Nicolas Simon | Séverine Bagard

VISA POUR LA PRÉPA 2023-2024

PHYSIQUE-CHIMIE

MPSI · PCSI · MP2I
PTSI · TSI · BCPST · TPC

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085201-7

Table des matières

Outils

Outil

Les outils mathématiques développés dans les pages qui suivent sont présentés dans une version simplifiée à outrance, avec pour seul but d'offrir quelques axes de compréhension générale et quelques techniques utiles à la physique et à la chimie.

En particulier, les obligations préalables à l'exécution de tel ou tel calcul (domaine de définition, dérivabilité d'une fonction, conditions de signe…) seront régulièrement omises, en ce que notre but n'est pas de dresser une théorie exhaustive, mais un mode d'emploi pratique et aussi concis que possible.

On gardera en particulier à l'esprit que cette approche ne prétend en aucun cas se substituer aux merveilles de rigueur démonstrative que vous aurez loisir d'étudier auprès de nos ami·e·s mathématicien·ne·s.

Les outils présentés ci-après sont donc une aide mais leur lecture n'est pas un préalable indispensable. Vous trouverez en marge du cours ou en pied de page des exercices les outils auxquels vous référer si vous en éprouvez le besoin.

Outil 1 Calcul mental et approximations numériques

Intérêt

Un premier outil à maîtriser pour évoluer avec aisance dans les exercices de sciences physiques est le calcul mental. Celui-ci permet notamment de :

- Se dispenser de la calculatrice pour mener certaines applications numériques. L'usage abusif de la calculatrice s'accompagne en effet d'inconvénients non négligeables :
  - perte de temps ;
  - multiplication du risque d'erreur lors de la saisie des calculs (touche erronée, mal enfoncée ou au contraire enfoncée plusieurs fois par mégarde, oubli de parenthèses…).
- Résoudre certains exercices lorsque la calculatrice est interdite, ou que seul un ordre de grandeur est demandé par l'énoncé (dans ce second cas, même si la calculatrice est autorisée, tout gain de temps est le bienvenu, en particulier dans le cadre d'un concours).
- Déterminer l'ordre de grandeur d'un résultat intermédiaire afin d'en vérifier la crédibilité.
- Montrer à un jury d'oral que vous disposez d'une compétence dont il regrette souvent la raréfaction chez les étudiant·e·s.
- Réduire votre dépendance psychologique à cet instrument, et ce faisant vous permettre de garder la tête froide en cas d'imprévu (piles à plat, panne, question à brûle-pourpoint lors d'un oral…).

Axes de travail et de progression

Vous pouvez agir à plusieurs niveaux pour améliorer vos capacités dans ce domaine.

Connaître quelques résultats simples

- tables de multiplication ;
- inverses courants ; en se fondant sur la suite d'approximations suivantes :

$$2 \times 50 \approx 3 \times 33 \approx 4 \times 25 \approx 5 \times 20 \approx 6 \times 17 \approx 7 \times 14 \approx 8 \times 12 \approx 9 \times 11 \approx 100$$

On trouve aisément les résultats approchés suivants :

$\frac{1}{2} = 0{,}50$	$\frac{1}{3} \approx 0{,}33$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{5} = 0{,}20$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}17$	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{8} \approx 0{,}12$	$\frac{1}{9} \approx 0{,}11$

$\frac{1}{11} \approx 0{,}09$	$\frac{1}{12} \approx 0{,}08$	$\frac{1}{14} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{17} \approx 0{,}06$	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	$\frac{1}{25} = 0{,}04$	$\frac{1}{33} \approx 0{,}03$	$\frac{1}{50} = 0{,}02$

En outre, la fonction inverse étant strictement décroissante, on sait que si l'on divise par un nombre situé entre deux de ceux recensés ci-dessus, la valeur obtenue se situera entre leurs inverses respectifs. Par exemple on peut en première approximation envisager que :

$$12 < 13 < 14 \quad \Rightarrow \quad 0{,}08 \approx \frac{1}{12} > \frac{1}{13} > \frac{1}{14} \approx 0{,}07 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{13} \approx 0{,}075$$

Et de fait, en toute rigueur $13 \times 0{,}75 = 0{,}975$: cette approximation induit moins de 3 % d'erreur ; pour un calcul ouvertement approximatif, l'écart n'a rien de scandaleux.

Maîtriser les puissances de 10, en particulier les relations suivantes (valables pour toute puissance)

$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$	$\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$	$10^{-b} = \frac{1}{10^b}$	$\left(10^a\right)^b = 10^{a \times b}$

- Penser à utiliser les identités remarquables.

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- Idem pour les identités remarquables trigonométriques (*cf.* Outil 6 sur la trigonométrie).
- Décomposer les calculs complexes en calculs plus simples.
- Repérer un terme négligeable devant un autre dans une addition ou une soustraction.
- Connaître les approximations usuelles sur certaines fonctions et leur contexte de validité.

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta_{\text{rad}} \quad \text{dès lors que} \quad \theta \ll 1 \text{ rad} \approx 60°$$

$$(1+\varepsilon)^{\alpha} \approx 1+\alpha\times\varepsilon \qquad \text{dès lors que } \varepsilon \ll 1$$

$$\text{en particulier si } \alpha=-1 : \qquad \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$$

Et de manière plus générale :

$$f(1+\varepsilon) \approx f(1) + \left[f'(1)\right]\times\varepsilon \qquad \text{dès lors que } \varepsilon \ll 1$$

NB : *l'approximation ci-dessus se comprend aisément en partant de la définition de la dérivée de f au voisinage de $x=1$ (cf. Outil 2 sur les calculs différentiel et intégral). Vous apprendrez en CPGE à développer ce type de technique à des degrés plus élevés, appelés* ***développements limités****.*

- Reformuler une expression numérique sous forme plus simple.
- Vous astreindre à travailler cette compétence dès que l'occasion se présente (le cerveau est un muscle comme les autres : entraîné il gagne en puissance, négligé il fait du gras).

Exemples

Volume molaire des gaz dans les conditions ordinaires de température et de pression

L'expression de départ est : $V_m = \dfrac{RT}{P} = \dfrac{8{,}314 \text{ SI} \times 293 \text{ K}}{1{,}013.10^5 \text{ Pa}}$

On constate ici que R est un peu plus grand que 8, tandis que T est un peu plus petit que 300. Le produit des deux a donc de bonnes chances de nous donner un résultat de l'ordre de $3\times 8\times 10^2 = 24.10^2 = 2{,}4\times 10^3$ SI. Avec le dénominateur très proche de 10^5 Pa, le résultat final se situera donc autour de $2{,}4\times 10^{-2}$ m^3.mol^{-1}, soit encore 24 L.mol^{-1}.

Dans le cas présent, il se trouve que la valeur est précisément la bonne. Il s'agit clairement d'un coup de chance, mais aurions-nous commis une erreur de 10 ou même 20 %, que l'ordre de grandeur resterait respecté.

