

# TOPOLOGIE ET ANALYSE 3<sup>e</sup> ANNÉE

Cours et exercices avec solutions

***Georges Skandalis***

Professeur à l'université Paris 7 - Denis Diderot

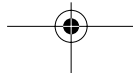
ouvrage dirigé par

***Michel Zisman***

Professeur émérite de l'université Paris 7 - Denis Diderot



DUNOD





## Dans la même collection

- **Mathématiques pour la Licence 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> années (4 volumes)**

Analyse 1re année,  
Algèbre 1re année,  
Analyse 2e année,  
Algèbre et géométrie 2e année,  
François Liret et Dominique Martinais

- **Mathématiques pour la Licence 3<sup>e</sup> année (4 volumes)**

Algèbre, Lionel Schwartz.  
Fonctions analytiques, Pierre Vogel.  
Topologie et analyse, Georges Skandalis.  
Calcul différentiel et calcul intégral, Marc Chaperon.

Illustration de couverture : © erihori 4design. Adobe Stock

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---	--

© Dunod, 2001, 2020 pour la nouvelle présentation  
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082469-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Préface

La topologie est une science neuve qui n'est enseignée en Licence que depuis moins de cinquante ans. Les premiers manuels à l'usage des étudiantes et étudiants imprimés en France ont au plus trente ans. Durant ce très court laps de temps, la topologie s'est imposée dans de nombreuses branches des mathématiques, et cette évolution a imposé une évolution parallèle de la manière de présenter cette science à ceux qui la découvrent aujourd'hui, rendant nécessaire la rédaction de nouveaux manuels.

Comme toujours dans la collection *Mathématiques pour la Licence*, dont c'est le troisième ouvrage, l'auteur s'est efforcé de satisfaire deux exigences qui semblent *a priori* difficiles à concilier : assurer la continuité à l'issue des deux premières années d'université, et donc rester élémentaire, et par ailleurs offrir la possibilité de pousser plus loin l'acquisition de ses connaissances, et de respirer le parfum de la mathématique contemporaine. Ce cours de topologie de Georges Skandalis commence donc là où finit le DEUG et se poursuit par l'exposition maintenant devenue classique des notions enseignées en général durant la première année de la Licence. Insensiblement, au fur et à mesure que le lecteur se sent plus ferme dans ce nouveau domaine, il est conduit à découvrir, s'il le désire, des théorèmes plus profonds, mais aussi plus difficiles dont il pourra réserver l'étude détaillée à une seconde lecture. Il sera aidé tout au long de son parcours par les très nombreux exercices qui complètent les différents chapitres, et par des indications sur leur solution, placées à la fin de l'ouvrage : ces exercices lui serviront à la fois à tester son acquisition des nouvelles connaissances, et, comme toujours, à faciliter la compréhension de toute la théorie qui lui est présentée.

**Michel Zisman**

Professeur émérite de l'université Paris 7 - Denis Diderot

10/11/20

1. Describe the structure of the cell membrane

The cell membrane is a phospholipid bilayer. Each phospholipid has a hydrophilic head and two hydrophobic tails. The heads face outwards towards the aqueous environment, while the tails face inwards, away from water. This arrangement creates a barrier that is selectively permeable. Embedded within the bilayer are various proteins, some of which are integral, spanning the membrane, while others are peripheral. The membrane is also fluid, allowing for the movement of lipids and proteins.

2. Explain the fluid mosaic model

The fluid mosaic model describes the cell membrane as a phospholipid bilayer with various proteins embedded in it. The phospholipids are in constant motion, and the proteins are also able to move laterally within the membrane. This model explains the fluidity and the mosaic nature of the membrane.

3. Describe the function of the cell membrane

The cell membrane has several functions. It acts as a barrier between the cell and its environment, preventing the entry of harmful substances and the exit of essential ones. It also plays a role in cell signaling, transport, and cell adhesion.

4. Explain the difference between passive and active transport

Passive transport is the movement of molecules across a membrane from a region of high concentration to a region of low concentration, without the need for energy. Active transport is the movement of molecules across a membrane from a region of low concentration to a region of high concentration, which requires energy.

