui étaient ces demi-dieux détenteurs du Savoir ?

Plus tard, mes rapports d'étudiant avec les manuels didactiques ont, évidemment, évolué, mais je crois avoir, naïvement sans doute, conservé cette approche faite d'envie et de respect qui m'empêche, par exemple, de porter des annotations en marge – je ne jouerai pas la farce d'un Pierre de Fermat ! – et cet a priori favorable qui me rendrait difficile la rédaction d'une critique objective.

Heureusement, tel n'est pas mon propos aujourd'hui ! Mais j'ai voulu, par ces quelques mots, souligner l'importance capitale – même dans le subconscient de chacun – de ces livres de cours sur lesquels vous travaillez durant vos études et qui vous accompagnent toute votre vie.

Aucun professeur, fût-il auteur de manuels, ne songerait à conseiller un livre en remplacement d'un enseignement vivant et vécu. Mais, le cours imprimé, s'il est fidèle à la lettre et à l'esprit du programme d'une classe, peut aider, de façon très importante, l'étudiant consciencieux. Celui-ci, surtout lorsqu'il est débutant, trouvera la sécurité dont il a besoin dans un plan clair, précis, rigoureux, dans une présentation particulièrement soignée où les diverses polices de caractères sont judicieusement alternées, dans la vision d'ensemble des questions dont traite l'ouvrage. Il y recherchera, avec la certitude de les obtenir, telle démonstration qu'il n'a pas bien comprise, tel exemple ou contre-exemple qui l'aidera à mieux assimiler une notion, la réponse à telle question qu'il n'a pas osé poser sinon à lui-même...

Pour que le livre joue ce rôle d'assistant – certes passif mais constamment disponible – il doit, je pense, être proche des préoccupations immédiates de l'étudiant, ne pas exiger, pour sa lecture, un savoir qui n'a pas encore été acquis, ne pas rebuter par l'exposé trop fréquent de notions trop délicates ; mais il doit, cependant, contenir une substance suffisante pour constituer les solides fondations sur lesquelles s'échafaude la pyramide du savoir scientifique.

On l'imagine, dès lors, aisément : l'écriture d'un tel manuel, à l'intention des étudiants des classes préparatoires ou d'un premier cycle universitaire, demande, à côté de la nécessaire compétence, des qualités pédagogiques certaines, affinées par une longue expérience professionnelle dans ces sections, une patience et une minutie rédactionnelles inouïes. Jean-Marie Monier a eu le courage de se lancer dans ce gigantesque travail et les ouvrages qu'il nous propose aujourd'hui – après les recueils d'exercices qui ont eu le succès que l'on sait – montrent qu'il a eu raison : il a, me semble-t il, pleinement atteint le but qu'il s'était fixé, à savoir rédiger des livres de cours complets à l'usage de tous les étudiants et pas seulement des polytechniciens en herbe. Les nombreux ouvrages d'approfondissement ou de spécialité seront, évidemment, lus et savourés plus tard, ... par ceux qui poursuivront. Pour l'instant, il faut, à l'issue de la Terminale, assimiler complètement les nouvelles notions de base (la continuité, la convergence, le linéaire...) ; le lecteur est guidé, pas à pas, par une main sûre qui le tient plus fermement dès qu'il y a danger : les mises en garde contre certaines erreurs sont le fruit de l'observation répétée de celles-ci chez les élèves.

A tout instant, des exercices sont proposés qui vont l'interpeller : il sera heureux de pouvoir, quelques dizaines de pages plus loin, soit s'assurer que, par une bonne démarche il est parvenu au bon résultat, soit glaner une précieuse indication pour poursuivre la recherche : le livre forme un tout, efficace et cohérent.

J'ai dit quel rôle majeur dans la formation d'un jeune esprit scientifique peut jouer un manuel qui lui servira de référence pendant longtemps. Sa conception, sa rédaction, sa présentation sont, alors, essentielles : on ne peut que viser à la perfection !

C'est tout le sens du travail effectué par Jean-Marie Monier avec une compétence, un goût, une constance admirables, depuis le premier manuscrit jusqu'aux ultimes corrections, dans les moindres détails, avant la version définitive.

Ces ouvrages qui répondent à un réel besoin aujourd'hui, seront, j'en suis persuadé, appréciés par tous ceux à qui ils s'adressent – par d'autres aussi sans doute – ceux-là mêmes qui, plus tard, diront : « Ma formation mathématique de base, je l'ai faite sur le MONIER ! ».

H. Durand
Professeur en Mathématiques Spéciales PT*
au lycée La Martinière Monplaisir à Lyon

Avant-propos

Ce Cours de Mathématiques avec exercices corrigés s'adresse aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles (2^e année MP-MP*), aux étudiants du premier cycle universitaire scientifique et aux candidats aux concours de recrutement de professeurs.

Le plan en est le suivant :

Analyse MPSI :	***Analyse*** en 1^{re} année
Algèbre MPSI :	***Algèbre*** en 1^{re} année
Géométrie MPSI :	***Géométrie*** en 1^{re} année
Analyse MP :	***Analyse*** en 2^e année
Algèbre et géométrie MP :	***Algèbre et géométrie*** en 2^e année.

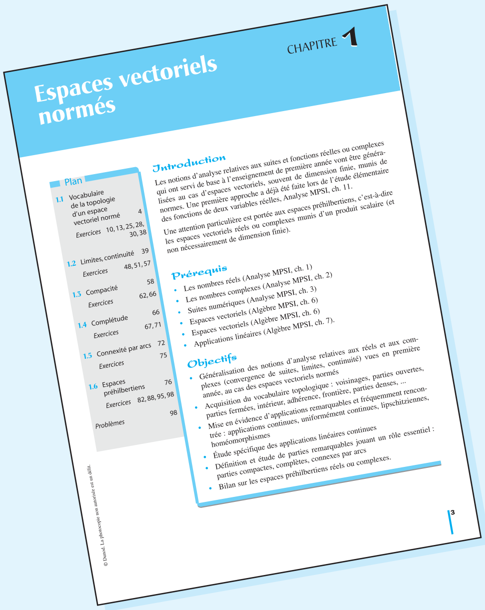
Cette nouvelle édition répond aux besoins et aux préoccupations des étudiant(e)s.