Valeur du champ de gravitationnel à 100 km au-dessus du niveau de la mer

L'expression de départ est :

$$g_T = G\times\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = 6{,}67.10^{-11} \text{ SI}\times\frac{5{,}98.10^{24} \text{ kg}}{\left(6{,}38.10^6 \text{ m}+1{,}00.10^5 \text{ m}\right)^2}$$

Dans un premier temps, on constate que l'altitude envisagée est faible devant le rayon terrestre : bien que les deux puissances aient de quoi impressionner à l'échelle humaine (10^7 m pour l'une, 10^5 m pour l'autre), il n'en demeure pas moins que l'altitude considérée est plus de 60 fois plus faible que le rayon terrestre R_T. Dans le cadre d'un calcul approché, il est donc licite de négliger h devant R_T, et l'on peut réduire le calcul à :

$$g_T = G\times\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \approx G\times\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67.10^{-11} \text{ SI}\times\frac{5{,}98.10^{24} \text{ kg}}{\left(6{,}38.10^6 \text{ m}\right)^2}$$

À partir de là, le calcul se résume à une affaire de puissances de 10, et de radicaux tous assez proches de 6.

Le produit des radicaux au numérateur sera donc voisin de 36, tout comme le carré du 6,38 figurant au dénominateur. Il ne reste donc plus qu'à effectuer la puissance de 10 :

$$\frac{10^{-11}\ \mathrm{SI}\times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{10^{12}\ \mathrm{m}^2}=\frac{10^{13}\,\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-2}}{10^{12}\ \mathrm{m}^2}=10\ \mathrm{m.s}^{-2}$$

La vraie valeur est cette fois de 9,81 m.s^{-2}. On constate une nouvelle fois que la valeur approchée est, au moins en ordre de grandeur, largement satisfaisante.

Vouloir obtenir précisément la valeur selon cette démarche de calcul approché serait d'un coupable optimisme. On peut cependant tout de même tirer une information supplémentaire liée au fait que la valeur du champ soit calculée en altitude. En effet, si nous reprenons l'égalité vue plus haut, nous pouvons écrire que :

$$g_T(h)=G\times\frac{M_T}{(R_T+h)^2}=\frac{GM_T}{R_T^2}\times\frac{1}{\left(1+\dfrac{h}{R_T}\right)^2}$$

$$=\frac{GM_T}{R_T^2}\times\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2}\approx\frac{GM_T}{R_T^2}\left(1-\frac{2h}{R_T}\right)=g_T(0)\left(1-\frac{2h}{R_T}\right)$$

On peut ainsi obtenir une approximation de la variation relative du champ de pesanteur à l'altitude h par rapport à sa valeur au niveau de la mer :

$$\frac{\Delta g_T}{g_T(0)}=\frac{|g_T(h)-g_T(0)|}{g_T(0)}=\frac{2h}{R_T}$$

Avec $h=100$ km et $R_T=6{,}38.10^3$ km, on trouve un rapport de l'ordre de :

$$\frac{2h}{R_T}\approx\frac{200}{6400}=\frac{1}{32}\approx\frac{1}{33}=0{,}03$$

On peut ainsi conclure que la variation de la valeur du champ de pesanteur terrestre consécutive à une élévation de 100 km au-dessus du niveau de la mer est de l'ordre de 3 %.

Une autre méthode serait de considérer que $\frac{1}{32}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{0{,}125}{4}\approx\frac{0{,}12}{4}+\frac{0{,}005}{4}$ $=0{,}03+0{,}00125=3{,}125\ \%$. Une fois encore, l'erreur commise est minime et l'approximation précédente est valide.

Valeur de la force électrique entre un proton et un électron dans un atome d'hydrogène

L'expression de départ est :

$$F_{\mathrm{e,p/e}}=k\times\frac{e^2}{r^2}=8{,}99.10^9\ \mathrm{SI}\times\frac{\left(1{,}602.10^{-19}\ \mathrm{C}\right)^2}{\left(0{,}50.10^{-10}\ \mathrm{m}\right)^2}$$

Ici encore, il peut être judicieux de traiter les puissances de 10 d'un côté, et les radicaux de l'autre. On constate par ailleurs que le calcul à effectuer engage le rapport de deux carrés, autrement dit le carré du rapport : il suffit de calculer $\frac{1{,}602.10^{-19}\ \text{C}}{0{,}50.10^{-10}\ \text{m}}$, puis de le porter au carré, et ensuite de multiplier le résultat obtenu par la valeur de la constante de Coulomb, k.

Dans le quotient évoqué ci-dessus, le rapport des puissances de 10 donne 10^{-9}, qui porté au carré donnera 10^{-18}. Pour ce qui est du rapport des radicaux, la division par 0,50 revient à une multiplication par 2, et le résultat sera donc de l'ordre de 3,2. Cette dernière valeur étant légèrement supérieure à 3, son carré sera légèrement supérieur à 9 et une approximation par 10 ne semble donc pas absurde (les plus averti·e·s auront peut-être même repéré un 32 caché, autrement dit une puissance de 2, dont le carré est 1024 ; autrement dit $3{,}2^2 = \left(\frac{32}{10}\right)^2 = \frac{32^2}{10^2} = \frac{1024}{100} = 10{,}24$). Le quotient des carrés serait donc de l'ordre de $10 \times 10^{-18} = 10^{-17}\ \text{C}^2.\text{m}^{-2}$. En approximant $8{,}99.10^9$ par 9.10^9, le résultat sera donc voisin de $9.10^9\ \text{SI} \times 10^{-17}\ \text{C}^2.\text{m}^{-2}$, soit finalement $9.10^{-8}\ \text{N}$.

Outil 2 Dérivation, intégration : bases, utilisation et interprétation

Nombre dérivé d'une fonction en une valeur particulière de sa variable

Pour commencer revenons aux fondamentaux de la dérivation, trop souvent ignorés ou mécompris par beaucoup d'étudiant.e.s. On appelle **nombre dérivé** $f'(x_0)$ d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'une valeur x_0 de sa variable, la valeur définie par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque : vous avez probablement vu en mathématiques une version où l'élément variable était réduit à l'écart *h* entre *x* et x_0 :

$$h = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

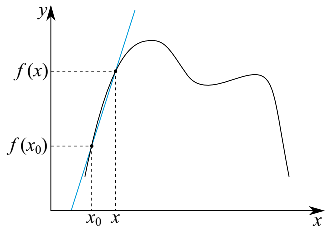
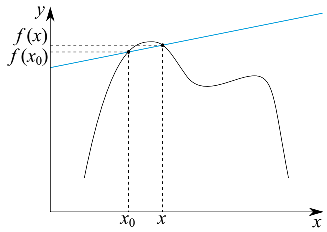
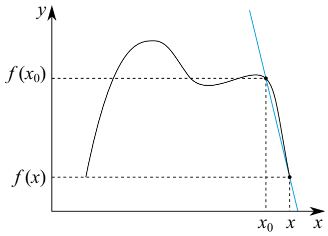
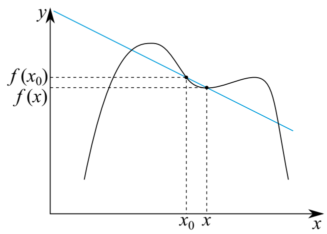
Les deux versions se valent, cependant nous utiliserons la première qui nous permet de mieux faire le lien avec la notion d'accroissement, ainsi qu'avec l'interprétation graphique (*cf.* plus loin). La seconde version ci-dessus est rappelée pour faire le lien avec ce que vous avez pu voir en cours de mathématiques au lycée.