5. Describe the process of osmosis

Osmosis is the movement of water molecules across a semi-permeable membrane from a region of high water potential to a region of low water potential.

# Table des matières

<b>Chapitre 1.</b>	<b>Espaces métriques</b>	
1.	Rappels sur la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$	1
2.	Espaces métriques, distances et boules	3
3.	Applications continues, applications lipschitziennes	5
4.	Voisinages	7
5.	Ouverts	9
	Exercices	11
<b>Chapitre 2.</b>	<b>Espaces topologiques</b>	
1.	Espaces topologiques	15
2.	Sous-espaces topologiques : topologie induite	23
3.	Applications continues	25
4.	Limites, espaces séparés	33
	Exercices	40
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Produits et quotients d'espaces topologiques</b>	
1.	Produit d'espaces topologiques	49
2.	Topologie quotient	58
3.	Complément : comparaison de topologies	61
	Exercices	66
<b>Chapitre 4.</b>	<b>Compacité et connexité</b>	
1.	Compacité	73
2.	Espaces localement compacts	81
3.	Connexité	85
	Exercices	92

<b>Chapitre 5.</b>	<b>Propriétés topologiques des espaces métriques</b>	
1. Continuité uniforme		101
2. Suites de Cauchy et espaces métriques complets		105
3. Espaces métriques compacts		117
Exercices		123
<b>Chapitre 6.</b>	<b>Convergence uniforme l'espace <math>C(X; Y)</math></b>	
1. Convergence uniforme		133
2. Convergence simple et convergence uniforme : théorèmes de Dini		144
3. Parties relativement compactes de $C(X; Y)$ : le théorème d'Ascoli		146
4. Sous-algèbres de $C(X; \mathbb{R})$ : le théorème de Stone-Weierstrass		150
Exercices		156
<b>Chapitre 7.</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	
1. Normes, applications linéaires continues		167
2. Exemples d'espaces vectoriels normés		180
3. Constructions d'espaces vectoriels normés		192
4. Familles sommables dans un espace de Banach		198
5. Dual d'un espace vectoriel normé. Théorème de Hahn-Banach		211
6. Conséquences du théorème de Baire		218
7. Complément : espaces vectoriels topologiques		222
Exercices		226
<b>Chapitre 8.</b>	<b>Espaces hilbertiens</b>	
1. Produits scalaires, espaces hilbertiens		245
2. Le théorème de projection		252
3. Bases hilbertiennes		254
4. Adjoint d'une application linéaire continue		261
5. Polynômes orthogonaux		268
Exercices		272

<b>Chapitre 9.</b>	<b>Complément : Filtres</b>	
1. Définition et exemples		283
2. Ultrafiltres		285
3. Convergence des filtres		287
4. Le théorème de Tykhonov		289
Exercices		291
<b>Appendice.</b>	<b>Rappels et compléments sur les ensembles</b>	
1. Ensembles, sous-ensembles, applications, familles		293
2. Relations d'équivalence ; relations d'ordre		296
3. Ensembles dénombrables		301
4. Compléments		304
<b>Indications pour les exercices</b>		309
<b>Index</b>		321

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities.

2. It is essential to ensure that all data is entered correctly and consistently to avoid any discrepancies or errors.

3. Regular audits and reviews should be conducted to verify the accuracy and integrity of the information.

4. The use of standardized formats and procedures will help in maintaining uniformity across all records.

5. It is also important to ensure that all records are properly stored and protected from unauthorized access.

6. The document further outlines the responsibilities of the staff involved in the record-keeping process.

7. Each staff member should be clearly defined their role and the specific tasks they are responsible for.

8. Training and ongoing education are necessary to ensure that all staff are up-to-date on the latest procedures.

9. The document also addresses the issue of data security and the implementation of appropriate safeguards.

10. It is crucial to have a robust backup system in place to prevent any loss of data.

11. The final section of the document provides a summary of the key points and a call to action.

12. All staff members are encouraged to adhere strictly to the guidelines and procedures outlined in this document.

13. The goal is to achieve a high level of accuracy and reliability in all record-keeping activities.

14. The document is intended to serve as a comprehensive guide for all staff members involved in the process.

15. It is expected that these measures will significantly improve the overall quality and efficiency of the record-keeping process.