Une nouvelle maquette, à la convivialité accrue, assure un meilleur accompagnement pédagogique. Le programme officiel est suivi de près ; les notions ne figurant pas au programme ne sont pas étudiées dans le cours. Des exercices-types résolus et commentés, incontournables et cependant souvent originaux, aident le lecteur à franchir le passage du cours aux exercices. Les très nombreux exercices, progressifs et tous résolus, se veulent encore plus accessibles et permettent au lecteur de vérifier sa bonne compréhension du cours.
Des compléments situés à la limite du programme sont traités, en fin de chapitre, sous forme de problèmes corrigés.

J'accueillerai avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien me faire parvenir aux bons soins de Dunod, éditeur, 5, rue Laromiguière, 75005 Paris.

Jean-Marie Monier

Pour bien utiliser


CHAPITRE 1

Espaces vectoriels normés

Plan

1.1 Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé 4
Exercices 10, 13, 25, 28, 30, 38
1.2 Limites, continuité 39
Exercices 48, 51, 57
1.3 Compacité 58
Exercices 62, 66
1.4 Complétude 66
Exercices 67, 71
1.5 Connexité par arcs 72
Exercices 75
1.6 Espaces préhilbertiens 76
Exercices 82, 88, 95, 98
Problèmes 98

Introduction

Les notions d'analyse relatives aux suites et fonctions réelles ou complexes qui ont servi de base à l'enseignement de première année vont être généralisées au cas d'espaces vectoriels, souvent de dimension finie, munis de normes. Une première approche a déjà été faite lors de l'étude élémentaire des fonctions de deux variables réelles, Analyse MPSI, ch. 11.

Une attention particulière est portée aux espaces préhilbertiens, c'est-à-dire les espaces vectoriels réels ou complexes munis d'un produit scalaire (et non nécessairement de dimension finie).

Prérequis

- Les nombres réels (Analyse MPSI, ch. 1)
- Les nombres complexes (Analyse MPSI, ch. 2)
- Suites numériques (Analyse MPSI, ch. 3)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 6)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 6)
- Applications linéaires (Algèbre MPSI, ch. 7).

Objectifs

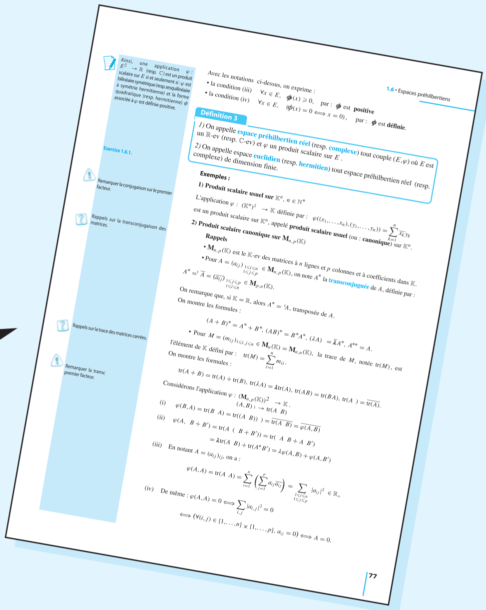
- Généralisation des notions d'analyse relatives aux réels et aux complexes (convergence de suites, limites, continuité) vues en première année, au cas des espaces vectoriels normés
- Acquisition du vocabulaire topologique : voisinages, parties ouvertes, parties fermées, intérieur, adhérence, frontière, parties denses, ...
- Mise en évidence d'applications remarquables et fréquemment rencontrée : applications continues, uniformément continues, lipschitziennes, homéomorphismes
- Étude spécifique des applications linéaires continues
- Définition et étude de parties remarquables jouant un rôle essentiel : parties compactes, complètes, connexes par arcs
- Bilan sur les espaces préhilbertiens réels ou complexes.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

3

La page d'entrée de chapitre

Elle propose une introduction au cours, un rappel des prérequis et des objectifs, ainsi qu'un plan du chapitre.


1.6 • Espaces préhilbertiens

Définition 3

Exemples :

Rappels

77

Le cours

Le cours aborde toutes les notions du programme de façon structurée afin d'en faciliter la lecture.
La colonne de gauche fournit des remarques pédagogiques qui accompagnent l'étudiant dans l'assimilation du cours. Il existe quatre types de remarques, chacun étant identifié par un pictogramme.

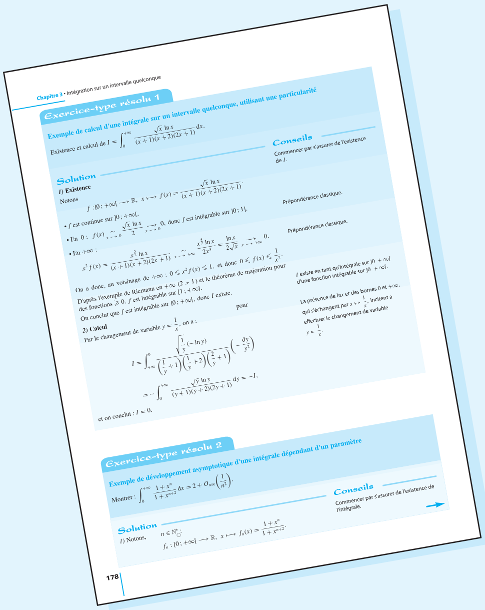
Les pictogrammes dans la marge


Commentaires pour bien comprendre le cours (reformulation d'un énoncé, explication d'une démonstration…).


Indication du degré d'importance d'un résultat.


Mise en garde contre des erreurs fréquentes.


Rappel d'hypothèse ou de notation.


