TOUT-EN-UN

TREMPLIN MATHS

en PCSI-MPSI

- Introduction au programme
- Méthodologie
- Entraînement progressif

ellipses

Dr Jean Perisson

Chapitre 2

Éléments de logique et méthodologie

2.1 La rédaction

“ Ce que l’on conçoit bien s’énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément ”

Il est d’usage, et donc peu original, de citer Boileau [1] pour illustrer la “problématique” [2] de la rédaction.

Car une rédaction soignée :

1. sera la preuve que les exercices posés sont maîtrisés
2. vous mettra à l’abri d’un jugement sévère de vos professeurs

2.1.1 Les bases

Ce paragraphe est essentiel : une présentation concise et complète de vos résultats sera particulièrement appréciée par vos professeurs. C’est pourquoi nous n’hésitons pas à vous sembler un peu “scolaires”, pour vous donner de bonnes pratiques. [3] Ne sous-estimez donc pas les directives ci-dessous, même si elles peuvent parfois vous sembler naïves. Nous donnerons ensuite quelques exemples concrets pour illustrer notre propos.

---

1. dont la paternité de cette phrase n’est d’ailleurs pas avérée.
2. comme l’on dit aujourd’hui !
3. Elles n’ont aucun caractère absolu. Chaque professeur a ses propres habitudes et le vôtre vous proposera les siennes, auxquelles il est conseillé de se conformer.

2.1.2 Structure de la rédaction de chaque question

1. **Énoncé de la question** (bien mise en évidence en la soulignant proprement) : l'étudiant prendra soin de respecter la numérotation du texte de façon que le correcteur s'y retrouve.
2. **Développement de la démonstration** : il doit être nettement détaché des points 1 et 3.
3. **Énoncé de la conclusion**, clairement mise en évidence (encadrée, soulignée, bien séparée du corps de la démonstration etc.).

Important : ne pas passer à la question suivante avant de s'assurer que la conclusion en 3 correspond bien à la question posée en 1.[4]

2.1.3 Les erreurs à éviter

Les éléments qui suivent concernent le corps de démonstration (paragraphe 2 ci-dessus)

1. chaque ligne doit comporter une phrase (algébrique ou autre), et non une simple expression algébrique qui n'est pas une phrase. Ce sont deux notions à bien distinguer
   • **une expression algébrique** est un “individu”, un sujet : par exemple, $(x-4)$ est une expression algébrique
   • **une phrase** relie entre elles plusieurs expressions : par exemple, $x-4=2$ est une phrase (elle contient un sujet, un verbe et un complément) qui peut-être une équation, une identité etc.
2. deux lignes (phrases) consécutives doivent être séparées par des liens logiques de coordination (or, donc, d'où, soit, finalement etc.)

Traitons un exemple de rédaction
Résoudre l'équation $x^2-4=3x-6$ (exercice certes plutôt élémentaire, mais qui nous permettra d'illustrer notre propos).

• **développement catastrophique**

$$x^2-4-3x+6=0$$

4. Vous vous dîtes peut-être : l'auteur exagère, cela va sans dire. Certes, mais comme j'ai eu quelques surprises au cours de ma carrière, il me semble que cela va encore mieux en le disant.

$$(x-2)(x+2)-3(x-2)$$
$$(x-2)(x-1) \implies x = 2,1$$

Commentaire : bon, nous exagérons un peu, mais à peine (si, si, on a réellement déjà vu ce genre de "présentation" !). On ne sait pas par quel bout le corriger : pas de lien logique d'une ligne à l'autre, confusion entre expression algébrique et phrase (lignes 2 et première partie de la ligne 3), ligne 3 particulièrement désinvolte (une implication doit séparer deux phrases, et non une expression algébrique et une phrase).

• **Développement maladroit**

$$x^2-4-3x+6 = (x-2)(x+2)-3(x-2)$$
$$x^2-4-3x+6 = (x-2)(x+2-3)$$
$$x^2-4-3x+6 = (x-2)(x-1)$$
$$x = 2 \text{ ou } x = 1$$

Quelles sont les maladresses ?

1. le fait de ne pas renommer l'expression algébrique

   $$x^2-4-3x+6 \quad \text{par } A \quad \text{(par exemple)}$$

   nous oblige à répéter cette expression à chaque ligne de calcul : dans certains cas, cela peut être très long, et très énervant !
2. comme il s'agit de la transformation de la même expression algébrique, il est judicieux de prolonger le calcul sur la même ligne : une plus grande compacité de votre démonstration en facilite une appréhension rapide, et cette vue synthétique permet une lecture plus facile (beaucoup d'étudiants sont rapidement noyés dans des pages d'écriture, finissant par tout mélanger et ne plus savoir où ils en sont).
3. il manque des liaisons quand on passe d'une ligne à l'autre (certains correcteurs sanctionnent sévèrement cette absence).
4. l'équation (qui est tout de même le problème posé) a disparu du paysage : la solution, en dernière ligne, semble donc parachutée.
5. point positif : chaque ligne comporte une ou plusieurs phrases, et non plus de simples expressions algébriques comme dans la rédaction précédente.

