CHAPITRE 1

Matrices

Dans ce chapitre, nous définissons des règles de calcul sur les matrices. Ensuite, après avoir défini la notion de matrice échelonnée nous calculerons le rang des matrices. Lorsque cela a un sens, nous donnerons des méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice.

Dans tout ce chapitre, nous noterons $\mathbb{K}$ le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Définitions et règles de calcul

Définition 1.1. *Soient n et p deux entiers strictement positifs. Un tableau rectangulaire, à n lignes et à p colonnes, constitué d'éléments de $\mathbb{K}$ est appelé* matrice *$n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On utilisera les notations suivantes :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ ou } \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ ou } \left(a_{ij}\right)_{i,j}$$

Les a_{ij} s'appellent les coefficients *de la matrice. Étant donné un coefficient le premier indice est celui de la ligne et le second est celui de la colonne ; le coefficient $a_{\alpha\beta}$ se trouve donc à l'intersection de la α-ième ligne et la β-ième colonne.*

L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si $p = n$.

Exemples 1.2. *Voici quelques exemples simples de matrices.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 & -3i \\ 0 & \frac{21}{7} & \pi \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 71 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_1(\mathbb{C}).$$

Définition 1.3. *Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et les coefficients de chaque matrice sont égaux lorsqu'ils ont des indices de ligne et de colonne identiques.*

C'est-à-dire que $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice de $\mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{i,j}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont égales si et seulement si

$$l = n,\ m = p \text{ et } a_{ij} = b_{ij} \text{ pour tous les indices } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p.$$

Exemples 1.4. *Bien que beaucoup de leurs coefficients soient égaux, les matrices suivantes ne sont pas égales.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières matrices sont de même taille mais sont différentes car les coefficients situés sur la première ligne et la seconde colonne, à savoir 2 *et* 3*, ne sont pas égaux.*

Les deux dernières matrices ne sont pas égales car elles n'ont pas la même taille.

Dans la suite nous utiliserons les termes suivants

Définition 1.5.

— *Une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est appelée* matrice carrée.

— *les coefficients* a_{ii} *d'une matrice carrée s'appellent les* coefficients diagonaux*, et une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont les coefficients diagonaux est appelée* matrice diagonale*,*

— *une matrice carrée* $A = (a_{ij})_{i,j}$ *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$ *est appelée* matrice triangulaire supérieure*, si par contre* $a_{ij} = 0$ *lorsque* $i < j$ *alors* A *est appelée* matrice triangulaire inférieure*,*

— *les matrices de* $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$*, avec* $p > 1$*, sont appelées* matrices lignes *; et les matrices de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, avec* $n > 1$ *sont appelées* matrices colonnes.

Exemples 1.6. *Voici une matrice carrée* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

une matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et une matrice triangulaire inférieure $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 1.7. *Étant donnée une matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la i-ième ligne de A est donnée par la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_{i\,1} & \dots & a_{i\,p} \end{pmatrix}$ et la j-ième colonne de A est donnée par la matrice colonne* $\begin{pmatrix} a_{1\,j} \\ \vdots \\ a_{n\,j} \end{pmatrix}$.

Étant donnés deux entiers n et p, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée *matrice nulle*, on la notera 0 sans considération de taille. De même la matrice diagonale[1] de taille n dont tous les coefficient diagonaux sont égaux à 1 est appelée *matrice identité*, on notera I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Nous allons maintenant définir des règles de calculs sur les ensembles de matrices.

Définition 1.8. ***Produit d'une matrice par une constante***
Si λ est un élément de $\mathbb{K}$ et $A = (a_{ij})_{i,j}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on définit la matrice λA de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i,j}.$$

Définition 1.9. ***Somme de deux matrices***
Si $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j}$ sont deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on définit la matrice somme $A + B$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Exemples 1.10. *Par exemple $0 + 3\,I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, par contre $I_2 - 2\,I_3$ n'est pas définie du fait que les deux matrices à additionner n'ont pas la même taille.*

Voici un exemple détaillé

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 & 0+0 & 0+1 \\ 1+0 & 0+1 & 0+0 & 0+0 \\ 1+1 & 2+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1-1 & 3-3 & 3-3 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 1.11. ***Produit de deux matrices***

— *Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le produit de A par B, noté AB est l'élément[2] $a_1b_1 + \cdots + a_pb_p$ de $\mathbb{K}$.*

— *Si A est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B est une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, le produit AB de A par B est la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont la i-ème ligne est le produit de la i-ème ligne de A par B.*

1. Toutes les matrices diagonales sont carrées !
2. Ou la matrice $(a_1b_1 + \cdots + a_pb_p)$ de $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$.