Chapitre 3 • Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice-type résolu 1

Conseils

Solution

Exercice-type résolu 2

Conseils

Solution

178

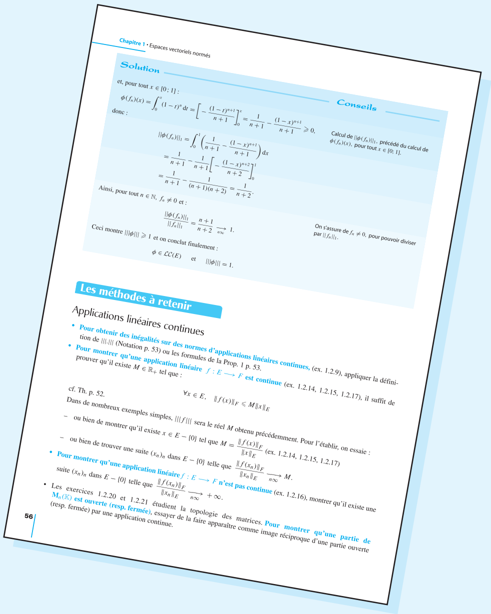
Les exercices-types résolus

Régulièrement dans le cours, des exercices-types résolus permettent d'appliquer ses connaissances sur un énoncé incontournable. La solution est entièrement rédigée et commentée.

cet ouvrage

Les méthodes à retenir

Régulièrement dans le cours, cette rubrique propose une synthèse des principales méthodes à connaître.



Les exercices et problèmes

Dans chaque chapitre, à la fin d'une sous-partie, des énoncés d'exercices sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.
A la fin de certains chapitres, des énoncés de problèmes proposent d'aller plus loin.

Les solutions des exercices et problèmes

Tous les exercices et problèmes sont corrigés.
Les solutions sont regroupées en fin d'ouvrage.

Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit ou de la saisie: Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gérard BOURGIN, Gérard-Pierre BOUVIER, Gérard CASSAYRE, Gilles CHAFFARD, Jean-Yves CHEVROLAT, Jean-Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Nicole GAILLARD, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Christian GIRAUD, Alain GOURET, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Jean-Paul MARGIRIER, Annie MICHEL, Rémy NICOLAÏ, Michel PERNOUD, Jean REY, René ROY, Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ et Gérard SIBERT.

Enfin, je remercie vivement les Éditions Dunod, Gisèle Maïus, Bruno Courtet, Michel Mounic, Nicolas Leroy et Dominique Decobecq, dont la compétence et la persévérance ont permis la réalisation de ces volumes.

Jean-Marie Monier

Cours

Espaces vectoriels normés

CHAPITRE 1

Plan

1.1 Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé 4

Exercices 10, 13, 25, 28, 30, 38

1.2 Limites, continuité 39

Exercices 48, 51, 57

1.3 Compacité 58

Exercices 62, 66

1.4 Complétude 66

Exercices 67, 71

1.5 Connexité par arcs 72

Exercices 75

1.6 Espaces préhilbertiens 76

Exercices 82, 88, 95, 98

Problèmes 98

Introduction

Les notions d'analyse relatives aux suites et fonctions réelles ou complexes qui ont servi de base à l'enseignement de première année vont être généralisées au cas d'espaces vectoriels, souvent de dimension finie, munis de normes. Une première approche a déjà été faite lors de l'étude élémentaire des fonctions de deux variables réelles, Analyse MPSI, ch. 11.

Une attention particulière est portée aux espaces préhilbertiens, c'est-à-dire les espaces vectoriels réels ou complexes munis d'un produit scalaire (et non nécessairement de dimension finie).

Prérequis

- Les nombres réels (Analyse MPSI, ch. 1)
- Les nombres complexes (Analyse MPSI, ch. 2)
- Suites numériques (Analyse MPSI, ch. 3)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 6)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 6)
- Applications linéaires (Algèbre MPSI, ch. 7).

Objectifs

- Généralisation des notions d'analyse relatives aux réels et aux complexes (convergence de suites, limites, continuité) vues en première année, au cas des espaces vectoriels normés
- Acquisition du vocabulaire topologique : voisinages, parties ouvertes, parties fermées, intérieur, adhérence, frontière, parties denses, ...
- Mise en évidence d'applications remarquables et fréquemment rencontrée : applications continues, uniformément continues, lipschitziennes, homéomorphismes
- Étude spécifique des applications linéaires continues
- Définition et étude de parties remarquables jouant un rôle essentiel : parties compactes, complètes, connexes par arcs
- Bilan sur les espaces préhilbertiens réels ou complexes.

Dans ce chapitre 1, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une étude élémentaire a été faite dans Analyse MPSI (ch. 3, 4, 11).
On abrège espace vectoriel en ev.

1.1 Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé

1.1.1 Norme, distance associée

1) Définition d'une norme, exemples

Définition

On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$-ev E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall\ x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(ii) $\forall x \in E, \quad (N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$

(iii) $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On appelle **espace vectoriel normé** (en abrégé **evn**) tout couple (E,N) où E est un $\mathbb{K}$-ev et N une norme sur E.

(i) : positive-homogénéité
(ii) : non-dégénérescence
(iii) : inégalité triangulaire.

On rajoute quelquefois :
(iv) $\forall x \in E, N(x) \geqslant 0$, ce qui est en fait inutile (cf. ci-dessous).

Remarque : Soit (E,N) un $\mathbb{K}$-evn.

1) En appliquant (i) à $\lambda = 0$, on déduit $N(0) = 0$.

2) Pour tout x de E, en appliquant (iii) à x on déduit alors :

$0 = N(0) = N(x + (-x)) \leqslant N(x) + N(-x) = N(x) + |-1| N(x) = 2N(x)$,

et donc $N(x) \geqslant 0$.

La condition $N(x) \geqslant 0$ serait donc superflue dans la définition.

On note 0 le réel nul (ou le complexe nul) et aussi 0 le vecteur nul.

Une norme sur E est souvent notée $||.|| : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ||x|| \end{array}$, ou encore $||.||_E$.

S'il n'y a pas de risque d'ambigüité, on note E au lieu de (E,N).

Ces exemples sont fondamentaux.