• **Développement possiblement correct**

Posons $A = x^2 - 4 - 3x + 6$ (on donne un “nom” à l’expression algébrique pour ne pas être obligé de la répéter systématiquement.

L’équation proposée équivaut à :

$$A = (x-2)(x+2)-3(x-2) = (x-2)(x+2-3) = (x-2)(x-1) = 0$$

Donc

$$A = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 2$$

Finalement :

$$\boxed{S = \{1, 2\}}$$

Notez par ailleurs qu’on ne passe pas d’une ligne ou d’une phrase à une autre sans transition (donc, finalement, équivalence).

2.2 Éléments de logique

2.2.1 Propositions

Une **proposition** est un énoncé dont on peut dire, sans ambiguïté, qu’il est soit vrai (V), soit faux (F).

Les propositions sont notées P,Q,R etc (parfois en lettres minuscules).

Exemples :

1. P : $2 < 3$ est une proposition vraie
2. Q : $2 \leq 3$ est une proposition vraie (puisque l’un de ses termes, l’inégalité, est vrai)
3. R : $2 \geq 3$ est une proposition fausse
4. S : $1 + 1 = 3$ est une proposition fausse
5. T : x est un entier naturel **n’est pas une proposition** (puisque, ne connaissant pas x, on ne peut assurer que cet énoncé est vrai ou faux)
6. S : [$(1 + 1 = 3)$ ou $(2 < 3)$] est une proposition vraie (puisque l’un de ses termes, le deuxième, est vrai).

2.2.2 Connecteurs logiques

• **Négation d'une proposition** : notée (non$P$) ou $\neg p$. Par définition, $\neg p$ est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie.

Remarque : non(non P)=P (ou $\neg\neg p = p$)

• **Conjonction et disjonction d'une proposition** :

1. **Conjonction de** p **et** q : c'est la proposition notée $p \wedge q$ $((p\,et\,q))$, vraie si et seulement si p **et** q sont vraies
2. **Disjonction de** p **et** q : c'est la proposition notée $p \vee q$, $((p\,ou\,q))$, vraie si et seulement si p **ou** q est vraie [5].

• **Implication et équivalence** :

1. **Implication** : c'est la proposition notée $p \Longrightarrow q$, vraie si et seulement si $(\neg p \vee q)$ est vraie.
2. **Équivalence** c'est la proposition notée $p \Longleftrightarrow q$, vraie si et seulement si $p \Longrightarrow q$ **et** $q \Longrightarrow p$ le sont également.

• **Implication et "donc"** Beaucoup d'étudiants confondent $\Longrightarrow$ et la conjonction de coordination "donc". La distinction est pourtant à bien connaître :

1. l'écriture $P \Longrightarrow Q$ a un sens : ou bien P est fausse (et on ne sait alors rien de Q), ou bien P est vraie et alors Q est nécessairement vraie (mais on peut ignorer *a priori* si P est vraie ou fausse, ainsi que Q).
2. P est vraie, donc Q est vraie a un sens. Si P est vraie et si P $\Longrightarrow$ Q, alors Q est vraie. Mais P donc Q ne veut rien dire !
3. Enfin, "donc" a un caractère éventuellement récapitulatif : ainsi, cette conjonction peut séparer un développement (de plusieurs lignes) d'une conclusion, ce qui n'est pas le cas de l'implication. Prenons pour exemple le syllogisme bien connu :
   Tous les hommes sont mortels.
   Socrate est un homme
   donc, Socrate est mortel
   La conjonction "donc" s'appuie sur les deux prémisses précédentes, et a donc un caractère récapitulatif. En revanche, l'écriture
   Tous les hommes sont mortels.

5. éventuellement les deux.

Socrate est un homme
$\Longrightarrow$ Socrate est mortel
est incorrecte car l'implication relie la conclusion à la proposition *précédente* (Socrate est un homme) qui ne permet pas à elle seule de conclure (dans un syllogisme, tout doit être explicite, et on n'est pas supposé sous-entendre que tous les hommes sont mortels !).

2.2.3 Quantificateurs

• **Quantificateur existentiel** : on le note $\exists$ et il signifie "il existe" (au moins).

