

PASS



**Biostatistiques,
probabilités,
mathématiques**

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082717-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

PASS

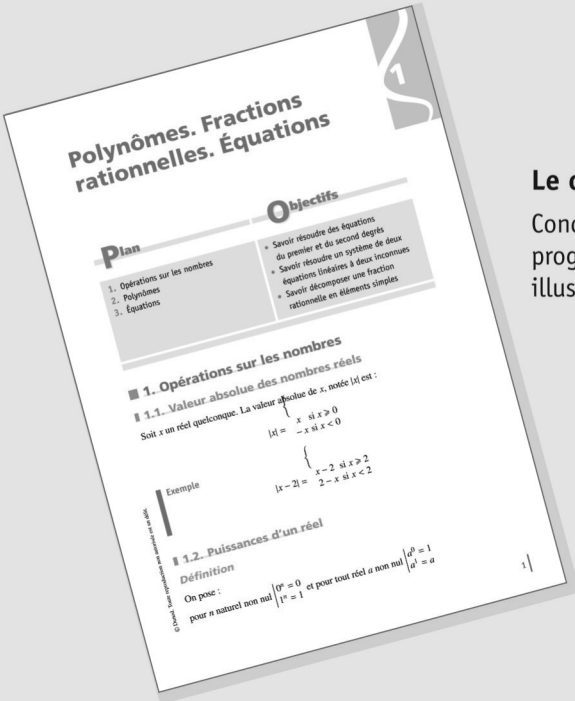


**Biostatistiques,
probabilités,
mathématiques**

Salah Belazreg

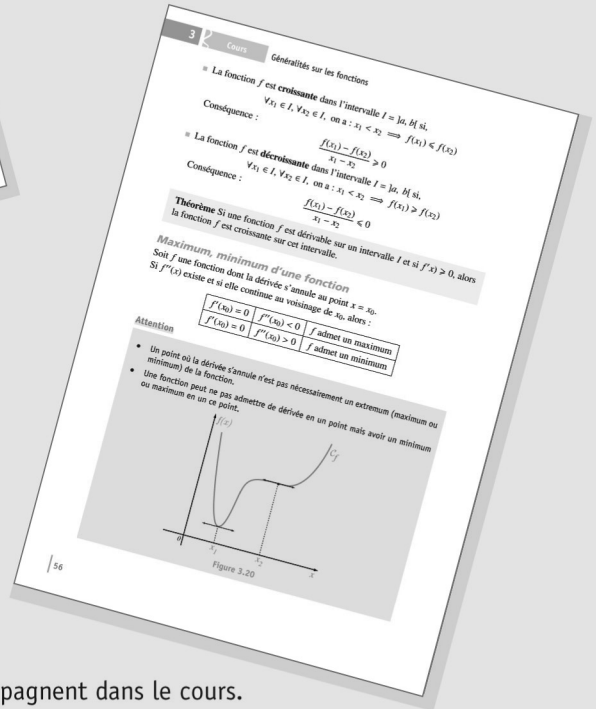
EDISCIENCE

Pour bien utiliser



Le cours

Concis, il aborde toutes les notions du programme et est enrichi de nombreuses illustrations.



Des commentaires pédagogiques vous accompagnent dans le cours. Ils sont identifiés comme suit.

À noter

Commentaire sur une notion afin de vous aider à mieux la comprendre.