Exemples :

1) **Les trois normes usuelles sur** $\mathbb{K}^n$ (dites aussi **normes standard** sur $\mathbb{K}^n$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons, pour tout $x = (x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$, les réels $||x||_1$, $||x||_2$, $||x||_\infty$ définis par :

$$||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad ||x||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad ||x||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|.$$

Vérifions que les applications $||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définies sont des normes. Les calculs suivants sont valables pour tous $x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et λ de $\mathbb{K}$.

a) (i) $\quad ||\lambda x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda|\ ||x||_1$

(ii) $\quad ||x||_1 = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0 \iff (\forall k \in \{1,\dots,n\},\ |x_k| = 0)$

$\iff (\forall k \in \{1,\dots,n\},\ x_k = 0) \iff x = 0$

(iii) $||x+y||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = ||x||_1 + ||y||_1.$

b) (i) $||\lambda x||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\,||x||_2$

(ii) $||x||_2 = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0 \Longleftrightarrow (\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ |x_k|^2 = 0) \Longleftrightarrow x = 0$

On a vu, dans Algèbre MPSI, que l'inégalité triangulaire pour $||\cdot||_2$ sur $\mathbb{R}^n$, appelée aussi inégalité de Minkowski, résultait de l'inégalité de Cauchy et Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

(iii) L'inégalité $||x+y||_2 \leqslant ||x||_2 + ||y||_2$ est acquise pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ d'après l'étude des produits scalaires (cf. Algèbre MPSI, 10.1.2 Th. 2). Nous allons cependant en donner une preuve élémentaire.

On retrouve ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{K}^n$.

L'implication réciproque, de symbole $\Longleftarrow$, traduit une condition suffisante.

$$||x+y||_2 \leqslant ||x||_2 + ||y||_2 \Longleftrightarrow ||x+y||_2^2 \leqslant ||x||_2^2 + 2||x||_2||y||_2 + ||y||_2^2$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k+y_k|^2 - |x_k|^2 - |y_k|^2\right) \leqslant 2||x||_2||y||_2$$

$$\Longleftrightarrow \text{Ré}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k\right) \leqslant ||x||_2||y||_2 \Longleftarrow \left|\sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k\right| \leqslant ||x||_2||y||_2$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} x_k \overline{y}_k \overline{x}_l y_l \leqslant \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} |x_k|^2|y_l|^2$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \left(|x_k|^2|y_l|^2 + |x_l|^2|y_k|^2 - x_k\overline{y}_k\overline{x}_l y_l - x_l\overline{y}_l\overline{x}_k y_k\right) \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} |x_k y_l - x_l y_k|^2 \geqslant 0.$$

La norme $||.||_2$ est appelée la **norme euclidienne usuelle** sur $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la **norme hermitienne usuelle** sur $\mathbb{C}^n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

c) (i) $||\lambda x||_\infty = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}}(|\lambda x_k|) = |\lambda| \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |x_k| = |\lambda|\,||x||_\infty$

(ii) $||x||_\infty = 0 \Longleftrightarrow \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |x_k| = 0$

$$\Longleftrightarrow (\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ |x_k| = 0) \Longleftrightarrow x = 0$$

(iii) $$\begin{aligned} ||x+y||_\infty &= \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |x_k+y_k| \\ &\leqslant \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} (|x_k|+|y_k|) \leqslant \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |x_k| + \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |y_k| \\ &= ||x||_\infty + ||y||_\infty. \end{aligned}$$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout p de $[1;+\infty[$, l'application :

$$||.||_p : \quad \begin{aligned} \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1,\ldots,x_n) &\longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Cf. exercice 1.1.8 p. 10.

est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée **norme de Hölder**.

Les normes $||.||_1$ et $||.||_2$ de l'exemple *1)* sont des cas particuliers de $||.||_p$, $p = 1$, $p = 2$.

Pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$, on a $||x||_p \underset{p\infty}{\longrightarrow} \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |x_k|$, ce qui justifie la notation $||.||_\infty$.

Cf. exercice 1.1.8 *d)* p. 10.

Cf. Analyse MPSI § 4.1.8 Prop. 3.

3) Soit X un ensemble non vide ; l'ensemble $\text{B}(X;\mathbb{K})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

L'application $||.||_\infty : \begin{aligned} \text{B}(X;\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \underset{x\in X}{\text{Sup}} |f(x)| \end{aligned}$ est une norme sur $\text{B}(X;\mathbb{K})$.

Réviser les propriétés de la norme $||.||_\infty$ dans Analyse MPSI, § 4.1.8.

En effet, pour tous f,g de $B(X;\mathbb{K})$ et tout λ de $\mathbb{K}$:

$$\text{(i)}\quad ||\lambda f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \operatorname*{Sup}_{x\in X} |f(x)| = |\lambda|\, ||f||_\infty$$

$$\text{(ii)}\quad ||f||_\infty = 0 \Longleftrightarrow (\forall x\in X,\ |f(x)|=0) \Longleftrightarrow f=0$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} ||f+g||_\infty &= \operatorname*{Sup}_{x\in X}|f(x)+g(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in X}(|f(x)|+|g(x)|)\\ &\leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in X}|f(x)| + \operatorname*{Sup}_{x\in X}|g(x)| = ||f||_\infty + ||g||_\infty. \end{aligned}$$

La norme $||.||_\infty$ sur $B(X;\mathbb{K})$ est appelée **norme de la convergence uniforme** car (cf. 5.1.1) une suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{Il existe } N\in\mathbb{N} \text{ tel que, pour tout } n\geqslant N,\ f_n - f \in B(X;\mathbb{K}) \\ ||f_n - f||_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

4) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $a<b$, et $E = C([a;b],\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-ev des applications continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$. Considérons, pour toute f de E, les réels $||f||_1$, $||f||_2$ définis par :

$$||f||_1 = \int_a^b |f|, \quad ||f||_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vérifions que les applications $||.||_1, ||.||_2 : C([a;b],\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définies sont des normes. On a, pour tous f,g de $C([a;b],\mathbb{K})$ et tout λ de $\mathbb{K}$:

a) (i) $||\lambda f||_1 = \displaystyle\int_a^b |\lambda f| = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda|\, ||f||_1$

La continuité de f est ici essentielle.

Cf. Analyse MPSI, § 6.2.5 Cor. 4.