Cette définition assez abstraite mérite quelques détails pour être bien comprise. Partons donc du **taux d'accroissement** ; il s'agit d'une fonction $T_{(f,x_0)}(x)$ associée à la fonction f au voisinage d'une certaine valeur x_0 de sa variable, et qui établit un rapport entre la variation de cette fonction au voisinage de cette valeur, et la variation correspondante de la variable en question :

$$T_{(f,x_0)}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0}$$

Dans la notation de droite, les « Δ » désignent des variations, et l'indice x_0 précise que ces variations sont prises au voisinage de la valeur x_0 de la variable x.

Le taux d'accroissement de la fonction $f(x)$ permet ainsi qualifier l'évolution globale de celle-ci entre x et x_0 :

<table>
<tr><td></td><td>$\left|T_{(f,x_0)}(x)\right|$ élevé
$\left|f(x)-f(x_0)\right|$ forte
pour $\left|x-x_0\right|$ donnée</td><td>$\left|T_{(f,x_0)}(x)\right|$ faible :
$\left|f(x)-f(x_0)\right|$ faible
pour $\left|x-x_0\right|$ donnée</td></tr>
<tr><td>$T_{(f,x_0)}(x)>0$:
$\left[f(x)-f(x_0)\right]$ et $(x-x_0)$ sont de même signe</td><td>Croissance rapide

</td><td>Croissance lente

</td></tr>
<tr><td>$T_{(f,x_0)}(x)<0$:
$\left[f(x)-f(x_0)\right]$ et $(x-x_0)$ sont de signes opposés</td><td>Décroissance rapide

</td><td>Décroissance lente

</td></tr>
</table>

Graphiquement, la valeur du taux d'accroissement correspond donc à la pente (ou « coefficient directeur » si l'on adopte la terminologie mathématique) de la droite passant par les points d'abscisses respectives x et x_0, de la courbe représentative de la fonction $f(x)$.

Notons également qu'en sciences physiques, l'objectif d'une fonction est en général de modéliser la dépendance d'une grandeur physique vis-à-vis d'un autre. Si par exemple on considère l'expression de la pression P exercée par un gaz parfait en fonction du volume V qui lui est offert, alors à quantité de matière et température constantes nous savons que (loi de Boyle-Mariotte) :

$$P=\frac{A}{V}$$

avec $A=\text{cte}$. P apparaît donc comme dépendant de V, et à ce titre on peut l'exprimer comme une fonction de V :

$$P(V)=\frac{A}{V}$$

Notons au passage que $P(V)$ est une fonction inverse ; en mathématiques, on noterait $f(x)=\dfrac{A}{x}$.

Dans ce cas le taux d'accroissement de $P(V)$ au voisinage d'une valeur particulière V_0 de la variable V aura pour expression :

$$T_{(P,V_0)}(V) = \frac{P(V) - P(V_0)}{V - V_0} = \left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right)_{V_0}$$

À ce niveau, il importe de bien noter 3 points essentiels :

1. Les sciences physiques jouant avec une multitude de grandeurs différentes, **toutes les fonctions ne s'appellent pas f, et toutes les variables ne s'appellent pas x**. Dans le cas ci-dessus, la fonction se nomme P et la variable V. Mais la mise en scène a beau avoir changé, la pièce de théâtre reste la même.
2. Une même grandeur physique dépend souvent de plusieurs variables. Nous savons par exemple que la pression exercée par le gaz dépend certes du volume qui lui est offert, mais également de la quantité de matière n de molécules qu'il contient, et de la température T à laquelle celles-ci se trouvent portées (nous avons considéré ces deux paramètres constants dans l'exemple précédent pour plus de simplicité, mais dans le cas général P dépend bien de 3 variables). Or toutes ces variables n'auront en général pas la même influence sur la grandeur étudiée (P est par exemple proportionnelle à n et à T avec des coefficients de proportionnalité différents l'un de l'autre, et inversement proportionnelle à V). Il importera donc de bien **préciser par rapport à quelle variable est étudié l'accroissement** (et donc par rapport à quelle variable est considéré le taux d'accroissement).
3. Dans le cadre des sciences physiques, les grandeurs dont les variations sont portées au numérateur et au dénominateur dans l'expression du taux d'accroissement sont des grandeurs physiques. À ce titre elles ont en général des unités, et en tant que rapport de celles-ci, **le taux d'accroissement a également une unité** ; plus précisément, cette unité sera :

$$\text{Unité}\left[T_{(f,x_0)}(x)\right] = \frac{\text{Unité}\left[\text{grandeur}\, f\right]}{\text{Unité}\left[\text{grandeur}\, x\right]} = \text{Unité}\left[\text{grandeur}\, f\right].\left(\text{Unité}\left[\text{grandeur}\, x\right]\right)^{-1}$$

Dans le cas de l'exemple traité ci-dessus (étude des variations de la pression exercée par un gaz en fonction du volume qui lui est offert), le taux d'accroissement s'exprimerait ainsi (en USI) en Pa (de variation de pression) par m^3(de variation de volume), ou de manière plus concise, en $Pa.m^{-3}$.

Le taux d'accroissement d'une fonction $f(x)$ par rapport à sa variable x mesure donc l'importance d'une variation de f consécutive à une variation de x, à travers le rapport de la première à la seconde.

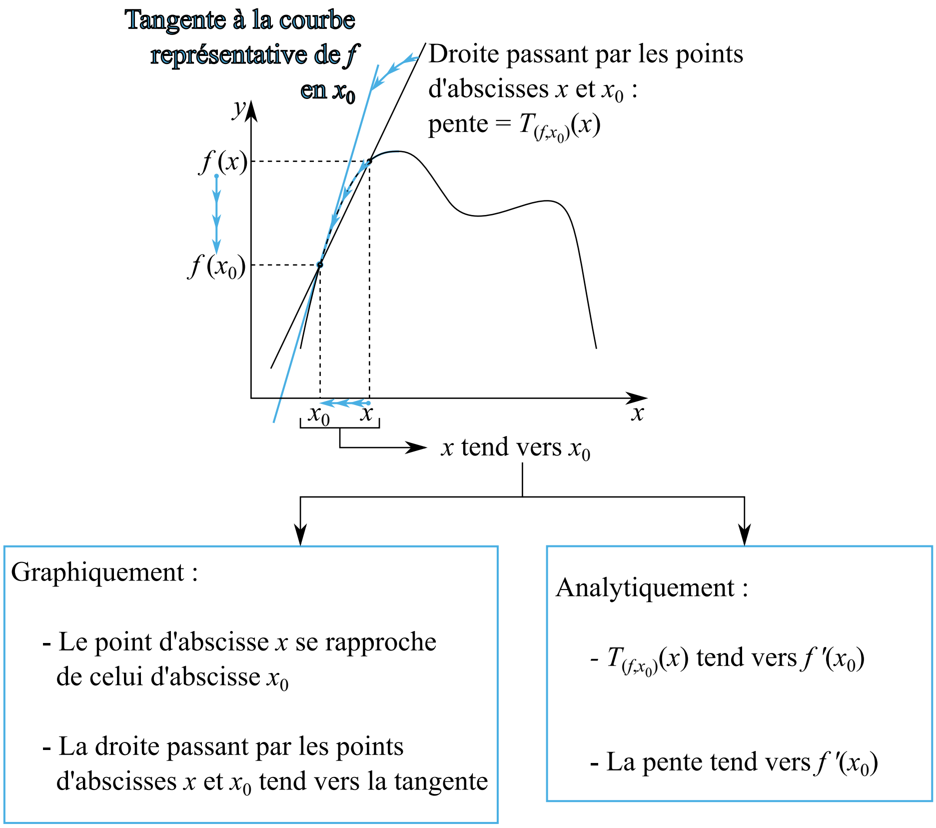
Une fois comprise la signification du taux d'accroissement, celle du nombre dérivé devient très simple puisque le nombre dérivé peut s'écrire :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} T_{(f,x_0)}(x)$$

Le nombre dérivé apparaît donc comme la **limite du taux d'accroissement lorsque l'intervalle de calcul tend vers 0** ($x \to x_0$ donc $(x - x_0) \to 0$). Elle représente donc la valeur du taux d'accroissement calculé sur un intervalle infiniment petit au voisinage de x_0, autrement dit sans aucun effet de moyennage sur le résultat obtenu (si la variable est par exemple le temps, on accède ainsi à la **valeur instantanée** du taux d'accroissement de la fonction).

