EXERCICES ET MÉTHODES

AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

Yves Granjon

TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES

AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

LICENCES, IUT, ÉCOLES D'INGÉNIEURS

DUNOD

Illustration de couverture : asharkyu/ShutterStock

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083593-5

Table des matières

Modélisation des systèmes linéaires, notion de fonction de transfert

1

MOTS-CLÉS

Signaux, entrées, sorties, systèmes linéaires, transformation de Laplace, propriétés de la transformée de Laplace, échelon, rampe, impulsion, fonction de transfert, pôles, zéros, théorème du retard, résolution de problèmes.

La mise en évidence des principes fondamentaux de l'automatique nécessite une modélisation particulière des systèmes que l'on souhaite piloter. Notre propos se limitant, dans cet ouvrage, à l'automatique des systèmes linéaires continus, nous nous limiterons à la modélisation simple et classique conduisant à la notion de fonction de transfert. Ce premier chapitre présente tout ce que le lecteur doit savoir pour manipuler ce type de modèle.

Fiche 1

Systèmes et signaux

Introduction

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses R à des sollicitations S (figure 1.1). Ainsi, un système électrique pourra être étudié et caractérisé en exprimant une tension de sortie (réponse) en fonction d'une tension d'entrée (sollicitation). Ou encore, la position d'un amortisseur de véhicule (réponse) pourra être étudiée en fonction de l'excitation produite par les irrégularités de la route. Un faisceau de lumière (sollicitation) dirigé vers une face d'un matériau et qui ressort au travers d'une autre face (réponse) peut par exemple renseigner sur l'état dudit matériau.

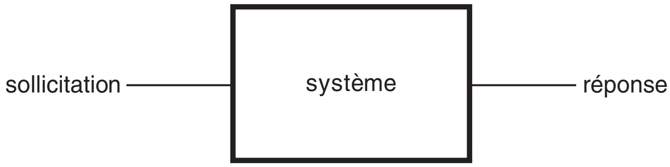

Figure 1.1

Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la quasi-totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique, etc. Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé sur le schéma de la figure 1.1.

Dans la réalité, les systèmes peuvent posséder une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties, certaines sorties pouvant même éventuellement être considérées comme de nouvelles entrées ; c'est le cas des systèmes bouclés qui jouent un rôle important en automatique et nous allons nous y intéresser particulièrement.

Nous allons déjà étudier la manière dont le fonctionnement de tels systèmes peut être décrit, à partir de modèles mathématiques plus ou moins sophistiqués (en tout cas adaptés à la complexité du problème). Ceci nous permettra de répondre à différents types de question, par exemple :

- Quelle sera la réponse d'un système quelconque à telle ou telle sollicitation ? (Aspect prédictif.)
- De quoi se compose un système qui fournit telle réponse à telle sollicitation ? (Aspect caractérisation, identification, mais aussi diagnostic et détection de défauts.)
- Comment adapter ou régler un système pour qu'il fournisse une réponse donnée à une certaine sollicitation ?
- D'autres questions se poseront tout au long de cet ouvrage. Il est d'ores et déjà évident qu'une meilleure connaissance de ces systèmes conditionne non seulement leur utilisation, mais également tous les concepts physiques qui y sont associés.

Notion de signal

Nous pouvons donc avoir une première approche des systèmes en considérant le couple (sollicitation - réponse).

Imaginons un système optique réfléchissant vers lequel on dirige un faisceau de lumière. Le faisceau réfléchi constitue en quelque sorte une information, au sens où il est porteur d'une certaine signification. Nous le qualifierons de signal, tout comme le faisceau incident, puisqu'on ne saurait admettre que la réponse d'un système soit porteuse d'information si la sollicitation ne l'était pas.

D'une manière générale, toute sollicitation ou réponse d'un système sera considérée comme un signal. Les sollicitations ou excitations sont des signaux d'entrée et les réponses sont des signaux de sortie.

Pour le moment, nous ne considérerons que des systèmes mono-entrée, mono-sortie. Par convention, l'entrée sera notée e et la sortie sera notée s.

Signaux temporels

Le moyen qui *a priori* semble le plus naturel pour décrire un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps. Ainsi les formes $e(t)$ et $s(t)$ sont-elles des représentations temporelles des signaux e et s.

Nous verrons un peu plus tard que ce mode de représentation n'est pas toujours le plus intéressant. Toutefois, dans l'immédiat, nous nous limiterons à cette description temporelle de l'information.

Ainsi, on peut dire qu'un système quelconque est capable de prendre un signal $e(t)$ et de la transformer en un signal $s(t)$.

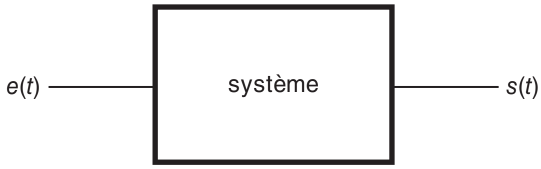

Figure 1.2

• **Principe de causalité**

Les signaux temporels possèdent une propriété essentielle sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir à maintes reprises : un effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause. Il s'agit du principe de causalité qui n'est pas qu'une vérité de Lapalisse comme nous aurons l'occasion de nous en rendre compte.

Signaux non temporels

La théorie des signaux ne traite pas que des signaux temporels. Si par exemple on considère une image en noir et blanc, statique sur un écran, le signal que constitue cette image peut être considéré comme une luminosité dépendant de deux variables spatiales (x, y). Dans ce cas, la variable temps n'a rien à voir avec le problème. D'autres cas pourraient être cités en exemple. Dans ces cas où t n'intervient pas, on peut s'attendre à ce que le principe de causalité ne soit pas respecté.