16. The document is subject to periodic reviews and updates to reflect any changes in requirements or procedures.

17. All staff members should be aware of their responsibility to maintain the highest standards of record-keeping.








# Avant-Propos

La topologie offre un cadre général, simple et élégant, à toutes les notions de continuité et de limite qui apparaissent en analyse. Dans ce livre on s'intéresse surtout aux espaces métriques, où ces notions sont décrites à l'aide d'une « distance ». On discute de nombreux exemples importants de tels espaces, en insistant plus particulièrement sur les espaces vectoriels normés, espaces de Banach et espaces hilbertiens. On étudie aussi des applications de la topologie à l'analyse, comme par exemple les séries de Fourier.

Les étudiants qui préparent la Licence de Mathématiques ont choisi d'approfondir leur savoir Mathématique et peuvent vouloir chercher un peu plus loin que les notions enseignées dans leur cours. Ainsi, cet ouvrage contient quelques compléments clairement signalés, qui donnent un nouvel éclairage à certaines notions, mais peuvent être laissés de côté lors d'une première lecture. Il contient aussi quelques parties plus difficiles comme la fin du sixième chapitre et du septième chapitre et quelques résultats qui sont laissés en exercice. Au cours d'une première lecture de ces parties, il est peut être préférable de se contenter de lire les définitions et les énoncés des théorèmes, laissant les démonstrations pour plus tard.

On fera souvent référence à des notions déjà vues en DEUG. On citera à cette occasion, les livres d'Algèbre et d'Analyse, 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> année, de François Liret et Dominique Martinais dans cette collection. Cependant, dans la mesure du possible, les résultats utilisés seront réénoncés, et même parfois redémontrés. D'un autre côté, on évitera de s'appuyer sur des notions enseignées dans d'autres domaines de Licence. En particulier, les seules notions d'intégration utilisées sont celles de l'intégrale Riemann. Pour certains énoncés (en particulier, des applications à la théorie de Fourier), on sera amené à considérer des espaces  $L^p$ . Ceux-ci sont les mêmes que ceux de l'intégrale de Lebesgue ; cependant, ils sont ici vus comme des complétés abstraits et non comme des espaces de fonctions modulo des fonctions négligeables.

On rencontre dans la marge l'image  : elle indique un énoncé important qui n'est en général pas présenté sous forme de théorème. L'image  signale une difficulté, ou une erreur à ne pas commettre. Dans l'énoncé d'un exercice, l'image  signale la présence d'indications pour le résoudre en fin de volume. Le signe  indique qu'une démonstration est finie, ou omise ; le signe  indique la fin d'une démonstration intermédiaire.

Je tiens à remercier François Liret et Michel Zisman pour leur lecture du livre à plusieurs stades et pour leurs conseils. Un grand merci aussi à Saad Baaj pour sa lecture critique et son aide amicale. Je remercie enfin Alberto Arabia, François Liret et Dominique Martinais, qui continuent à m'adresser la parole malgré mes demandes incessantes et importunes d'aide et de conseils. Ce livre n'aurait jamais vu le jour sans leurs encouragements et critiques.

Un petit clin d'oeil enfin à mes lecteurs préférés : Christine, Daphné et Jason.