C'est pour cette raison que :

- Tout comme le taux d'accroissement, **en sciences physiques la dérivée d'une fonction s'exprime avec une unité**.
- La dérivée d'une fonction en une valeur x_0 de sa variable s'identifie à la pente de la tangente à la courbe représentative de cette fonction, au niveau du point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$.



En effet, la droite passant par les points de la courbe représentative, d'abscisses respectives x et x_0, devient la tangente à cette courbe au point d'abscisse x_0, lorsque le second point (celui d'abscisse x) se rapproche indéfiniment du premier. Le taux d'accroissement dont nous avons vu qu'il pouvait être interprété comme la pente de la droite passant par ces deux points tend alors vers sa limite lorsque $x \to x_0$, qui est par définition la dérivée de la fonction considérée en x_0.

Il importe par ailleurs de noter qu'en physique, la dérivée d'une fonction $f(x)$ en une valeur x_0 de sa variable ne se notera pas simplement $f'\left(x_0\right)$, mais :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$$

Cette notation présente en effet plusieurs avantages dans le cadre qui est le nôtre :

- Les « d » sont supposés figurer de petites variations (version infinitésimale des « Δ » utilisés plus haut dans la définition du taux d'accroissement). Ils explicitent ainsi le fait que la dérivée est un taux d'accroissement, et ce faisant rappellent constamment le sens physique de cette grandeur.

- En détaillant les grandeurs dont on prend les variations respectives au numérateur et au dénominateur :
  - On évite le risque de confusion dans le cas où la grandeur étudiée dépend de plusieurs variables. Si par exemple on reprend l'étude de la pression exercée par un gaz, une notation du type « $P'(V,n,T)$ » ne permettrait pas de savoir par rapport à laquelle des trois variables V, n ou T on considère la dérivation. Vous apprendrez d'ailleurs en CPGE la notion de **dérivée partielle**, qui permettra justement de considérer tour à tour les dérivées d'une même fonction par rapport à chacune des variables dont elle dépend.
  - Du même coup, on connaît d'emblée l'unité de la dérivée en question.

Pour des dérivées successives (ci-dessous l'exemple de la dérivée seconde), on note :

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right]_{x=x_0}=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0}$$

Une exception malgré tout : la physique étudiant des phénomènes évolutifs, le paramètre temps est une variable extrêmement courante, et par rapport à laquelle on est souvent amené à dériver. Ce statut particulier fait que la dérivation par rapport au temps dispose du privilège d'une notation dédiée, la notation « f point » (prononcer « f point point » pour la dérivée seconde) :

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}=\dot{f}(t_0) \qquad \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t=t_0}=\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\right]_{t=t_0}=\dot{\left(\dot{f}\right)}(t_0)=\ddot{f}(t_0)$$

Fonction dérivée

Maintenant que nous avons donné un sens au nombre dérivé d'une fonction, reste la question de savoir comment il se calcule concrètement. Dans la définition du nombre dérivé donnée ci-dessus, on constate que celui-ci peut être vu comme une fonction de x_0. On peut ainsi passer de la notion de nombre dérivé d'une fonction, à celle de **fonction dérivée** de la fonction considérée.

Prenons l'exemple d'une fonction parabolique :

$$f(x)=x^2$$

Nous avons vu que pour calculer le nombre dérivé d'une fonction en une valeur x_0 de la variable x de cette fonction, il suffit de déterminer la limite de son taux d'accroissement lorsque $x \to x_0$. Commençons donc par exprimer ce taux d'accroissement :

$$T_{(f,x_0)}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

En explicitant $f(x)$ dans le cas présent, cette expression devient :

$$T_{(f,x_0)}(x)=\frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0}$$

Or nous pouvons réécrire le dénominateur comme :

$$x^2-{x_0}^2=(x+x_0)(x-x_0)$$

Le taux d'accroissement devient alors, après simplification par $(x - x_0)$:

$$T_{(f,x_0)}(x) = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = (x + x_0)$$

En cherchant sa limite lorsque $x \to x_0$, on obtient alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

f' apparaît ainsi comme une fonction de la variable x_0 ; plus précisément, en adoptant la notation générique x pour désigner la variable, la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est :

$$f'(x) = 2x$$

Dès lors pour connaître la valeur du nombre dérivé de $f(x)$ en une valeur particulière de sa variable (mettons par exemple en $x_0 = 3$), il suffit de :

1. Calculer la fonction dérivée de $f(x)$; soit donc ici $f'(x) = 2x$.
2. Prendre la valeur de cette fonction à la valeur qui nous intéresse ; soit donc ici :

$$x = 3 \qquad \Rightarrow \qquad f'(3) = 2 \times 3 = 6$$

Il n'est évidemment pas question de recalculer la limite du taux d'accroissement à chaque fois que nous souhaitons déterminer le nombre dérivé d'une fonction (d'autant que les fonctions auxquelles vous allez avoir affaire vont gagner en complexité à mesure que vous allez avancer). Quelques techniques permettent cependant de calculer assez vite la fonction dérivée d'une fonction quelconque.

Techniques de calcul de fonctions dérivées

Pour calculer la dérivée d'une fonction quelconque, on retiendra essentiellement les 2 points suivants :

1. Les dérivées des fonctions les plus courantes :

$f(x)$	x^α	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\ln x$	e^x
$f'(x)$	$\alpha x^{(\alpha-1)}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + (\tan x)^2$	$\frac{1}{x}$	e^x

Notons à ce sujet que la première des fonctions évoquées ci-dessus est valable quelle que soit la valeur de l'exposant α (positif, négatif, décimal…) ; en particulier :

α	-1	0	$1/2$	1	2
x^α	$\frac{1}{x}$	1	$\sqrt{x}$	x	x^2
$\alpha x^{(\alpha-1)}$	$(-1) \times x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	0	$\left(\frac{1}{2}\right) \times x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	1	$2x$

2. Les règles permettant de calculer la dérivée d'une fonction sophistiquée en décomposant celle-ci en fonctions plus simples, puis en s'appuyant sur les dérivées de ces fonctions simples :

$(k \times f)'$ $k = \text{cte}$	$(f+g)'$	$(f \times g)'(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$	$[f(g)]'$ également notée $(f \circ g)'$
$k \times (f')$	$f' + g'$	$f' \times g + f \times g'$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g' \times f'(g)$

Notons en particulier que dans le dernier cas, l'écriture en convention physicienne donne :

$$g' \times f'(g) = \frac{dg}{dx} \times \frac{df}{dg}$$

Évaluer le taux d'accroissement de $f[g(x)]$ par rapport à x apparaît donc spontanément comme la conjugaison du taux d'accroissement de f par rapport à g, et du taux d'accroissement de g par rapport à x, en suivant une simplification du type :

$$\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} = \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \times \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