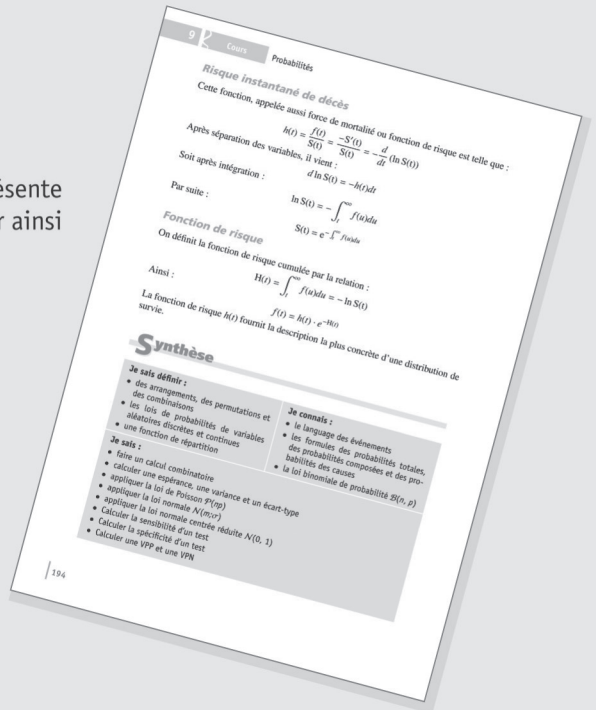
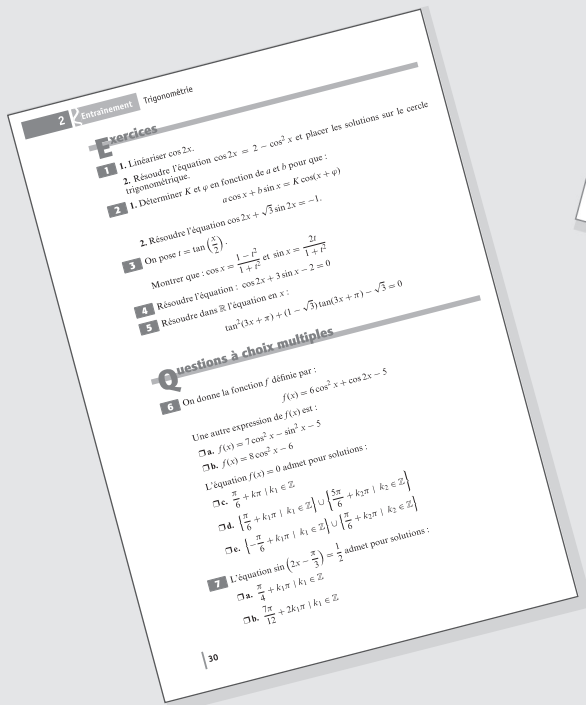
Attention

Notion essentielle à retenir ou erreur à éviter.

cet ouvrage

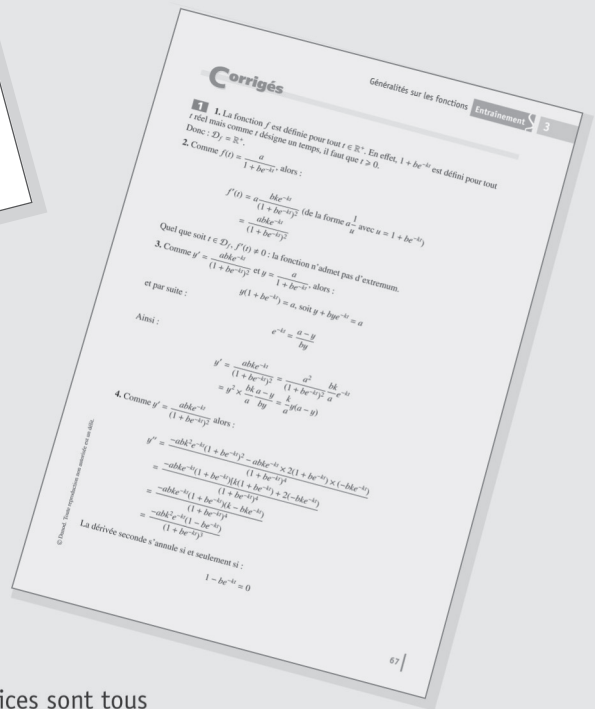
Le bloc synthèse

À la fin de chaque chapitre, il présente les définitions et notions à retenir ainsi que les savoir-faire à maîtriser.



Les QCM et exercices

Chaque chapitre propose de nombreux QCM et exercices extraits d'annales pour vous autoévaluer et vous familiariser à ce type d'épreuve.



Les corrigés

Les QCM et exercices sont tous intégralement corrigés et commentés.