Paris, le 10 mai 2019. Georges Skandalis

# Principales notations utilisées

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	ensemble des entiers naturels, anneau des entiers relatifs
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	corps des nombres rationnels, réels, complexes
$\sup(A), \inf(A)$	borne supérieure, borne inférieure d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$
$E(x)$	partie entière du nombre réel $x$
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z,  z $	partie réelle, partie imaginaire, module du nombre complexe $z$
$\bar{A}, \overset{\circ}{A}$	adhérence, intérieur du sous-ensemble $A$ (d'un espace topologique)
$A \setminus B$	ensemble des éléments de $A$ qui n'appartiennent pas à $B$
$X \times Y$	produit cartésien des ensembles $X$ et $Y$
$\mathcal{P}(X)$	ensemble des parties d'un ensemble $X$
$f : X \rightarrow Y$	application d'un ensemble $X$ dans un ensemble $Y$
$f(A)$	image directe par $f$ du sous-ensemble $A$ de $X$
$f^{-1}(B)$	image réciproque par $f$ du sous-ensemble $B$ de $Y$
$Y^X$	ensemble des applications d'un ensemble $X$ dans un ensemble $Y$
$C(X; Y)$	ensemble des applications continues d'un espace topologique $X$ dans un espace topologique $Y$
$C_{\text{per}}(\mathbb{R}; Y)$	ensemble des applications continues périodiques (de période donnée) de $\mathbb{R}$ dans un espace topologique $Y$
$C_0(X; \mathbb{K})$	ensemble des applications continues tendant vers 0 à l'infini d'un espace topologique localement compact $X$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathcal{L}(E, F)$	espace des applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé $E$ dans un espace vectoriel normé $F$
$f^{-1}$	bijection réciproque de la bijection $f$
$\operatorname{id}_X$	application identique de l'ensemble $X$
$\operatorname{Im} f, \operatorname{Ker} f$	image, noyau de l'application linéaire $f$



# Chapitre 1

## Espaces métriques

On a étudié en DEUG :

- ▶ la *continuité* d'une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , puis d'une application d'une partie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ ,
- ▶ la *limite* en un point d'une fonction définie sur un intervalle et la limite d'une suite de nombres réels...

On a été de plus amené à considérer des limites dans des ensembles plus compliqués que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^n$ , comme la limite (simple ou uniforme) d'une suite de fonctions.

Ce qui permet de définir ces notions de continuité et de limite est une notion de *points voisins*, ou de *voisinages*. Dans ce premier chapitre nous allons utiliser une *distance* qui mesure justement à quel degré deux points sont voisins. Nous aurons ainsi un cadre plus général que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^n$  dans lequel on pourra encore définir la notion de continuité et cela nous conduira à une définition rigoureuse des voisinages d'un point, puis des sous-ensembles ouverts.

Ces notions seront la base d'un cadre plus général développé au chapitre suivant.

### 1 Rappels sur la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$

Nous commençons ce chapitre par des rappels sur des résultats d'analyse vus en DEUG. Nous ne rappellerons pas les démonstrations. Nous renvoyons systématiquement aux livres de première et deuxième année de DEUG de F. LIRET et D. MARTINAIS dans la même collection.

#### Intervalles et parties bornées de $\mathbb{R}$

##### Parties bornées

L'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels muni de la relation  $\leq$  est *totalelement ordonné* (voir Algèbre et Géométrie, 2<sup>e</sup> année, chapitre 1, voir aussi l'appendice en fin de volume).

Soient  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $m$  un nombre réel.

- ▶ On dit que  $m$  est un *majorant* de  $A$  si pour tout  $x \in A$ , on a  $x \leq m$ . On dit que  $m$  est un *minorant* de  $A$  si pour tout  $x \in A$ , on a  $x \geq m$ .

- ▶ On dit que  $m$  est la *borne supérieure* de  $A$  si  $m$  est le plus petit des majorants de  $A$ , c'est-à-dire si  $m$  est un majorant de  $A$  et si tout majorant de  $A$  est supérieur ou égal à  $m$ .
- ▶ On dit que  $m$  est la *borne inférieure* de  $A$  si c'est le plus grand des minorants de  $A$ , c'est-à-dire si  $m$  est un minorant de  $A$  et si tout minorant de  $A$  est inférieur ou égal à  $m$ .
- ▶ Une partie de  $\mathbb{R}$  qui admet un majorant (*resp.* un minorant) est dite *majorée* (*resp.* *minorée*). Une partie de  $\mathbb{R}$  qui admet un majorant et un minorant est dite *bornée*.

Nous avons vu (voir Analyse, 1<sup>re</sup> année, théorème p. 55) qu'une des propriétés principales de  $\mathbb{R}$  est l'axiome de la borne supérieure.

**Axiome de la borne supérieure.** *Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.*

On en déduit aussitôt que toute partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

La borne supérieure d'une partie non vide majorée  $A$  se note  $\sup A$ ; la borne inférieure d'une partie non vide minorée  $A$  se note  $\inf A$ . Si  $A$  est une partie non majorée de  $\mathbb{R}$ , convenons de poser  $\sup A = +\infty$ ; si  $A$  est une partie non minorée de  $\mathbb{R}$ , convenons de poser  $\inf A = -\infty$ .