— *Soient A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la matrice AB, produit de A par B, est la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est le produit de A par la j-ème colonne de B. Plus précisément, si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{kl})$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq l \leq q$), alors on a*

$$AB = (c_{uv}) \text{ avec } c_{uv} = a_{u1}b_{1v} + a_{u2}b_{2v} + \cdots + a_{up}b_{pv}, \ 1 \leq u \leq n, 1 \leq v \leq q$$

Il est important de bien voir que les valeurs des coefficients de la matrice produit de deux matrices sont données par des produits de matrices lignes par des matrices colonnes.

On retiendra

> ***"le coefficient sur la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice produit est donné par le produit de la i-ième ligne de la première matrice par la j-ième colonne de la seconde matrice."***

Exemples 1.12.

– *Le produit de la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vaut*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

– *Le coefficient situé sur la 2-ième ligne et 3-ième colonne du produit de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vaut -1. En effet ce coefficient est égal au produit de la matrice ligne par la matrice colonne que nous venons de calculer.*

Au début il est intéressant de présenter le produit des matrices en disposant les matrices comme dans l'exemple suivant. Le coefficient obtenu en multipliant la ligne i par la ligne j se trouve alors à l'intersection de cette ligne et cette colonne, précisement cela donne

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{cc|c|c} 3 & 0 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
\left(\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}\right) & \left(\begin{array}{cccc} . & . & . & . \\ . & . & \boxed{-1} & . \end{array}\right)
\end{array}$$

En terminant les calculs on trouve

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathit{18} & \mathit{-22} & \mathit{6} & \mathit{-10} \\ \mathit{-8} & \mathit{-13} & \mathit{-1} & \mathit{11} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Remarque 1.13. *Les matrices carrées de taille* 1 *forment un ensemble dont les éléments sont les matrices avec un seul coefficient dans* $\mathbb{K}$*. Avec les règles de produit et de somme données ci-dessus on peut identifier* $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{K}$*.*

⚠ La multiplication des matrices n'est pas toujours définie.

Exemples 1.14.

– *Le produit de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *par* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *n'est pas défini car les tailles des matrices ne sont pas compatibles pour effectuer leur produit.*

– *Par contre* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

On remarque avec ces deux derniers exemples que le résultat du produit de deux matrices dépend de l'ordre dans lequel on multiplie les matrices.

– *Comme nous le verrons dans le chapitre suivant les produits de matrices permettent d'écrire les système linéaires d'équations sous une autre forme. Si* x_1, x_2 *et* x_3 *sont des paramètres réels, alors*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2\,x_3 \\ 2\,x_2 - x_3 \\ -2\,x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

– *Les matrices diagonales de même taille sont faciles à multiplier entre elles, en effet il suffit de multiplier les termes diagonaux entre eux. Par exemple*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.15. ***règles de calcul***

On considère des matrices A, B *et* C *dans* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*,* D, E *dans* $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* F *dans* $\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$*, et des éléments* λ *et* μ *de* $\mathbb{K}$*. On a :*

— $A + (B + C) = (A + B) + C$*, notée* $A + B + C$*,*

— $A(DF) = (AD)F$*, notée* ADF*,*

— $A + B = B + A$*,* $A + 0 = A$*,*

— $AI_p = I_nA = A$*,*

— $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$*,* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$*,*

— $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, *notée* $\lambda\mu A$,
— $\lambda(AD) = (\lambda A)D = A(\lambda D)$, *notée* λAD,
— $(A+B)D = AD + BD$ *et* $A(D+E) = AD + AE$.

La démonstration de cette Proposition est aisée et peut faire l'objet d'un exercice.

Exemple 1.16. *Pour les matrices carrées le produit n'est pas en général commutatif, c'est-à-dire que le résultat dépend de l'ordre dans lequel on fait le produit.*

En effet
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
alors que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On retiendra donc

On n'a pas toujours $AB = BA$ même si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus les Exemples 1.14 montrent que changer l'ordre des matrices dans un produit [3] change la taille de la matrice produit lorsque les matrices n'ont pas la même taille.

Définition 1.17. *Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*
$$AB = BA = I_n.$$

⚠ Il existe des matrices qui ne sont pas inversibles.

Par exemple, toute matrice carrée nulle n'est pas inversible du fait que son produit par n'importe quelle matrice de même taille est égal à la matrice nulle.