Avant-propos

Le présent ouvrage « tout-en-un » est la 5^e édition du manuel de mathématiques, probabilités et biostatistiques de la collection Parcours Santé. Il couvre la totalité du programme de la rentrée 2021, mise en place lors de la réforme de la PASS/L.AS. Il est complètement revu et corrigé.

Il s'adresse principalement aux étudiants inscrits en 1^{re} année Santé (PASS, L.AS) pour la préparation des concours Médecine-Pharmacie-Dentaire-Sage femme mais il intéressera également les étudiants en classes préparatoires Bio-Véto et Agro (BCPST1) ainsi que les étudiants en L1 Sciences.

Son but est de présenter de façon claire et progressive l'ensemble des notions à connaître d'« Évaluation des méthodes d'analyse appliquées aux sciences de la vie et de la santé ».

Son usage suppose que l'étudiant ait une connaissance complète du programme actuel des classes de premières et terminales scientifiques, spécialité Mathématiques ou Mathématiques complémentaires en classe de terminale.

Il présente de nombreux sujets d'adaptation progressive aux programmes et aux exigences de ces concours et examens difficiles.

En effet, chaque chapitre mentionne les objectifs à atteindre et il propose un cours présenté de façon détaillée, des exemples concrets, des applications, des exercices et des QCM de difficultés variées.

Chaque chapitre comprend

- **Le Cours** composé de définitions, propriétés et théorèmes dont la connaissance est indispensable. Il met l'accent sur les notions fondamentales à connaître. Il ne doit pas se substituer au cours de votre professeur mais plutôt en faire ressortir l'essentiel. De nombreux exemples et applications, au fil du cours, visent à l'assimilation des notions essentielles et à l'acquisition des techniques de base.
- **Des Exercices types** classés par niveau de difficulté ainsi que leurs corrigés détaillés. Ils permettent à l'étudiant une démarche graduée : chercher seul, s'inspirer des exemples et applications du cours, et, au final, tirer le maximum de profit de chaque exercice. Leur choix et leur nombre plus réduit vise la méthode plutôt que la quantité.
- **Des QCM**, en fin de chaque chapitre, sont de véritables exercices de réflexion. La plupart sont issus des sujets de concours. Ainsi, avant de proposer des solutions rapides et sans démarches rigoureuses, il importe de bien connaître la totalité du cours, et pas seulement les formules. Une résolution approfondie vous permettra de vous entraîner à ce type d'épreuve afin de gagner en compétence et rapidité.

Mon expérience d'enseignement, articulée entre le secondaire et le supérieur, m'a montré que la difficulté qu'éprouvent certains étudiants à assimiler les mathématiques tenait au caractère abstrait de leur support. Ainsi, j'ai tenté de faire un juste choix entre une vulgarisation et un excès d'abstraction qui risque de rebuter. Par ailleurs, il m'a paru intéressant de donner au lecteur un aperçu des applications pratiques des notions présentées. C'est pourquoi, chaque fois que cela a été possible, j'ai illustré mes propos par des applications médicales, physiques ou chimiques.

Remerciements

Je remercie très sincèrement les éditions Dunod pour le soin et la présentation apportés à la réalisation de cet ouvrage et plus particulièrement à l'équipe éditoriale, Madame Emmanuelle Chatelet et Monsieur Matthieu Daniel.

En conclusion

J'espère que cet ouvrage, fruit d'une longue expérience, rédigé avec beaucoup d'attention, constituera pour les étudiants un outil précieux pour la préparation de ces examens et concours difficiles et je leur souhaite bon courage.

Que les lecteurs, collègues enseignants et étudiants, qui voudront bien me formuler leurs remarques constructives et critiques ou me présenter leurs suggestions susceptibles d'améliorer cet ouvrage en soient par avance remerciés.