### Intervalles

Rappelons qu'un sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un *intervalle* si, pour tout triplet  $(x, y, z)$  de nombres réels tels que  $x \leq y \leq z$ , on a l'implication :  $(x \in I \text{ et } z \in I) \Rightarrow y \in I$ .

Un sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un *intervalle ouvert* si c'est un intervalle n'ayant ni plus grand, ni plus petit élément. Autrement dit un intervalle ouvert est soit vide, soit égal à  $\mathbb{R}$ , soit c'est un sous-ensemble de la forme  $]a, b[$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ), soit un sous-ensemble de la forme  $]a, +\infty[$  ou  $]-\infty, b[$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), selon que  $I$  est majoré ou minoré.

Une partie de  $\mathbb{R}$  est appelée un *segment* si c'est un intervalle admettant un plus grand et un plus petit élément. Autrement dit un segment est un sous-ensemble de la forme  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ ).

Rappelons deux résultats très importants rencontrés en première année de DEUG (cf. Analyse, 1<sup>re</sup> année, théorème et corollaire p. 74, et théorème p. 76).

**Théorème de la valeur intermédiaire.** *L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.*

**Théorème.** *L'image d'un segment par une application continue à valeurs réelles est un segment.*

Un des buts de la topologie est de mieux comprendre ces deux théorèmes et de les généraliser. C'est ce que nous ferons, notamment au chapitre 4.

## Rappels sur les espaces vectoriels normés

Nous reprenons ici quelques définitions et notations que l'on peut trouver développées dans le livre Analyse, 2<sup>e</sup> année, chapitre 5.

### Définitions

Une *norme* sur un espace vectoriel réel  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- a) pour tout  $x \in E$  non nul, on a  $N(x) \neq 0$  ;
- b) pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  ;
- c) pour tous  $x, y \in E$ , on a  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

Un *espace vectoriel normé* est un couple  $(E, N)$ , où  $E$  est un espace vectoriel et  $N$  est une norme sur  $E$ .

Soient  $(E_1, N_1)$  et  $(E_2, N_2)$  des espaces vectoriels normés et  $A$  une partie de  $E_1$ . On dit qu'une application  $f : A \rightarrow E_2$  est *continue en un point*  $a \in A$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\alpha > 0$  satisfaisant : pour tout  $x \in A$ , si  $N_1(a - x) < \alpha$  alors  $N_2(f(a) - f(x)) < \varepsilon$ . Si  $f$  est continue en tout point de  $A$ , on dit que  $f$  est *continue*.

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Pour  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , on appelle *boule ouverte* de centre  $a$  et de rayon  $r$  le sous-ensemble  $B(a, r) = \{x \in E ; N(a - x) < r\}$  de  $E$ . Une partie  $U$  de  $E$  est dite *ouverte* si, pour tout  $x \in U$ , il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(x, r) \subset U$ .

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Une partie  $A$  de  $E$  est dite *bornée* s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x \in A$ , on ait  $N(x) \leq M$ .

Soient  $B$  un ensemble et  $f : B \rightarrow E$  une application. On dit que  $f$  est *bornée* si son image  $f(B) = \{f(x) ; x \in B\}$  est bornée, autrement dit s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x \in B$ , on ait  $N(f(x)) \leq M$ .

## 2 Espaces métriques, distances et boules

Pour définir la continuité, les boules ouvertes, les ouverts dans un espace vectoriel normé, on n'a pas utilisé la structure d'espace vectoriel, mais juste la *distance*  $N(x - y)$  des points  $x, y$ . Cela nous conduit naturellement à la définition suivante.

### Définitions

Une *distance* sur un ensemble  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que, pour tout  $x, y, z \in X$  on ait :

- a)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  ;
- b)  $d(y, x) = d(x, y)$  ;

c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

Un espace métrique est un couple  $(X, d)$ , où  $X$  est un ensemble et  $d$  une distance sur  $X$ .