Proposition 1.18. *Si une matrice est inversible, alors son inverse est unique.*

Démonstration. Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, supposons qu'il existe deux matrices B_1 et B_2 de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB_1 = B_1A = AB_2 = B_2A = I_n$, alors
$$A(B_1 - B_2) = 0,$$
et
$$B_1\big(A(B_1 - B_2)\big) = B_1 0 = 0.$$
Mais comme $B_1\,A = I_n$, on a par associativité du produit des matrices
$$(B_1A)(B_1 - B_2) = I_n(B_1 - B_2) = B_1 - B_2.$$
Ainsi nous avons $B_1 = B_2$.

Finalement, lorsqu'il existe, l'inverse d'une matrice est unique, on l'appelle *inverse* de A. □

3. Si les différents produits ont un sens.

Notation 1.19. *Lorsqu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible on note son inverse A^{-1}.*

Remarque 1.20. *On verra dans le Théorème 1.51 que l'on peut remplacer de manière équivalente, la condition $AB = BA = I_n$ par la condition $AB = I_n$ ou bien par la condition $BA = I_n$.*

Exemples 1.21.

- *La matrice $A = \begin{pmatrix} 19 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -8 & 19 \end{pmatrix}$. Pour le vérifier il suffit de calculer le produit de ces deux matrices.*
- *La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible du fait que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ le produit MB a sa première colonne nulle.*

Il n'est pas facile de déterminer l'inverse d'une matrice. Avant de détailler une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice nous allons mettre en évidence quelques propriétés de l'inverse.

Proposition 1.22. ***propriétés de l'inverse***
Soient A, B des matrices carrées de taille n.

— *Si A est inversible alors $(A^{-1})^{-1} = A$.*
— *Si $A = (a_{ij})_{i,j}$ est diagonale et inversible, alors tous les coefficients diagonaux $a_{i\,i}$ sont non nuls. Si une matrice diagonale a ses coefficients diagonaux non nuls alors elle est inversible et A^{-1} est diagonale de coefficients diagonaux $a_{i\,i}^{-1}$.*
— *Si A et B sont inversibles AB l'est aussi, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration.

— $A\,(A^{-1}) = (A^{-1})\,A = I_n$ donc on a bien $(A^{-1})^{-1} = A$.
— Si A est une matrice diagonale qui possède un élément diagonal nul, alors le produit de A par n'importe quelle matrice aura une ligne ou une colonne nulle suivant que l'on fait le produit à droite ou à gauche. Dans tous les cas cela ne sera jamais la matrice identité.

  Donc tous les coefficients diagonaux d'une matrice diagonale inversible sont non nuls. On a alors immédiatement que l'inverse est elle aussi une matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.
— Si A et B sont inversibles, alors les matrices A^{-1} et B^{-1} existent. De plus on a

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

et

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = B^{-1}B = I_n,$$

donc $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

Définition 1.23. *Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle* transposée *de A la matrice $(a_{ji})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et on la note ${}^t\!A$.*

La transposée d'une matrice est donc la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemples 1.24. *Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors ${}^t\!A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors ${}^t\!A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Proposition 1.25. *Soient A, B des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.*
— ${}^t({}^t\!A) = A$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^t\!A$,
— ${}^t(A + B) = {}^t\!A + {}^t\!B$,
— ${}^t(AC) = {}^t C\, {}^t\!A$.
— *Si A est inversible ${}^t\!A$ l'est aussi et $({}^t\!A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

Démonstration. Les deux premiers points sont immédiats, le troisième se vérifie en calculant les coefficients de ${}^t(AC)$ et de ${}^t C\, {}^t\!A$. Pour le dernier, calculons ${}^t(A^{-1})\, {}^t\!A$. D'après le troisième point nous avons

$$ {}^t(A^{-1})\, {}^t\!A = {}^t(AA^{-1}) = {}^t I_n = I_n. $$

De même ${}^t\!A\; {}^t(A^{-1}) = I_n$, donc nous avons bien $({}^t\!A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. □

2. Matrices élémentaires et matrices échelonnées

Définition 1.26. *On appelle* matrice élémentaire *une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de l'un des deux types suivants :*
– *$\Delta_i(\lambda)$ ($1 \le i \le n$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$) la matrice diagonale dont le coefficient de la i-ème ligne et de la i-ème colonne vaut $\lambda \neq 0$ et les autres valent 1,*
– *$T_{ij}(\lambda)$ ($1 \le i \neq j \le n$, $\lambda \in \mathbb{K}$) la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est λ et tous les autres coefficients sont nuls.*

Remarque 1.27. *Les matrices $\Delta_i(\lambda)$ sont appelées* matrices de dilatation*, et les matrices $T_{ij}(\lambda)$ sont appelées* matrices de transvection.

Exemples 1.28. $\Delta_2(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$,

$$ T_{43}(\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K}). $$