(ii) $||f||_1 = 0 \Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b |f| = 0 \Longleftrightarrow f=0,$

car f est continue

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} ||f+g||_1 &= \int_a^b |f+g| \leqslant \int_a^b (|f|+|g|)\\ &= \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = ||f||_1 + ||g||_1. \end{aligned}$$

$$b)\ \text{(i)}\quad ||\lambda f||_2 = \left(\int_a^b |\lambda f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\, ||f||_2$$

(ii) $||f||_2 = 0 \Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b |f|^2 = 0 \Longleftrightarrow f = 0,$

La continuité de f est ici essentielle.

car f est continue

Cf. Analyse MPSI, § 6.2.5 Cor. 4.

(iii) L'inégalité $||f+g||_2 \leqslant ||f||_2 + ||g||_2$ est conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales :

$$\left|\int_a^b fg\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |g|^2\right).$$

Cf. Analyse MPSI, 6.2.5 Théorème, pour le cas réel, et plus loin § 2.3.4 *2)* th.3 pour le cas complexe.

5) Plus généralement, avec les notations de *4)*, pour tout p de $[1,+\infty[$, l'application :

$$\begin{aligned} ||.||_p : C([a;b],\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Cf. exercice 1.1.9 p. 10.

est une norme, appelée **norme de Hölder**.

Cf. exercice 1.1.9 *d)* p. 10.

Pour toute f de $C([a;b],\mathbb{K})$, $||f||_p \underset{p\infty}{\longrightarrow} \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} |f(x)|$, ce qui justifie ici la notation $||f||_\infty$.

Exercices 1.1.1, 1.1.3 à 1.1.10.

• La formule

$$d(x,y) = ||x - y||$$

exprime la distance à l'aide de la norme.

• La formule

$$||x|| = d(0,x)$$

exprime la norme à l'aide de la distance.

2) Distance associée à une norme

Définition

Soit $(E,||.||)$ un evn ; on appelle **distance associée à** $||.||$ l'application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = ||x - y||$.

En particulier : $\forall x \in E,\ d(0,x) = ||x||$.

Proposition 1

Soient $(E,||.||)$ un evn et d la distance associée à $||.||$.

On a :

1) $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(y,x) = d(x,y)$

2) $\forall (x,y) \in E^2, \quad (d(x,y) = 0 \iff x = y)$

3) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

4) $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$

5) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

1) : symétrie

2) : séparation

3) : inégalité triangulaire

4) : positive homogénéité

5) : invariance par translation.

Preuve

1) $d(y,x) = ||y - x|| = ||-(x-y)|| = ||x - y|| = d(x,y)$

2) $d(x,y) = 0 \iff ||x - y|| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$

3) $d(x,z) = ||x - z|| = ||(x-y) + (y-z)|| \leqslant ||x - y|| + ||y - z|| = d(x,y) + d(y,z)$

4) $d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda x - \lambda y|| = ||\lambda(x-y)|| = |\lambda|\,||x-y|| = |\lambda| d(x,y)$

5) $d(x+z, y+z) = ||(x+z) - (y+z)|| = ||x - y|| = d(x,y)$. ■

Remarques :

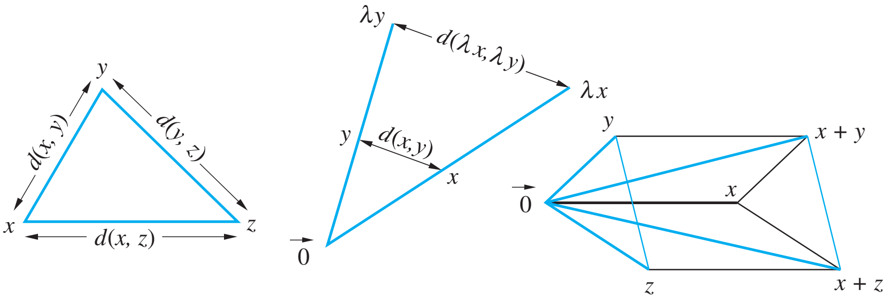
1) Soit E un ensemble ; on appelle **distance** sur E toute application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions *1), 2), 3)* précédentes. On appelle **espace métrique** tout couple (E,d) où E est un ensemble et d une distance sur E.

2) Si E est un $\mathbb{K}$-ev et $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application satisfaisant les cinq conditions *1), 2), 3), 4), 5)* précédentes, alors il existe une norme et une seule $||.||$ sur E telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = ||x - y||.$$

Cf. exercice 1.1.2 p. 10.

3) Les propriétés *3), 4), 5)* peuvent être interprétées graphiquement (pour la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$) :



Propriété *3)* : inégalité triangulaire

Propriété *4)* : positive homogénéité

Propriété *5)* : invariance par translation

Proposition 2 **Inégalité triangulaire renversée**

Soient $(E,||.||)$ un evn et d la distance associée à $||.||$. On a :

1) $\forall (x,y) \in E^2, \quad ||x-y|| \geqslant \big| ||x|| - ||y|| \big|$

2) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,y) \geqslant \big| d(x,z) - d(y,z) \big|$.

Preuve

1) $||x|| = ||(x-y)+y|| \leqslant ||x-y|| + ||y||$, d'où $||x|| - ||y|| \leqslant ||x-y||$.

En échangeant x et y : $||y|| - ||x|| \leqslant ||y-x|| = ||x-y||$.

Ainsi $||x-y|| \geqslant \mathrm{Max}(||x|| - ||y||, ||y|| - ||x||) = \Big| ||x|| - ||y|| \Big|$.

2) $d(x,y) = ||x-y|| = ||(x-z)-(y-z)|| \geqslant \Big| ||x-z|| - ||y-z|| \Big| = \Big| d(x,z) - d(y,z) \Big|$. ■

Exercice 1.1.2.

3) Construction de normes

a) Norme induite sur un sous-ev

Une norme sur E induit une norme sur tout sev de E.

Soient $(E,||.||)$ un evn, d la distance associée à $||.||$.