Deux exemples : $\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0$ et $\exists x \in \mathbb{R}, x-2<0$. Dans le premier cas, x est unique[6], alors que dans le deuxième, il existe une infinité de valeurs de x solutions de l'inéquation : donc,**le symbole $\exists$ ne suppose pas l'unicité de** x.

Remarque : on trouve parfois les symboles $\exists x!$ (il existe x **unique**) et $\exists x?$ (existe-t-il x ?), pratiques, mais non universellement reconnus[7]

• **Quantificateur universel** : on le note $\forall$ et il signifie "quel que soit" ou "pour tout".

Exemple : $(\forall x \in \mathbb{R}), [(x+1)^2 = x^2+2x+1]$

2.2.4 Négations

Nous donnons ci-dessus quelques exemples classiques (et donc utiles) de négations de propositions : ces équivalences vous seront démontrées aisément par des tables de vérité que nous ne traitons pas ici.

1.

$$[\,\mathrm{non}(P \Longrightarrow Q)\,] \Longleftrightarrow \Big[\mathrm{non}[\,(\mathrm{non}P)\,\mathrm{ou}\,Q]\Big] \Longleftrightarrow [\,P \ \text{ et } \ (\mathrm{non}Q)\,]$$

2.

$$\mathrm{non}[\,(\exists x), (P \Longrightarrow Q)\,] \Longleftrightarrow [\forall x), [\,P \text{ et } (\mathrm{non}Q)\,]$$

Remarque : OU et ET sont interchangeables par négation.

6. nous laissons au lecteur la tâche ardue de résoudre cette difficile équation
7. en ce qui nous concerne, nous n'hésiterons pas à les utiliser.

2.3 Ensembles

2.3.1 Définition

Nous en donnons une définition classique, simple (voire naïve), mais très pratique et largement suffisante pour le contenu de ce cours. Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments** [8]. Les ensembles sont notés par des lettres majuscules et leurs éléments par des lettres minuscules.

L'écriture $x \in E$ signifie que x est élément de E. À l'inverse, $x \notin E$ signifie que x n'est pas élément de E.

Remarque

On peut définir un ensemble

1. en listant ses éléments (si c'est possible) : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F = \{\text{pile, face}\}$
2. en les définissant par une propriété : $E = \{\text{entiers naturels pairs}\}$, $F = \{(x \in \mathbb{Q}), (x^2 < 2)\}$
3. en les désignant par leur nom (quand ils sont "célèbres") : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$,

2.3.2 Ensemble vide

C'est l'ensemble ne contenant aucun élément : il est noté $\emptyset$

2.3.3 Sous-ensemble

On dit que A est un sous-ensemble (ou une partie) de l'ensemble E si tout élément de A est élément de E. On écrira [9] :

$$A \subset E \quad \Longleftrightarrow (\forall x \in A), (x \in E)$$

Attention : ne pas confondre les écritures $x \in E$ (x est **élément** de E) et $A \subset E$ (A est un sous-ensemble de E).

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$

8. nous n'entrerons pas dans les contradictions subtiles que cette définition implique.
9. on peut définir aussi l'inclusion large $A \subseteq E$ qui signifie que A est inclus ou égal à E. Dana la suite de ce cours, et par souci de simplification, le symbole "$\subset$" signifiera que A est inclus dans E, mais peut lui être égal.

2.3.4 Réunion

C'est l'ensemble noté $A \cup B$ des éléments qui appartiennent à A **ou** à B.
Donc :

$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A) \text{ ou } (x \in B)$$

Exemple : $\{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$

2.3.5 Intersection

C'est l'ensemble noté $A \cap B$ des éléments qui appartiennent à la fois à A **et** à B.
Donc :

$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A) \text{ et } (x \in B)$$

Exemple : $\{1,2,3\} \cap \{2,4\} = \{2\}$.

2.3.6 Complémentaire

Soit E un ensemble et A un de ses sous-ensembles. Le complémentaire de A dans E, noté $C_E(A)$ (que l'on notera C(A) ou $\bar{A}$ pour alléger l'écriture) est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Donc :

$$C_E(A) = \{(x \in E), (x \notin A)$$

2.3.7 Propriétés

Soit A,B,C,... des parties d'un ensemble E. Nous admettrons les résultats suivants, dont la démonstration est longue mais ne présente pas de difficulté.

1. $A \cap C(A) = \emptyset$ et $A \cup C(A) = E$
2. $A \cup A = A \cap A = \mathrm{A}$ $\quad A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$
3. **Commutativité de** $\cup$: $A \cup B = B \cup A$
4. **Commutativité de** $\cap$: $A \cap B = B \cap A$
5. **Associativité de** $\cup$: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. **Associativité de** $\cap$: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
7. **Distributivité de** $\cup$ **pour** $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. **Distributivité de** $\cap$ **pour** $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$