La notation physicienne permet ainsi une nouvelle fois de mettre en évidence le sens physique d'une dérivée, et ce y compris à un niveau de complexité accrue.
Par ailleurs, en combinant les dérivées du type $(k \times f)'$, $(f+g)'$ et le fait que la dérivée d'une fonction constante est nulle, on obtient notamment la dérivée d'une fonction affine comme :

$$(ax+b)' = \underbrace{(ax)'}_{a} + \underbrace{(b)'}_{0} \qquad \Rightarrow \qquad (ax+b)' = a$$

Exemple

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

Et décomposons-la en une série de fonctions simples ; on peut par exemple écrire que :

$$f(x) = g[h(x)] \qquad \text{en posant} \qquad g(X) = Ke^X \qquad \text{et} \qquad h(x) = \left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5}\right)$$

Par ailleurs, nous pouvons également exprimer $h(x)$ sous la forme :

$$h(x) = \frac{i(x) \times j(x)}{k(x)} \qquad \text{avec} \qquad i(x) = x^2 \qquad j(x) = \sin x \qquad k(x) = 2x+5$$

La dérivée de $f(x)$ peut ainsi dans un premier temps s'écrire :

$$f'(x) = h'(x) \times g'[h(x)]$$

On voit que $g'[X] = Ke^X$ soit donc, appliquée à l'argument $X = h(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{2x+5}$:

$$g'[h(x)] = Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

Par ailleurs, $h(x)$ apparaît comme le quotient de la fonction $i(x) \times j(x)$ par la fonction $k(x)$; on en déduit que (nous supprimons la dépendance explicite en x pour plus de lisibilité) :

$$h' = \frac{(i \times j)' \times k - (i \times j) \times k'}{k^2}$$

Il ne nous reste plus qu'à développer la dérivée du produit $(i \times j)$:

$$(i \times j)' = (i' \times j) + (i \times j') \qquad \Rightarrow \qquad h' = \frac{\left[(i' \times j) + (i \times j')\right] \times k - (i \times j) \times k'}{k^2}$$

En explicitant les fonctions et leurs dérivées respectives, on trouve alors :

$$h'(x) = \frac{\left[2x \sin x + x^2 \cos x\right](2x+5) - x^2 \sin x \times 2}{(2x+5)^2}$$

Et finalement :

$$f'(x) = \frac{\left[2x \sin x + x^2 \cos x\right](2x+5) - 2x^2 \sin x}{(2x+5)^2} \times Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

En factorisant $\dfrac{x^2 \sin x}{2x+5}$ dans le premier terme, on obtient :

$$f'(x) = \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{2x+5}\right] \times \left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5}\right) \times Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

Ou encore :

$$f'(x) = K\left[\frac{2}{x}\left(\frac{x+5}{2x+5}\right) + \frac{1}{\tan x}\right]\left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5}\right)e^{\left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5}\right)}$$

Fonction primitive

Nous avons vu dans ce qui précède qu'une fonction $f(x)$ pouvait être dérivée, comment obtenir sa fonction dérivée $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$, et comment interpréter la valeur de cette dérivée pour une valeur x_0 de sa variable.

Cependant de nombreuses lois de la physique (en tête desquelles l'ineffable deuxième loi de Newton) modélisent des phénomènes en mettant en relation une grandeur mesurable, et la dérivée $F'(x)=f(x)$ d'une fonction $F(x)$ inconnue. Pour identifier la fonction $F(x)$, il est donc nécessaire non plus de dériver la grandeur mesurable, mais au contraire de **trouver une fonction $F(x)$ qui, une fois dérivée, donne la fonction $f(x)$ en question**.

On appelle alors **fonction primitive** $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ une fonction qui, une fois dérivée, donne la fonction $f(x)$ en question.

Remarques :

- On parle de dériver une fonction lorsque l'on calcule sa fonction dérivée. Il n'existe pas de verbe équivalent pour l'opération réciproque ; tout au mieux parlera-t-on de « calculer une primitive » (même si le néologisme « primitiver » est parfois utilisé dans certains cercles scientifiques interlopes).
- La dérivée d'une fonction constante étant nulle, il s'ensuit que la primitive d'une fonction est toujours définie à une constante additive près :

$$G(x)=F(x)+K \qquad \Leftrightarrow \qquad G'(x)=F'(x)$$

  À toute fonction on peut donc associer une infinité de primitives ne différant les unes des autres que par une constante additive (notons que nous avons jusqu'ici évoqué la question d'exhiber UNE fonction $F(x)$ dont la dérivée $F'(x)$ était la fonction $f(x)$ de départ, et non LA fonction $F(x)$ affichant cette propriété).

  Aussi trouvera-t-on très souvent la primitive d'une fonction définie par une expression analytique suivie d'un sibyllin « $(+\mathrm{cte})$ ». Nous verrons dans le corps de l'ouvrage, sur des exemples concrets, comment peut être fixée la valeur de cette constante, cependant dans les exemples qui suivent nous omettrons en général cette précision pour plus de légèreté.

- De manière générique, on note le fait que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sous la forme :

$$F'(x)=\frac{dF}{dx}=f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad dF=f(x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x)=\int f(x)dx$$

  Le symbole « $\int$ », qui donc désigne le fait que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, est en réalité l'ancienne représentation de la lettre « S ». Nous verrons en effet plus loin que la primitive peut s'interpréter comme une somme continue de termes (un équivalent du « $\sum$ » employé pour les sommes discrètes, donc, mais pour une fonction $f(x)$ dépendant d'une variable x variant continument, et non une suite u_n dépendant d'un indice n variant par saut de 1).

Le processus de calcul est donc l'exact inverse du processus de dérivation, et en renversant les rôles dans le tableau des dérivées donné plus haut on trouve rapidement les primitives suivantes :

$f(x)$	x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	a	$ax+b$	$\sin x$	$\cos x$	e^x
$F(x)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln x$	$ax+b$	$a\frac{x^2}{2}+bx+c$	$-\cos x$	$\sin x$	e^x

NB : *nous n'avons pas précisé à chaque fois que ces primitives étaient définies à une constante additive près, excepté pour le cas d'une fonction constante (dont la primitive affiche ici un constante additive +b) et pour la fonction affine (+c). Ceci pour mettre en exergue tous les facteurs du polynôme constituant la primitive obtenue.*

Comme précédemment, il est bon de connaître (ou à défaut de savoir retrouver rapidement) les primitives pour quelques valeurs particulières de α dans le cas des fonctions puissance :

α	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
x^α	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	1	$\sqrt{x}$	x	x^2
$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}$	x	$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3$	$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{x^3}{3}$

Il est également utile de savoir reconnaître quelques formes particulières :

$f'\times f=\dfrac{1}{2}\left(f^2\right)'$	$\dfrac{f'}{f}=\left[\ln\lvert f\rvert\right]'$	$f'\times g=\left(f\times g\right)'-f\times g'$

Les deux dernières formes permettent notamment d'identifier les primitives suivantes :

- Rapport d'une dérivée et de la fonction associée :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\frac{\left[\cos(x)\right]'}{\cos(x)}=\left[-\ln\lvert\cos x\rvert\right]'$$

$$\Rightarrow \qquad \int\tan(x)\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert \qquad (+\text{cte})$$

- Produit d'une dérivée et d'une fonction quelconque :

$$\ln(x)=(x)'\times\ln(x)=\left[x\times\ln(x)\right]'-x\times\underbrace{\left[\ln(x)\right]'}_{\frac{1}{x}}=\left[x\times\ln(x)\right]'-\underbrace{1}_{(x)'}=\left[x\times\ln(x)-x\right]'$$

$$\Rightarrow \qquad \int\ln(x)\,dx=x\ln(x)-x \qquad (+\text{cte})$$

Intégrale d'une fonction entre deux valeurs de sa variable

Très souvent, en sciences physiques, la primitive nous intéresse moins que la variation de cette primitive entre deux valeurs de sa variable.