Salah Belazreg
Poitiers, avril 2021

Table des matières

Avant-propos	VI
Chapitre 1	
Polynômes. Fractions rationnelles. Équations	1
■ 1. Opérations sur les nombres	1
■ 2. Polynômes	4
■ 3. Équations	7
■ Exercices et QCM corrigés	11
Chapitre 2	
Trigonométrie	23
■ 1. Fonctions trigonométriques	23
■ 2. Formulaire	25
■ Exercices et QCM corrigés	30
Chapitre 3	
Généralités sur les fonctions	38
■ 1. Fonctions	38
■ 2. Dérivée. Différentielle	47
■ 3. Fonctions de plusieurs variables indépendantes	59
■ 4. Dérivées partielles. Différentielle totale	59
■ Exercices et QCM corrigés	61

Chapitre 4	
Primitives. Intégrales	75
■ 1. Primitive d'une fonction réelle	75
■ 2. Intégrale définie	77
■ 3. Quelques applications du calcul intégral	79
■ 4. Méthodes de calcul des intégrales	81
■ Exercices et QCM corrigés	83
Chapitre 5	
Développement de fonctions en séries entières	97
■ 1. Convergence et divergence d'une série	97
■ 2. Séries entières	101
■ 3. Développement en série entière des fonctions usuelles	106
■ Exercices corrigés	107
Chapitre 6	
Équations différentielles	112
■ 1. Généralités	112
■ 2. Équations différentielles du premier ordre	113
■ 3. Équations différentielles du second ordre	116
■ 4. Quelques courbes importantes en biologie	120
■ 5. Applications	123
■ Exercices et QCM corrigés	131
Chapitre 7	
Notions de grandeurs intensives et extensives	149
■ 1. Variables (ou fonctions) extensives et intensives	149
■ 2. Différentielle d'une fonction	149
■ 3. Détermination d'une fonction à partir de sa différentielle	154

Chapitre 8

Analyse Combinatoire. Binôme de Newton **156**

- 1. Ensembles finis **156**
- 2. Arrangements, permutations et combinaisons **157**
- Exercices et QCM corrigés **161**

Chapitre 9

Probabilités **167**

- 1. Probabilités **167**
- 2. Variables aléatoires, loi de probabilité et fonction de répartition **175**
- 3. Loïs de probabilités de variables aléatoires continues **179**
- 4. Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Épreuves répétées **180**
- 5. Loi des fréquences **183**
- 6. Loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ ou $\mathcal{P}(m)$ **183**
- 7. Loi de Laplace-Gauss ou loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ **184**
- 8. Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ **186**
- 9. Quelques applications des probabilités à la santé **187**
- Exercices et QCM corrigés **194**

Chapitre 10

Statistiques descriptives **226**

- 1. Étude d'un caractère ou d'une variable **226**
- 2. Les différentes représentations graphiques **228**
- 3. Les paramètres d'une série statistique **231**
- 4. Étude de 2 caractères **241**
- Exercices et QCM corrigés **243**

Chapitre 11	
Problèmes d'estimation et tests d'hypothèses	250
■ 1. Problèmes d'estimation	250
■ 2. Tests statistiques	256
■ Exercices et QCM corrigés	261
Chapitre 12	
Problèmes d'ajustement	273
■ 1. Ajustement linéaire. Méthode des moindres carrés	273
■ 2. Ajustement exponentiel	275
■ Exercices corrigés	278
Chapitre 13	
Mesures et leurs précisions	285
■ 1. Grandeurs physiques. Équations aux dimensions	285
■ 2. Système international d'unités	286
■ 3. Équations aux dimensions	286
■ 4. Analyse dimensionnelle	287
■ 5. Mesures des grandeurs	288
■ 6. Dispersion d'une série de mesures	291
■ Exercices et QCM corrigés	296
Annexes	301
Index	305

Polynômes. Fractions rationnelles. Équations

Plan

1. Opérations sur les nombres
 2. Polynômes
 3. Équations
- Synthèse**
Exercices
Questions à choix multiples
Corrigés

Objectifs

- Savoir résoudre des équations du premier et du second degré
- Savoir résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues
- Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

■ 1. Opérations sur les nombres

■ 1.1. Valeur absolue des nombres réels

Soit x un réel quelconque. La valeur absolue de x , notée $|x|$ est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

■ 1.2. Puissances d'un réel

Définition

On pose :

$$\text{pour } n \text{ naturel non nul} \quad \left| \begin{array}{l} 0^n = 0 \\ 1^n = 1 \end{array} \right. \text{ et pour tout réel } a \text{ non nul} \quad \left| \begin{array}{l} a^0 = 1 \\ a^1 = a \end{array} \right.$$