- Pour tout sev F de E, l'application $\begin{array}{c} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ||x|| \end{array}$ est une norme sur F, appelée **norme induite sur F par** $||\cdot||$ (de E), et encore notée $||\cdot||$.
- Pour toute partie X de E, l'application $\begin{array}{c} X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto d(x,y) \end{array}$ est appelée **distance induite** sur X par d, et encore notée d.

Il est clair que, pour tout sev de E, la distance induite sur F par d est aussi la distance associée à la norme induite sur F par $||\cdot||$.

b) Normes sur un produit fini de $\mathbb{K}$-evn

$\prod_{k=1}^{n} E_k = E_1 \times \ldots \times E_n$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k,N_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des $\mathbb{K}$-evn, $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$. Considérons pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n)$ de E, les réels $\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_\infty(x)$ définis par :

$$\nu_1(x) = \sum_{k=1}^{n} N_k(x_k), \quad \nu_2(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (N_k(x_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_\infty(x) = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} N_k(x_k).$$

Les applications ν_1, ν_2, ν_∞ sont des normes sur E, appelées **normes standard** sur $\prod_{k=1}^{n} E_k$ associées à $N_1, \ldots, N_n$.

Les définitions de ν_1, ν_2, ν_∞ généralisent celles de $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ vues sur $\mathbb{K}^n$ (exemple *1)* p.4). La preuve du fait que ce sont des normes est analogue à celle de l'exemple *1)*.

4) Algèbres normées

Rappels d'algèbre générale, cf. Algèbre MPSI.

Rappelons qu'une **algèbre** (ou $\mathbb{K}$-algèbre) est un $\mathbb{K}$-ev A muni d'une loi interne, notée ici $\bullet$ ou par l'absence de symbole, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \bullet \text{ est distributive sur } + : \\ & \forall (x,y,z) \in A^3, \quad \left\{ \begin{array}{l} x(y+z) = xy + xz \\ (y+z)x = yx + zx \end{array} \right. \\ \text{(ii)} & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x,y) \in A^2, \quad (\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y). \end{array} \right.$$

Si de plus $\bullet$ est commutative (resp. associative, resp. admet un neutre), on dit que A est une $\mathbb{K}$-algèbre **commutative** (resp. **associative**, resp. **unitaire**).

Si N est compatible avec la multiplication de A, alors il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$\forall (x,y) \in A^2$,
$N(xy) \leqslant CN(x)N(y)$,

et l'application
$N' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$\forall x \in A,\ N'(x) = CN(x)$

est une norme d'algèbre sur A.

Définition

Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre, N une norme sur le $\mathbb{K}$-ev A.

1) On dit que N est **compatible avec la multiplication** de A si et seulement si :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+,\ \forall\,(x,y) \in A^2, \quad N(xy) \leqslant CN(x)N(y).$$

2) On dit que N est une **norme d'algèbre** si et seulement si :

$$\forall\,(x,y) \in A^2, \quad N(xy) \leqslant N(x)N(y).$$

On appelle **$\mathbb{K}$-algèbre normée** tout couple (A,N) où A est une $\mathbb{K}$-algèbre et N une norme d'algèbre sur A.

Proposition

Pour tout ensemble non vide X, $\mathrm{B}(X;\mathbb{K})$ est une algèbre normée, la troisième loi étant la multiplication.

Cf. Analyse MPSI, 4.1.8 Prop. 3.

Preuve

On sait déjà que $\big(\mathrm{B}(X;\mathbb{K}),\ ||\cdot||_\infty\big)$ est un evn.

De plus, $\mathrm{B}(X,\mathbb{K})$ est une algèbre et :

$$\forall (f,g) \in \big(\mathrm{B}(X,\mathbb{K})\ \big)^2, \quad ||fg||_\infty \leqslant ||f||_\infty ||g||_\infty .$$

■

Nous verrons plus loin (§ 1.2.5 p. 53) que, si $(E,||\cdot||)$ est un $\mathbb{K}$-evn, alors $(\mathcal{LC}(E),|||\cdot|||)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.

Les méthodes à retenir

Norme, distance associée

- **Pour montrer qu'une application est une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel** (ex. 1.1.3 à 1.1.9), revenir à la définition (Déf. p. 4).
- **Pour exprimer la distance d associée à une norme N sur E,** utiliser :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = N(x-y),$$

et, pour exprimer une norme N à partir distance associée d sur E, utiliser :

$$\forall x \in E, \quad N(x) = d(0,x),$$

(ex. 1.1.2).

- **Pour établir une inégalité faisant intervenir une norme** (ex. 1.1.10), on pourra essayer d'appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire.

Exercices

1.1.1 Trouver toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

1.1.2 Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout (x,y,z) de E^3 et tout λ de $\mathbb{K}$:

1) $d(y,x) = d(x,y)$
2) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$
4) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$
5) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Montrer qu'il existe une norme unique N sur E telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = N(x-y).$$

1.1.3 Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

1) $\forall x \in E - \{0\}, \quad N(x) > 0$

2) $N(0) = 0$

3) $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ N(\lambda x + y) \leqslant |\lambda| N(x) + N(y)$.

Montrer que N est une norme sur E.

1.1.4 Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $p \in \mathbb{N}^*$, $N_1, \ldots, N_p$ des normes sur E, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p - \{(0,\ldots,0)\}$, $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad N(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k N_k(x).$$

Montrer que N est une norme sur E.

1.1.5 Soient $E = C([0;1],\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(f_1, \ldots, f_p) \in E^p$, $N : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \ N(x_1, \ldots, x_p) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t) \right| \mathrm{d}t.$$

Déterminer une CNS sur $(f_1, \ldots, f_p)$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

1.1.6 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $||.||_F$ une norme sur F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $N : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ||f(x)||_F \end{array}$.
Trouver une CNS sur f pour que N soit une norme sur E.

1.1.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On note :

$$N : \mathbb{R}_n[\mathbf{X}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto N(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.

1.1.8 Normes de Hölder sur $\mathbb{K}^n$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1; +\infty[$, $q = \dfrac{p}{p-1}$

(donc $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$).

a) Montrer : $\quad \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad ab \leqslant \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$.