Or comme nous l'avons vu plus haut :

$$F'(x)=\frac{dF}{dx}=f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad dF=f(x)dx$$

La variation infinitésimale dF de $F(x)$ lorsque x varie de dx au voisinage d'une valeur x_0 de la variable x peut donc se calculer comme le produit de la dérivée $F'(x)$ en cette valeur (soit donc $F'(x_0)=f(x_0)$), par la variation infinitésimale dx.

À partir de là, pour calculer une variation macroscopique ΔF de $F(x)$ sur un intervalle macroscopique $\left[x_1 \, ; \, x_2\right]$ de valeurs de x, nous constatons qu'il suffit d'effectuer la somme d'une successions de termes $f(x)dx$ avec x variant continument de x_1 à x_2 :

Début	Fin	Variation
x_1	x_1+dx	$dF=F(x_1+dx)-F(x_1)=f(x_1)dx$
x_1+dx	x_1+2dx	$dF=F(x_1+2dx)-F(x_1+dx)=f(x_1+dx)dx$
x_1+2dx	x_1+3dx	$dF=F(x_1+3dx)-F(x_1+2dx)=f(x_1+2dx)dx$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_2-2dx	x_2-dx	$dF=F(x_2-dx)-F(x_2-2dx)=f(x_2-2dx)dx$
x_2-dx	x_2	$dF=F(x_2)-F(x_2-dx)=f(x_2-dx)dx$

On constate alors que la variation $\Delta F=F(x_2)-F(x_1)$ s'obtient simplement en effectuant la somme de toutes les variations infinitésimales dF entre les bornes x_1 et x_2, (autrement dit la somme des produits $f(x)dx$ pour x variant entre x_1 et x_2), les termes se simplifiant deux à deux à l'exception de $F(x_1)$ et $F(x_2)$. Comme nous l'avons déjà évoqué, c'est précisément cette sommation que représente le symbole « $\int$ ».

On dit alors que la variation $\Delta F=F(x_2)-F(x_1)$ de la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$ se calcule comme **l'intégrale de $f(x)$ entre les bornes x_1 et x_2**, et l'on note :

$$\Delta F=F(x_2)-F(x_1)=\left[F(x)\right]_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Remarque : nous avons vu que la primitive d'une fonction était définie à une constante additive près. Cependant le calcul d'une intégrale reposant sur la différence de cette fonction entre deux valeurs de sa variable, cette constante figurera dans chacun des termes de la différence, et se simplifiera donc automatiquement :

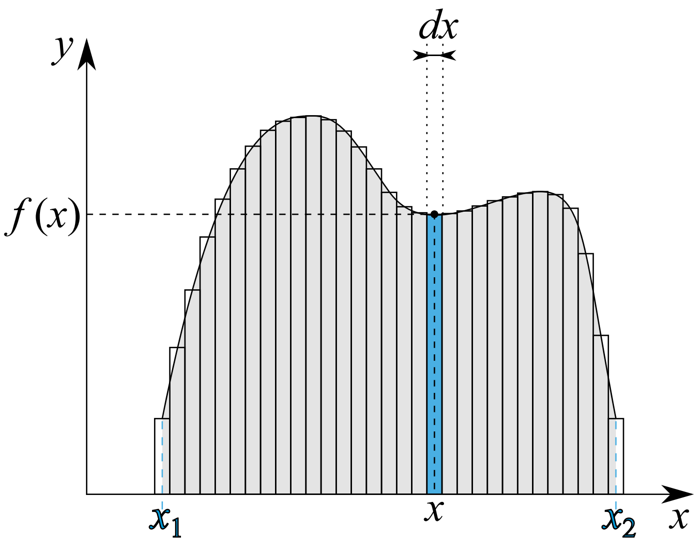
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\left[F(x)+k\right]_{x_1}^{x_2}=\left[F(x_2)+k\right]-\left[F(x_1)+k\right]=F(x_2)-F(x_1)$$

Voici pourquoi la constante d'intégration n'est en général pas une préoccupation centrale dans les problèmes abordés : c'est le plus souvent la variation de la primitive entre deux valeurs de sa variable qui nous intéressera, or cette variation sera la même quelle que soit la constante d'intégration.

Il est également intéressant de noter que l'intégrale d'une fonction entre deux valeurs de sa variable peut s'interpréter graphiquement comme l'aire algébrique comprise entre 4 frontières :

- celle définie par la borne inférieure de l'intégrale ;
- celle définie par la borne supérieure de l'intégrale ;
- celle définie par la courbe représentative de la fonction intégrée ;
- celle définie par l'axe des abscisses.

En effet, dans le travail de sommation évoqué plus haut, chaque terme $f(x)dx$ peut être vu comme l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx, autrement dit un rectangle de largeur infinitésimal et dont la hauteur serait précisément la longueur algébrique entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de $f(x)$.



Le caractère algébrique évoqué pour cette aire provient du fait que toute aire située sous l'axe des abscisses sera comptée négativement, puisque dans ce cas $f(x) < 0$.

Outil 3 Logarithmes et exponentielles

Puissances de 10 et logarithme décimal

Il faudrait un ouvrage entier pour décrire toutes les merveilles que permettent les fonctions logarithmiques. Cependant leur usage en sciences physiques se résume (du moins au niveau que nous nous proposons de traiter ici) toujours aux mêmes propriétés, que nous allons détailler et qui s'appuient toujours peu ou prou sur l'idée d'une **fonction transformant des produits en somme**.

Pour y voir clair, nous allons partir des fonctions réciproques des fonctions logarithmiques, qui sont les fonctions exponentielles. On appelle ainsi toute fonction dans laquelle la variable est portée en exposant d'un nombre strictement supérieur à 1. La fonction de type exponentielle qui vous est vraisemblablement la plus familière (parce que c'est celle que vous connaissez depuis le plus longtemps) est la puissance de 10. Nous avons vu à la section précédente que les puissances de 10 possèdent entre autres propriétés :

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$$

Ainsi, si l'on envisage la fonction logarithme décimal comme fonction réciproque de la puissance de 10 :

$$\log\left(10^x\right) = 10^{\log x} = x$$

il vient immédiatement :

$$\log\left(10^a \times 10^b\right) = \log\left(10^{a+b}\right) = a + b = \log\left(10^a\right) + \log\left(10^b\right) \quad \text{puisque}$$

$$a = \log\left(10^a\right) \text{ et } b = \log\left(10^b\right)$$

En notant alors par exemple $x = 10^a$ et $y = 10^b$, l'égalité ci-dessus se résume à :

$$\log(x \times y) = \log(x) + \log(y)$$

Nous constatons ainsi que, la fonction exponentielle d'une somme donnant le produit des exponentielles des termes de cette somme, il apparaît spontanément que la fonction logarithme d'un produit est égale à la somme des logarithmes des termes de ce produit. On peut déduire (au moins du point de vue mnémotechnique) toutes les propriétés qui suivent, sur la seule base de cette propriété :

$$\log\left(x^{\alpha}\right) = \alpha \times \log(x) \qquad \text{en particulier si } \alpha = -1 : \qquad \log\left(x^{-1}\right) = \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \log(x) - \log(y) \qquad \text{en particulier si } x = y : \qquad \log 1 = 0$$

De manière générale, on retiendra que toute fonction logarithmique :

- est définie uniquement sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;
- est strictement croissante sur cet intervalle ;
- appliquée à un produit de termes, donne la somme des logarithmes de ces termes ;
- est la fonction réciproque d'une exponentielle particulière, appelée **base** du logarithme en question ; en particulier, le logarithme dit décimal (ou logarithme en base 10, usuellement noté « $\log x$ ») est la fonction réciproque de la fonction 10^x.