### Remarque utile

Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $x, y, z$  des points de  $X$ . Par l'inégalité triangulaire, on a  $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$  et, échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ ,  $d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x)$ . On en déduit l'inégalité :  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ .

### Exemples : les distances usuelles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |x - y| \end{aligned}$$

est une distance sur  $\mathbb{R}$  appelée *distance usuelle*.

De même, en utilisant le module d'un nombre complexe, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |x - y| \end{aligned}$$

est une distance sur  $\mathbb{C}$  appelée *distance usuelle*.

Ainsi,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des espaces métriques et, sauf mention du contraire,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  seront toujours munis des distances ci-dessus.

### Exemple : distance associée à une norme

Plus généralement, si  $N$  est une norme sur un espace vectoriel réel  $E$ , l'application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto N(x - y) \end{aligned}$$

est une distance sur  $E$ , appelée *distance associée à la norme  $N$* . En effet, si  $x, y, z \in E$ , on a :

- $N(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$  ;
- $N(y - x) = N((-1)(x - y)) = N(x - y)$  ;
- $N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leq N(x - y) + N(y - z)$ .

### Exemple : distance induite, sous-espaces métriques

Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $A$  un sous-ensemble de  $X$ . La restriction de  $d$  à  $A \times A$  est clairement une distance sur  $A$  appelée *distance induite* sur  $A$  (par celle de  $X$ ). En d'autres termes, un sous-ensemble d'un espace métrique est un espace métrique ; on dit que c'est un *sous-espace métrique*.

Ainsi, toute partie de  $\mathbb{R}$ , de  $\mathbb{C}$  ou d'un espace vectoriel normé est un espace métrique.

Les espaces normés et leurs sous-ensembles fournissent les principaux exemples d'espaces métriques. On peut montrer (cf. exerc. 10, page 157) que tout espace



métrique peut être considéré comme un sous-espace d'un espace vectoriel normé. Il arrive cependant qu'on construise des espaces métriques sans référence à une norme.

**Exemple (distance discrète).** Soit  $X$  un ensemble ; l'application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$  et  $d(x, y) = 1$  sinon, est clairement une distance.

### Définitions

Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $x \in X$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . On appelle *boule ouverte* de centre  $x$  et de rayon  $r$  la partie  $B(x, r) = \{y \in X ; d(x, y) < r\}$  de  $X$ . On appelle *boule fermée* de centre  $x$  et de rayon  $r$  la partie  $B_f(x, r) = \{y \in X ; d(x, y) \leq r\}$  de  $X$ .

Il est d'usage d'autoriser la valeur  $r = 0$  comme rayon d'une boule fermée : on a donc  $B_f(x, 0) = \{x\}$ .

La boule ouverte de  $\mathbb{R}$  de centre  $a$  et de rayon  $r$  est  $]a - r, a + r[$  ; la boule fermée de  $\mathbb{R}$  de centre  $a$  et de rayon  $r$  est  $[a - r, a + r]$ . Ainsi, avec nos conventions sur les rayons, *les boules ouvertes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles ouverts bornés, non vides, les boules fermées de  $\mathbb{R}$  sont les segments.*



## 3 Applications continues applications lipschitziennes

On peut généraliser aux espaces métriques la notion de continuité d'une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ou (d'une partie) d'un espace normé dans un autre espace normé.

### Définition

Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow X'$  une application et  $a$  un point de  $X$ . On dit que  $f$  est *continue en  $a$*  si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in X, d(x, a) < \alpha \implies d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Comme pour les applications (d'une partie) d'un espace normé dans un autre espace normé, on définit la continuité « globale » d'une application.

### Définition

Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  des espaces métriques et  $f : X \rightarrow X'$  une application. On dit que  $f$  est *continue* si elle est continue en tout point de  $X$ .

En d'autres termes,  $f : X \rightarrow X'$  est continue si

$$\forall a \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in X, d(x, a) < \alpha \implies d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Dans le cas où  $X$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $X' = \mathbb{R}$ , tous deux munis de la distance usuelle, cette définition coïncide avec celle énoncée en DEUG ; de même si  $X$  et  $X'$  sont des parties d'espaces vectoriels normés munis de la distance associée à une norme. On dispose donc de beaucoup d'exemples de fonctions continues.