On note $||.||_p : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad ||(x_1, \ldots, x_n)||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et de même pour $||.||_q$.

b) Montrer, pour tout (x,y) de $(\mathbb{K}^n)^2$:

$\alpha)$ $\left| \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k \right| \leqslant ||x||_p ||y||_q$ (analogue de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), où $(x_1, \ldots, x_n) = x$ et $(y_1, \ldots, y_n) = y$

$\beta)$ $||x+y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$.

c) En déduire que $||.||_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée **norme de Hölder**.

d) Montrer, pour tout x de $\mathbb{K}^n$: $||x||_p \underset{p \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} ||x||_\infty$, où $||x||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|$ lorsque $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

1.1.9 Normes de Hölder sur $C([a;b],\mathbb{K})$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $E = C([a;b],\mathbb{K})$, $p \in]1; +\infty[$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.

a) Montrer : $\quad \forall (\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \alpha\beta \leqslant \dfrac{1}{p} \alpha^p + \dfrac{1}{p} \beta^q$

(cf. exercice 1.1.8 *a)*).

On note $||.||_p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \quad ||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}},$$

et de même pour $||.||_q$.

b) Montrer, pour tout (f,g) de E^2 :

$\alpha)$ $\left| \int_a^b \overline{f} g \right| \leqslant ||f||_p ||g||_q$

$\beta)$ $||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$.

c) En déduire que $||.||_p$ est une norme sur E, appelée norme de Hölder.

d) Montrer, pour tout f de E : $||f|| \underset{p \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} ||f||_\infty$

où $||f||_\infty = \underset{t \in [a;b]}{\mathrm{Sup}} |f(t)|$.

1.1.10 Soient $(E, ||.||)$ un evn, $(a,b) \in (E - \{0\}) \times E$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ||ta+b|| \end{array}$. Montrer que f est convexe (c'est-à-dire :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in [0;1], \quad f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v),$$

cf. Analyse MPSI, 5.4.1 Déf.)

et que : $\lim_{\mp\infty} f = +\infty$.

1.1.2 Boules, sphères

Soient $(E,||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn et d la distance associée.

Définition

Soient $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; on définit les parties suivantes de E, appelées respectivement **boule ouverte, boule fermée**, de centre a et de rayon r :

$$B(a;r) = \{x \in E;\ d(a,x) < r\}$$

$$B'(a;r) = \{x \in E; d(a,x) \leqslant r\}.$$

Remarquer l'inégalité stricte pour la boule ouverte, large pour la boule fermée.

On appelle aussi **sphère** de centre a et de rayon r : $S(a;r) = \{x \in E; d(a,x) = r\}$.

Remarque : Si $E \neq \{0\}$, alors, pour tous a,b de E et r,s de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left|\begin{array}{l} B(a;r) = B(b;s) \\ \text{ou} \\ B'(a;r) = B'(b;s) \\ \text{ou} \\ S(a;r) = S(b;s) \end{array}\right| \iff \begin{cases} a = b \\ r = s \end{cases}$$

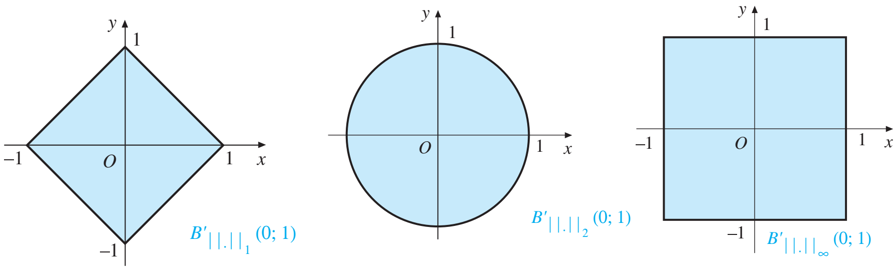
Cf. exercice 1.1.11 *5)* p.13.

Ainsi, une boule ouverte (resp. boule fermée, resp. sphère) de E n'a qu'un « centre » et qu'un « rayon ».

On peut noter $B_E(a;r)$ au lieu de $B(a;r)$ pour éviter des confusions, si plusieurs evn interviennent.

Exemples :

Dans $\mathbb{R}^2$, on peut représenter graphiquement les boules fermées de centre O et de rayon 1 pour les trois normes usuelles :



Exercices 1.1.11 à 1.1.13.

Exercice-type résolu

Un exemple de norme sur $\mathbb{R}^2$, tracé de la boule unité fermée

On considère l'application

$$N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto N(x,y) = \operatorname*{Sup}_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}.$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer et tracer, dans $\mathbb{R}^2$ usuel, la boule fermée $B'_N(0;1)$.

Solution

a) • **Existence**

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } |t| \leqslant 1, \text{ alors : } \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leqslant \frac{|x|+|t||y|}{1+t^2} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+t^2} \leqslant |x|+|y|.$$

$$\text{Si } |t| \geqslant 1, \text{ alors : } \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leqslant \frac{|x|+|t||y|}{1+t^2} \leqslant \frac{|x|+t^2|y|}{1+t^2} \leqslant |x|+|y|.$$

Ceci montre : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{|x+ty|}{1+t^2} \leqslant |x|+|y|,$

donc l'application $t \longmapsto \dfrac{|x+ty|}{1+t^2}$ est bornée, d'où l'existence de $N(x,y)$.

• (i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N\big(\lambda(x,y)\big) = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{|\lambda x + t\lambda y|}{1+t^2} = |\lambda| \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} = |\lambda| N(x,y).$$

(ii) On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x,y) = 0 \iff \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+ty|}{1+t^2} = 0$$
$$\implies \forall t \in \mathbb{R}, \quad x+ty = 0 \implies (x,y) = (0,0).$$

(iii) On a, pour tous $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$N\big((x,y)+(x',y')\big) = N(x+x', y+y') = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{\big|(x+x') + t(y+y')\big|}{1+t^2}$$
$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{|x+ty|}{1+t^2} + \frac{|x'+ty'|}{1+t^2} \right)$$
$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} + \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x'+ty'|}{1+t^2} = N(x,y) + N(x',y').$$

On conclut : N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \in B'_N(0\,;1) \iff N(x,y) \leqslant 1$$
$$\iff \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leqslant 1 \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leqslant 1$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -1-t^2 \leqslant x+ty \leqslant 1+t^2$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} t^2 + yt + (1+x) \geqslant 0 \\ t^2 - yt + (1-x) \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y^2 - 4(1+x) \leqslant 0 \\ (-y)^2 - 4(1-x) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 \leqslant 4(x+1) \\ y^2 \leqslant 4(-x+1). \end{cases}$$

Conseils

Ne pas oublier de montrer d'abord l'existence de $N(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Par exemple, remplacer t par 0 puis remplacer t par 1.