Application : les échelles logarithmiques

Comme nous venons de le dire, le logarithme décimal est peut-être le plus intuitif parce que basé sur le nombre dix qui nous est intrinsèquement familier (probablement du fait de nos dix doigts, lesquels ont motivé l'émergence du système décimal).

Vous trouverez souvent cette fonction en sciences physiques pour définir des **échelles logarithmiques**, particulièrement pratiques lorsque la progression d'une grandeur physique ne se manifeste de manière sensible, que lorsque l'évolution de cette grandeur suit une logique multiplicative et non additive.

Exemples :

- **Potentiel hydrogène :** l'évolution de la valeur c de la concentration en ions oxonium dans une solution, n'a que peu d'effet sur les propriétés de cette solution lorsque l'on ajoute cette valeur à elle-même : on n'observe guère de changement lorsque la concentration en question passe de c à $2c$ puis de $2c$ à $3c$…

  Une évolution significative se manifeste en revanche lorsque l'on passe de c à $10c$ puis de $10c$ à $100c$…

  Le problème étant que, en particulier sur le plan graphique, la comparaison de concentrations différant les unes des autres de plusieurs ordres de grandeur pose problème : si l'échelle est adaptée aux petites valeurs, les grandes vont rapidement réclamer un graphe cyclopéen, tandis que si elle est adaptée aux grandes valeurs, les petites devront être observées au microscope.

On fait donc le choix de travailler non avec les valeurs des concentrations proprement dites, mais avec le logarithme de ces valeurs, exprimées en mol.L^{-1}. Comme du reste les valeurs de ces concentrations sont souvent inférieures à 1, les logarithmes correspondants sont inférieurs à 0 et l'on ajoute un signe « – » pour que les valeurs de cette nouvelle échelle, désormais appelée « pH », soient positives :

$$\mathbf{pH} = -\mathbf{log}\left(\frac{\left[\mathrm{H_3O^+}\right]}{c_{\mathrm{ref}}}\right) \qquad \text{avec } c_{\mathrm{ref}} = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

- **Absorbance :** de même, l'évolution de l'absorption de la lumière par une solution colorée est sensible uniquement lorsque la concentration de cette solution en l'espèce qui lui confère sa couleur suit une loi exponentielle. Le même problème se pose pour mettre les différentes valeurs sur une même échelle de représentation ; on définit donc l'***absorbance*** $\boldsymbol{A_\lambda}$ d'une solution à la longueur d'onde λ comme le logarithme du rapport entre intensité lumineuse incidente et intensité lumineuse transmise :

$$A_{(\lambda)} = \mathbf{log}\left[\frac{I_{\mathrm{i}(\lambda)}}{I_{\mathrm{t}(\lambda)}}\right]$$

On constate ainsi que la valeur de l'absorbance correspond à la puissance de 10 par laquelle a été divisée l'intensité incidente lors de sa traversée de l'échantillon de solution :

Valeur de A	0	1	2	3
Fraction de $\frac{I_{\mathrm{t}(\lambda)}}{I_{\mathrm{i}(\lambda)}}$ lumière transmise	1 $\left(1/10^0 = 100\%\right)$	0,1 $\left(1/10^1 = 10\%\right)$	0,01 $\left(1/10^2 = 1\%\right)$	0,001 $\left(1/10^3 = 0{,}1\%\right)$

- **Niveau sonore :** comme pour les deux exemples précédents, la sensation auditive n'évolue sensiblement que lorsque la puissance véhiculée par l'onde acoustique varie selon une loi exponentielle. On définit ainsi le **niveau d'intensité sonore L_{dB}** comme :

$$L_{\mathrm{dB}} = 10 \times \mathbf{log}\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{avec } I_0 = 10^{-12}\ \text{W.m}^{-2},\ \text{seuil d'audibilité}$$

On note ici que le facteur 10 permet de faire en sorte qu'un facteur ×10 sur l'intensité sonore (puissance échangée par unité de surface), qui donc entraîne une variation de +1 sur le logarithme, se traduise par un facteur +10 dB sur le niveau d'intensité sonore.

Logarithme népérien et nombre *e*

Les propriétés énoncées à la section précédente sur le logarithme décimal sont générales à tous les logarithmes, en remplaçant à chaque fois la valeur 10 par la base du logarithme considéré, c'est-à-dire le nombre engagé dans l'exponentielle dont il constitue la fonction réciproque :

$$\log_B\left(B^x\right) = B^{\log_B(x)} = x$$

Reste cependant une propriété que nous n'avons pas abordée, à savoir la dérivée.

Or si l'on s'intéresse à la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$, on peut démontrer qu'elle est elle-même la dérivée d'une fonction logarithmique mais avec une base très particulière à savoir un nombre noté e. Ce nombre vaut environ 2,7 (pour connaître davantage de décimales, calculez e^1 sur votre calculatrice) et possède de nombreuses propriétés remarquables, qui lui valent une place sensiblement équivalente à π au panthéon des monstres sacrés des mathématiques.

Le logarithme dont ce nombre constitue la base est appelé **logarithme népérien** (adjectif construit à partir du nom du mathématicien qui le mit en évidence au XVIe siècle), ou encore **logarithme naturel** ; on le note couramment $\ln(x)$.

De manière générale, il est intéressant de noter que les valeurs des logarithmes d'un même nombre sont liés par l'égalité suivante :

$$x=A^{\log_A(x)}=B^{\log_B(x)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\log_A\left[A^{\log_A(x)}\right]}_{\log_A(x)}=\underbrace{\log_A\left[B^{\log_B(x)}\right]}_{\log_B(x)\times\log_A(B)}$$

$$\Rightarrow \quad \log_B(x)=\frac{\log_A(x)}{\log_A(B)}$$

Notons au passage qu'en intervertissant les deux bases, nous obtenons l'égalité :

$$\log_A(x)=\frac{\log_B(x)}{\log_B(A)} \quad \Rightarrow \quad \log_A(B)=\frac{1}{\log_B(A)} \quad \text{puisque}$$

$$\log_A(x)=\log_B(x)\times\log_A(B)$$

Mais revenons-en à la dérivée d'une fonction logarithme quelconque. En prenant pour base $B=e$ dans la première égalité vue ci-dessus, nous pouvons écrire que :

$$\boldsymbol{\log_A(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(A)}}$$

Partant de là, nous en déduisons en dérivant les deux termes de l'égalité ci-dessus que :

$$\left[\log_A(x)\right]'=\left[\frac{\ln(x)}{\ln(A)}\right]'=\frac{1}{\ln(A)}\times\underbrace{\left[\ln(x)\right]'}_{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\left[\log_A(x)\right]'=\frac{1}{\ln(A)}\times\frac{1}{x}}$$

On constate ainsi que la dérivée de toute fonction logarithmique est une fonction inverse, mais que seul le logarithme népérien (correspondant donc à la base $A=e$, d'où $\ln(A)=\ln(e)=1$) donne par dérivation la fonction inverse $\dfrac{1}{x}$ (d'où cette idée de logarithme « naturel », qui sert de référence et à partir duquel on tend à exprimer tous les autres).