Pour tout réel a et pour tout entier naturel n non nul, la **puissance n-ième** de a , notée a^n , est définie par :

$$a^{n+1} = a \times a^n \quad \left| \begin{array}{l} a : \text{base de la puissance} \\ n : \text{exposant de la puissance} \end{array} \right.$$

Remarques

- L'écriture a^n se lit « a puissance n » ou « a exposant n ».
- Pour a non nul, l'inverse de a , $\frac{1}{a}$, peut se noter a^{-1} et $\frac{1}{a^n}$ se note a^{-n} . ■

Propriétés

- a et b étant des réels quelconques et m et n des entiers naturels, on a :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ avec } a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ avec } b \neq 0$$

- Formule du **binôme de Newton** :

Quels que soient les réels a et b et quel que soit l'entier naturel n :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^i a^{n-i} b^i + \dots + C_n^n b^n = \sum_{i=1}^n C_n^i a^{n-i} b^i$$

1.3. Puissances fractionnaires à exposant rationnel

- Quels que soient x et y réels positifs et quel que soit n entier naturel non nul, le nombre $x^{\frac{1}{n}}$ est défini par l'équivalence suivante :

$$y = x^{\frac{1}{n}} \iff x = y^n$$

De la relation précédente, il vient :

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x$$

- Si x est un réel quelconque et si n est un entier naturel non nul et pair alors :

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = |x|$$

D'où, en remarquant que :

$$\forall x \geq 0, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \text{ alors } \sqrt{x^2} = |x|.$$

Exemple

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^3}{x}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

- Quels que soient x réel positif, y réel strictement positif, et n entier naturel non nul :

$$\frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$$

1.4. Racines n -ième d'un réel

Les résultats qui suivent sont illustrés graphiquement par l'existence des points d'intersection de la droite $y = a$ et de la courbe d'équation $y = x^n$.

 a est un réel positif

La racine n -ième du réel a est l'unique solution réelle positive de l'équation $x^n = a$ d'inconnue x .

Elle est notée : $x = \sqrt[n]{a}$

- Si n est pair alors l'équation admet deux solutions opposées :

$$x_1 = \sqrt[n]{a} \text{ et } x_2 = -\sqrt[n]{a}$$

- Si n est impair alors l'équation admet une seule solution positive $x = \sqrt[n]{a}$.

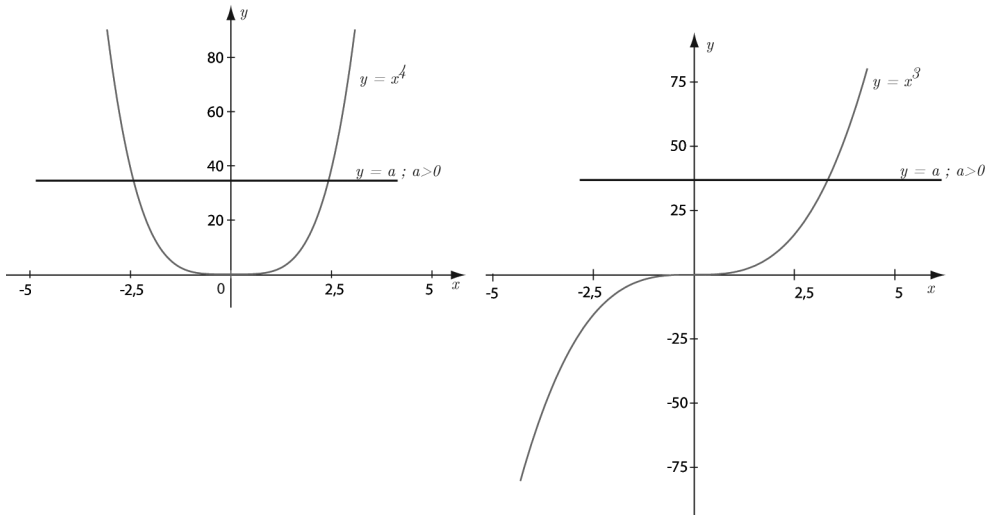


Figure 1.1

***a* est un réel strictement négatif**

- Si n est pair, alors l'équation $x = \sqrt[n]{a}$ n'admet pas de solution.
- Si n est impair, alors l'équation admet une seule solution $x = \sqrt[n]{a}$, laquelle est négative.