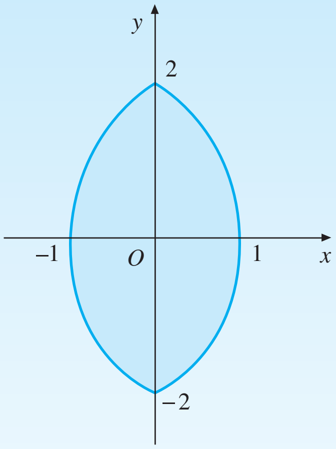
Inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$.

Propriété de la borne supérieure d'une somme de deux fonctions.

Définition de la boule unité fermée $B'_N(0\ 1)$.

Propriété des trinômes réels : si un trinôme réel du second degré garde un signe constant sur tous les réels, alors son discriminant est $\leqslant 0$.

Solution



Tracé de $B'_N(0; 1)$ (en bleu foncé)

Conseils

Les courbes

$$C_1 : \quad y^2 = 4(x+1)$$

$$C_2 : \quad y^2 = 4(-x+1)$$

sont des paraboles, et elles se coupent aux deux points $(0, 2)$ et $(0, -2)$.

Exercices

1.1.11 Soient $(E, || \ ||)$ un evn, $(a,b) \in E^2$, $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Montrer :

1) $B'(a; r) + B'(b; s) = B'(a+b; r+s)$

2) $\lambda B'(a; r) = B'(\lambda a; |\lambda| r)$

3) $B'(a; r) \cap B'(b; s) \neq \varnothing \iff ||a-b|| \leqslant r+s$

4) $B'(a; r) \subset B'(b; s) \iff ||a-b|| \leqslant s-r$

5) $B'(a; r) = B'(b; s) \iff \begin{cases} a = b \\ r = s \end{cases}$

(on supposera $E \neq \{0\}$ pour *4)* et pour *5)*).

1.1.12 Soient E un $\mathbb{K}$-ev, N_1, N_2 deux normes sur E, $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; on suppose $B'_{N_1}(a; r) = B'_{N_2}(a; r)$. Montrer $N_1 = N_2$.

1.1.13 Montrer que, dans tout evn, toute boule ouverte (resp. fermée) est convexe.

1.1.3 Parties bornées d'un evn

Soient $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn, d la distance associée à $||.||$.

Définition 1

Une partie A de E est dite **bornée** si et seulement si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+, \forall (x,y) \in A^2, \quad d(x,y) \leqslant M.$$

Si un réel M convient, tout réel plus grand convient aussi.

Proposition 1

Une partie A de E est bornée si et seulement si :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, \quad ||x|| \leqslant C.$$

Si un réel C convient, tout réel plus grand convient aussi.

Preuve

1) Supposons A bornée ; il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x,y) \in A^2, \quad d(x,y) \leqslant M.$
Si $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$, et on a, pour tout x de A: $||x|| \leqslant ||x-a|| + ||a|| \leqslant M + ||a||.$

2) Réciproquement, supposons qu'il existe $C \in R_+$ tel que : $\forall x \in A, ||x|| \leqslant C.$
On a alors :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad d(x,y) = ||x-y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \leqslant 2C.$$

Remarque : Une partie A de E est bornée si et seulement s'il existe une boule fermée (ou une boule ouverte) contenant A.

Définition 2

Soient X un ensemble, $f : X \longrightarrow E$ une application ; on dit que f est **bornée** si et seulement si $f(X)$ est une partie bornée de E.

Ainsi : $f : X \longrightarrow E$ est bornée si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in X, \ ||f(x)|| \leqslant C.$$

Définition 3

Soit A une partie bornée et non vide de E.

On définit le **diamètre** de A, noté diam (A), par : $\quad \operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$

Si A est une partie bornée non vide de E, l'ensemble $\{d(x,y);(x,y) \in A^2\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée diam (A).

Cependant, on ne définit pas de diamètre pour $\varnothing$.

On peut noter, pour toute partie A non bornée et non vide de E : diam $(A) = +\infty$. Alors, pour toute partie non vide A de E : A est bornée si et seulement si diam $(A) < +\infty$.

Proposition 2

1) Soient $A, B \in \mathfrak{P}(E)$ telles que $A \subset B$. Si B est bornée, alors A est bornée ; si, de plus, $A \neq \varnothing$, alors : diam $(A) \leqslant$ diam (B).

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots A_n$ des parties bornées de E ; alors : $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ est bornée.

3) Toute partie finie de E est bornée.

Preuve

1) Immédiat.

2) Puisque $A_1, \dots, A_n$ sont bornées, il existe $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in A_i, \quad ||x|| \leqslant C_i.$$

En notant $C = \operatorname{Max}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} C_i$, on a alors : $\forall x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \ ||x|| \leqslant C,$ ce qui montre que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ est bornée.

3) Se déduit de *2)* en remarquant que tout singleton est borné.

1.1.4 Voisinages

Soient $(E, ||.||)$ un $\mathbb{K}$-evn, d la distance associée à $||.||$.

Définition 1

Soient $a \in E$, $V \in \mathfrak{P}(E)$; on dit que V est un **voisinage** de a (dans E) si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a;r) \subset V$.

On note $\mathcal{V}_E(a)$ (ou $\mathcal{V}(a)$) l'ensemble des voisinages de a (dans E).

Autrement dit, un voisinage de a dans E est une partie de E qui contient au moins une boule ouverte centrée en a.