On montre de même que :

$$A^x=e^{\ln\left(A^x\right)}=e^{x\ln A} \quad \Leftrightarrow \quad \left(A^x\right)'=\underbrace{\left(x\ln A\right)'}_{\ln A}\times\underbrace{\left[e^X\right]'_{X=x\ln A}}_{e^{x\ln A}=A^x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\left(A^x\right)'=(\ln A)\times A^x}$$

Vous disposez donc désormais de deux nouvelles fonctions dérivées à accrocher à votre tableau de chasse.

Concrètement, les fonctions logarithmiques que vous utiliserez seront à 99 % le logarithme décimal et le logarithme népérien (peut-être aurez-vous également quelque opportunité de travailler avec un logarithme en base 2, en particulier si vous souhaitez étudier des progressions géométriques à travers le doublement d'une population plutôt que son décuplement par exemple). Aussi est-il indispensable de se familiariser avec les propriétés de ces deux fonctions particulières.

Interprétation graphique

La courbe représentative d'une fonction exponentielle présente une évolution verticale extrêmement rapide, puisque sa valeur progresse géométriquement à mesure que sa variable croît. Ainsi à toute **addition horizontale** (selon l'axe des abscisses x) correspond une **multiplication verticale**. Par exemple pour la fonction $f(x)=10^x$, à chaque fois que x augmente d'une unité, la valeur de $f(x)$ est multipliée par 10.

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{10^x}$	1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Notons que vous rencontrerez fréquemment des fonctions exponentielles dont l'argument sera une fonction décroissante de x ; par exemple : $g(x)=10^{-x}$. Dans ce cas la décroissance est aussi rapide que la croissance vue précédemment.

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{10^{-x}}$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

Par ailleurs, les fonctions logarithmiques associées vérifieront la propriété réciproque : il sera nécessaire de multiplier la valeur de l'abscisse par un facteur donné pour obtenir un bonus additif sur l'ordonnée.

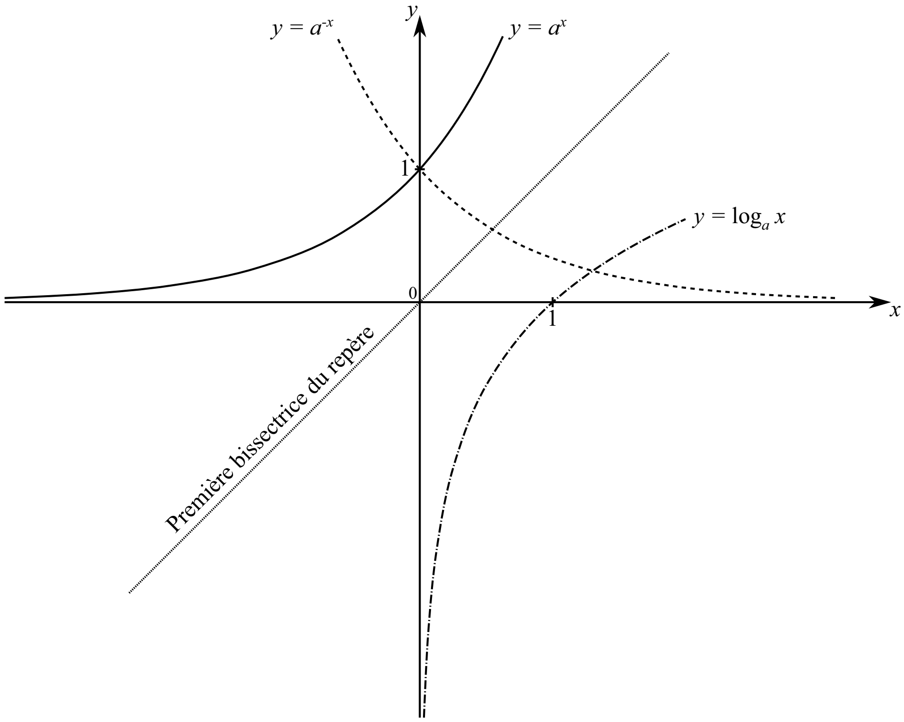
x	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
$\log(x)$	–3	–2	–1	0	1	2	3

La croissance ira donc en s'atténuant, aussi vite qu'elle explose dans le cas de la fonction exponentielle. Graphiquement, cette propriété se manifeste de la même manière que pour tout couple de courbes représentatives associées respectivement à une fonction et à sa fonction réciproque : chacune est symétrique de l'autre par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation $y=x$). Ces considérations sont illustrées sur la figure à la page suivante.

Vous rencontrerez par ailleurs souvent des grandeurs dont l'évolution temporelle peut être modélisée par une fonction du type :

$$f(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec τ une constante de temps dépendant des paramètres du problème (*cf.* Outil 5 sur les équations différentielles). On retrouve alors les propriétés évoquées plus haut, et l'on peut caractériser le rythme de décroissance en termes de nombre de τ franchis par la variable t.



t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$f(t)$	K	$\frac{37}{100}K$	$\frac{14}{100}K$	$\frac{5{,}0}{100}K$	$\frac{1{,}8}{100}K$	$\frac{0{,}67}{100}K < \frac{1}{100}K$

Deux critères essentiels de ce tableau sont à retenir :

- Dans une exponentielle naturelle décroissante, toute augmentation de l'argument égale à 1 correspond à une chute d'environ 63 % par rapport à la valeur précédente. Par la suite, si par exemple on augmente encore l'argument de 1, on retire encore 63 % des 37 % qui restaient. Le facteur multiplicatif sur la valeur initiale passe alors à $\frac{37}{100} \times \frac{37}{100} \approx \frac{14}{100}$, et ainsi de suite.
- **Ce facteur est indépendant de la valeur à partir de laquelle est calculée la décroissance.**
- Le critère de **passage sous la barre des 1 %** sera très souvent pris comme référence d'une grandeur devenue négligeable devant sa valeur de départ, et l'on retiendra donc qu'il est atteint (et même dépassé) pour une valeur de $\mathbf{5\tau}$.

Vous travaillerez en outre souvent avec un autre paramètre caractérisant le rythme d'évolution, à savoir la durée au bout de laquelle l'exponentielle a franchi 50 % de l'intervalle la séparant de sa valeur asymptotique. Ce paramètre est, selon le contexte, appelé **demi-vie**, durée de **demi-charge**, **temps de demi-réaction**… et généralement noté $t_{1/2}$. Il s'exprime simplement à partir de τ en exprimant le fait que :

$$f(t = t_{1/2}) = \frac{K}{2} \quad \Leftrightarrow \quad Ke^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} = \frac{K}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t_{1/2} = \tau \ln 2$$