Pour démontrer que d'autres fonctions sont continues, on sera souvent amené à utiliser la notion plus restrictive suivante.

### Définition

Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  des espaces métriques et  $k$  un nombre réel positif. Une application  $f : X \rightarrow X'$  est dite *lipschitzienne de rapport  $k$*  si pour tous  $x, y \in X$  on a  $d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ . On dit que  $f$  est *lipschitzienne* s'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f$  soit lipschitzienne de rapport  $k$ .

**Proposition 1.** *Toute application lipschitzienne est continue.*

**Démonstration.** Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  des espaces métriques,  $k$  un nombre réel positif et  $f : X \rightarrow X'$  une application lipschitzienne de rapport  $k$ .

Soit  $a \in X$ . Montrons que  $f$  est continue en  $a$ . Donnons-nous un nombre réel  $\varepsilon > 0$  ; choisissons  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $k\alpha < \varepsilon$  (e.g.  $\alpha = \frac{\varepsilon}{1+k}$ ). Soit  $x \in X$  tel que  $d(x, a) < \alpha$  ; alors  $d'(f(x), f(a)) \leq kd(x, a) \leq k\alpha < \varepsilon$ . Donc  $f$  est continue en  $a$ . ■

**Exemple.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Pour tout  $a \in X$ , l'application  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  (muni de la distance usuelle) qui à  $x \in X$  associe  $d(x, a)$  est lipschitzienne de rapport 1 : en effet, pour tous  $x, y \in X$ , on a  $|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$  (cf. remarque page 4). En particulier l'application  $x \mapsto d(x, a)$  est continue.

La proposition qui suit nous fournit de nombreux exemples d'applications lipschitziennes sur un intervalle. Elle nous permet en plus de construire des applications continues qui ne sont pas lipschitziennes.

Introduisons d'abord une notation commode. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Notons  $\overset{\circ}{I}$  l'intervalle ouvert qui a les mêmes extrémités que  $I$  (si  $I$  est ouvert,  $\overset{\circ}{I} = I$  ; si  $I = [a, b]$  ou  $[a, b[$  ou  $]a, b]$ , alors  $\overset{\circ}{I} = ]a, b[$  etc. ).

**Proposition 2.** *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ .*

- Soit  $k \in \mathbb{R}_+$ . L'application  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k$  si et seulement si, pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ , on a  $|f'(x)| \leq k$ .
- L'application  $f$  est lipschitzienne si et seulement si  $f'$  est bornée sur  $\overset{\circ}{I}$ .

**Démonstration.** a) Si  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k$ , alors pour tous  $t, t_0 \in \overset{\circ}{I}$ ,  $t \neq t_0$ , on a  $\left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right| \leq k$  ; passant à la limite quand  $t$  tend vers  $t_0$ , on trouve  $|f'(t_0)| \leq k$ .

Supposons que  $|f'|$  est majorée par  $k$ . Soient  $s, t \in I$  deux points distincts. Par le théorème des accroissements finis, il existe  $u \in \overset{\circ}{I}$  tel que  $f(s) - f(t) = f'(u)(s - t)$ . Alors on a  $|f(s) - f(t)| = |f'(u)||s - t| \leq k|s - t|$ ; donc  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k$ .

b) découle facilement de a). ■

En particulier, comme  $t \mapsto 2t$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto t^2$  (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) n'est pas lipschitzienne; de même, puisque  $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , l'application  $t \mapsto \sqrt{t}$  (de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ ) n'est pas lipschitzienne.

## 4 Voisinages

Dans la suite, il sera utile de considérer l'image directe et l'image réciproque de sous-ensembles par une application. Ces notions déjà rencontrées en DEUG (voir Algèbre et Géométrie, 2<sup>e</sup> année, chapitre 1) sont rappelées dans l'appendice en fin de volume. Pour bien comprendre la suite du livre, il est utile d'avoir bien en tête le premier paragraphe de l'appendice.