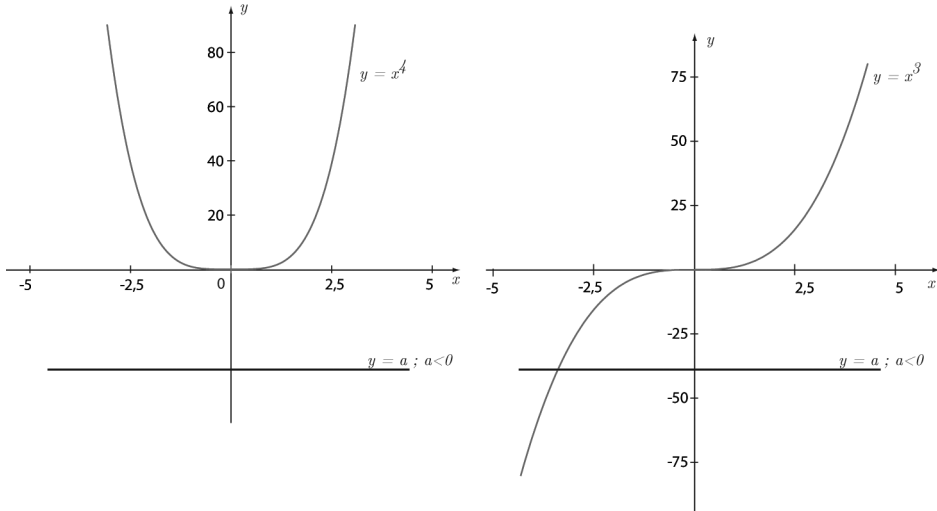


Figure 1.2

■ 2. Polynômes

■ 2.1. Définitions

- Un **polynôme de degré n** , a pour expression :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=1}^n a_kx^k$$

- x est la variable et les réels $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ sont des constantes appelées **coefficients du polynôme**.
- n est un entier naturel et représente le **degré du polynôme**.

$P(x)$ est dit **identiquement nul** si tous ses coefficients sont nuls. On note $P(x) = 0$.

Exemple

$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ entraîne $a_0 = 0, a_1 = 0$ et $a_2 = 0$.

Si le polynôme $P(x)$ n'est pas identiquement nul ($P(x) \neq 0$), le degré du polynôme $P(x)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. On le note $\deg(P)$.

Exemples

- $A(x) = 1 - 2x + 3x^3$ est un polynôme ordonné de degré 3.
On note $\deg(A) = 3$.
- $B(x) = \frac{2}{3} + 2x + 4x^2 + 8x^3 - 5x^4$ est un polynôme de degré 4 et $\deg(B) = 4$.

2.2. Division euclidienne ou division selon les puissances décroissantes

Soient $P(x)$ et $A(x) \neq 0$ deux polynômes. Alors il existe un couple unique de polynômes $(Q(x), R(x))$ tels que :

$$P(x) = A(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(A) \text{ ou } R = 0$$

$Q(x)$ et $R(x)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $A(x)$.

Exemple

Si $P(x) = 2x^3 - 5x + 4$ et $A(x) = x^2 + x - 1$,
alors :

$$Q(x) = 2x - 2 \text{ et } R(x) = -x + 2$$

■ Divisibilité par un monôme $x - a$

On dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ si :

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x); \quad Q(x) \text{ est le quotient.}$$

Comme $P(x)$ est divisible par $x - a$ alors $P(a) = 0$: le réel a est donc racine de l'équation $P(x) = 0$.

- Pour démontrer qu'un polynôme de degré n est identiquement nul, on prouve qu'il a au moins $n + 1$ racines.

2.3. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Une **fraction rationnelle** est un quotient de polynômes. On cherchera à écrire cette fraction sous la forme d'une somme de fonctions dont on connaît une primitive. Plusieurs techniques sont possibles.