

Aziz El Kacimi Alaoui

Variable complexe et surfaces riemanniennes

Cours et exercices résolus



TABLE DES MATIÈRES

VARIABLE COMPLEXE

I. NOMBRES COMPLEXES

1. L'aspect algébrique	11
2. L'aspect géométrique	13
3. Propriétés et calculs	15
Exercices résolus	19

II. SÉRIES ENTIÈRES

1. Rappels sur les séries numériques	25
2. Séries entières	27
3. Exponentielle et logarithme complexes	29
4. Fonctions analytiques	32
Exercices résolus	35

III. FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Préliminaires et premières définitions	41
2. Intégration complexe	44
Exercices résolus	49

IV. FORMULE ET THÉORÈME DE CAUCHY

1. Homotopie des chemins	53
2. Théorème de Cauchy	55
3. Formule de Cauchy	57
4. Analyticité des fonctions holomorphes	59
Exercices résolus	62

V. HOMOGRAPHIE

1. Définitions et notations	69
2. Étude de l'homographie	70
3. Le groupe $PSL(2, \mathbb{C})$	71
4. Le birapport	73
5. Étude géométrique d'un exemple	74
6. Biholomorphismes	76
Exercices résolus	79

VI. SINGULARITÉS ET RÉSIDUS

1. Séries de Laurent	89
2. Singularités	90
3. Résidus	93
4. Calcul d'intégrales	95
5. Principe de l'argument	98
Exercices résolus	102

COMPLÉMENT 1 : Le théorème fondamental de l'algèbre	109
---	-----

COMPLÉMENT 2 : Regard sur quelques ouverts de \mathbb{C}	111
--	-----

SURFACES RIEMANNIENNES
VII. SURFACES DIFFÉRENTIABLES

1. Définitions et exemples	119
2. Applications différentiables	123
3. Espace tangent	124
4. Formes différentielles	126
5. Actions de groupes	129
6. Courbes complexes	132

VIII. SURFACES RIEMANNIENNES

1. Métriques riemanniennes	137
2. Exemples de surfaces riemanniennes	139

IX. COURBURE

1. Connexions	143
2. Courbure	146
3. Exemples de calcul	147

X. GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE DES SURFACES

1. Groupe des isométries de \mathbb{H}	151
2. Géodésiques de \mathbb{H}	153
3. Surfaces hyperboliques	155

EXERCICES EN VRAC
COMPLÉMENT 3 : Groupe fondamental et revêtements

1. Homotopie	163
2. Groupe fondamental	164
3. Revêtements	167
4. Groupe fondamental d'un espace d'orbites	169
5. Quelques exemples.	171

COMPLÉMENT 4 : Quelques notions utiles en théorie des groupes

1. La notion de section	175
2. Extentions de groupes	177
3. Divers	178
4. Exemples d'extensions	179
5. Groupes résolubles, groupes nilpotents	182
6. Générateurs et relations	183

COMPLÉMENT 5 : Courbes elliptiques

1. Réseaux dans \mathbb{C}	187
2. Le tore différentiable	188
3. Courbes elliptiques	190
4. Fonctions elliptiques	191

RÉFÉRENCES
INDEX ALPHABÉTIQUE