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application,  $A$  une partie de  $X$  et  $B$  une partie de  $Y$ , on pose

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in Y ; \exists x \in A, f(x) = y\}$$

et

$$f^{-1}(B) = \{x \in X ; f(x) \in B\}.$$

⚡ Ici, contrairement au choix fait dans Algèbre et Géométrie, 2<sup>e</sup> année, nous utilisons la notation « usuelle »  $f^{-1}(B)$  et non  $f^*(B)$  pour l'image réciproque par  $f$  d'une partie  $B$  de  $Y$ . Cette notation ne signifie pas que  $f$  est bijective.

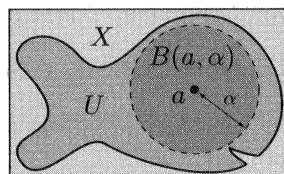
Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow X'$  une application et  $a$  un point de  $X$ . Une façon équivalente de dire que  $f$  est continue au point  $a$  est  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x \in B(a, \alpha), f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$  ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)).$$

Dans cette description, l'ensemble  $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$  n'est pas forcément une boule centrée en  $a$ , mais il contient une boule centrée en  $a$ . Cela nous conduit à la définition suivante.

### Définition

Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $U$  un sous-ensemble de  $X$  et  $a \in X$ . On dit que  $U$  est un *voisinage* de  $a$  s'il contient une boule ouverte centrée en  $a$ , autrement dit, s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tel que  $B(a, \alpha) \subset U$ .



**Proposition 1.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $a$  un élément de  $X$ .

- a) Toute partie de  $X$  contenant un voisinage de  $a$  est un voisinage de  $a$ .
- b) L'intersection de deux voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .

**Démonstration**

- a) Soient  $U$  un voisinage de  $a$  et  $V$  une partie de  $X$  contenant  $U$ . Puisque  $U$  est un voisinage de  $a$ , il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset U \subset V$ ; donc  $V$  est un voisinage de  $a$ .
- b) Soient  $U, V$  des voisinages de  $a$ . Il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset U$  et  $s \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, s) \subset V$ ; notons  $t$  le plus petit des nombres  $r$  et  $s$ ; alors  $B(a, t)$  est à la fois incluse dans  $U$  et dans  $V$  i.e.  $B(a, t) \subset U \cap V$ ; on a montré que  $U \cap V$  est un voisinage de  $a$ . ■

**Exemple.** Soient  $x$  un point de  $\mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Dans  $\mathbb{R}$  muni de la métrique usuelle, la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  est l'intervalle ouvert  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ . Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert contenant  $x$  (où  $a < b$ ,  $a$  pouvant être égal à  $-\infty$  et  $b$  à  $+\infty$ ). Notons  $r$  un nombre réel strictement positif tel que  $a \leq x - r$  et  $x + r \leq b$ ; on a  $x \in ]x - r, x + r[ \subset ]a, b[$ . A l'aide de la prop. 1 on obtient l'énoncé suivant.

Soient  $x$  un élément de  $\mathbb{R}$  et  $V$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) l'ensemble  $V$  est un voisinage de  $x$  ;
- ii) il existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset V$  ;
- iii) il existe un intervalle ouvert contenant  $x$  et inclus dans  $V$ .

La continuité des fonctions entre espaces métriques s'exprime bien en termes de voisinages : une application  $f$  d'un espace métrique  $X$  dans un espace métrique  $X'$  est continue en un point  $a$  de  $X$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$  est un voisinage de  $a$ . On peut même exprimer la continuité uniquement en termes de voisinages.

**Proposition 2.** Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow X'$  une application et  $a$  un élément de  $X$ . L'application  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si, pour tout voisinage  $V$  de  $f(a)$  dans  $X'$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$  dans  $X$ .

**Démonstration.** En effet, supposons  $f$  continue en  $a$ . Pour tout voisinage  $V$  de  $f(a)$ , il existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(f(a), \varepsilon) \subset V$ . Alors  $f^{-1}(V)$  contient le voisinage  $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$  de  $a$ ; c'est donc un voisinage de  $a$ .

Inversement, supposons que pour tout voisinage  $V$  de  $f(a)$  dans  $X'$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$  dans  $X$ . Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $B(f(a), \varepsilon)$  est un voisinage de  $f(a)$ , donc  $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$  est un voisinage de  $a$ . Par suite,  $f$  est continue en  $a$ . ■