Il n'est pas question ici d'ébaucher une classification des différents types de signaux. Celle-ci sera abordée plus tard. Nous utiliserons dans la suite de ce chapitre, l'exemple de signaux temporels appliqués à des systèmes simples : les systèmes linéaires.

Fiche 2

Les systèmes linéaires

Considérons un système et un signal d'entrée $e(t)$ qui est une combinaison linéaire de n signaux :

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \cdots + \lambda_n e_n(t)$$

On définira comme système linéaire tout système qui conserve au niveau de sa sortie la combinaison linéaire d'entrée, chaque $s_i(t)$ étant la sortie correspondant à $e_i(t)$.

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \cdots + \lambda_n s_n(t)$$

La plupart du temps, ces systèmes sont régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Soit $e(t)$ le signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + be(t)$$

Ces systèmes conservent toutes les opérations linéaires (dérivation, intégration, ...). Le plus grand des deux indices n et m est appelé ordre du système.

Lorsque le système est effectivement excité par un signal $e(t)$, cette équation différentielle possède effectivement un second membre. Si le système est libre et isolé, le second membre est nul.

Remarque

Nous ne nous intéresserons, dans cet ouvrage, qu'aux systèmes linéaires et aux signaux temporels continus ; les notions qui suivent ne s'appliquent donc qu'à de tels systèmes, dits linéaires à temps continu.

Fiche 3

Transformation de Laplace

Définition

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle $s(t)$ telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace $L(s)$ comme la fonction S de la variable complexe p telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt$$

La fonction $S(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \tau + j\omega$).

La transformée de Laplace d'une fonction $s(t)$ n'existe pas dans tous les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle τ de la variable p est supérieure à une valeur donnée α appelée seuil de convergence.

D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulles pour $t < 0$) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe. La fonction $s(t)$ s'appelle l'original de $S(p)$, ou encore sa transformée inverse.

Propriétés fondamentales

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de certains signaux.

Remarque

Nous verrons plus loin que la connaissance de ces quelques propriétés d'une part et d'une dizaine de transformées de Laplace usuelles, d'autre part, permet de déduire pratiquement n'importe quelle transformée de Laplace.

Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes. Si f et g sont deux fonctions temporelles possédant chacune une transformée de Laplace, on a :

$$L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g]$$

En particulier : $L[f+g] = L[f] + L[g]$ et $L[\alpha f] = \alpha L[f]$

Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Soit $F(p)$ sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de $F(p)$:

$$\frac{df}{dt} \to pF(p) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée *n-ième* est :

$$\frac{d^n f}{dt^n} \to p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} \left(p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f}{dt^{k-n-1}}(0) \right)$$

Par exemple :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Une première constatation s'impose en observant ces expressions : la transformation de Laplace transforme l'opérateur *dérivation* en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en $t = 0$ des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

Remarque

Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \to pF(p) \quad ; \quad \frac{d^n f}{dt^n} \to p^n F(p)$$

Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction.

On a : $P(t) = \int f(t) t \to \dfrac{F(p)}{p} + \dfrac{P(0)}{p}$

Là encore, l'opérateur *intégration* se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

Remarque

Dans le cas où la condition initiale $P(0)$ est nulle, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement la relation suivante :

$$P(t) = \int f(t)t \to \frac{F(p)}{p}$$

Propriétés de changement d'échelle

$$f(kt) \to \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right) \qquad ; \qquad f\left(\frac{t}{k}\right) \to kF(p)$$

Remarque

On veillera à ne pas confondre ces deux propriétés avec la linéarité de la transformation de Laplace.

Théorème du retard

Considérons la fonction $f(t-\tau)$, autrement dit la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 1.3), autrement dit un retard d'un temps τ.

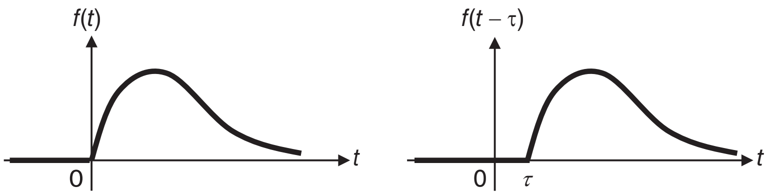

Figure 1.3

Calculons la transformée de Laplace de cette fonction.

$$\text{On a :}\ \ f(t) \to F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $u = t + \tau$:

$$F(p) = \int_\tau^{+\infty} f(u-\tau)e^{-p(u-\tau)}du$$

En remarquant que la fonction $f(u-\tau)$ est nulle pour $t < \tau$, on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que τ :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(u-\tau)e^{-p(u-\tau)}du$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{p\tau} f(u-\tau)e^{-pu}du$$

$$F(p) = e^{p\tau}\int_0^{+\infty} f(u-\tau)e^{-pu}du$$

Par définition, $\int_0^{+\infty} f(u-\tau)e^{-pu}du$ est la transformée de Laplace de $f(t-\tau)$.

$$\text{D'où : } f(t-\tau) \quad \rightarrow \quad F(p)e^{-p\tau}$$

Cette relation constitue le théorème du retard qui permet de calculer la transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un temps τ si l'on connaît la transformée de Laplace de la fonction non retardée.

Théorème de la valeur initiale

Considérons la transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

La transformée de Laplace de la dérivée de *f(t)* est :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0)$$

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a $e^{-pt} \rightarrow 0$, donc : $pF(p) - f(0) \rightarrow 0$.

Nous retiendrons : $f(0^+) = \lim_{p \to +\infty} \left[pF(p)\right]$

Ceci constitue le théorème de la valeur initiale qui permet d'obtenir une expression de la valeur de f au voisinage de 0 par valeur supérieure en fonction de sa transformée de Laplace.

Théorème de la valeur finale

Encore plus utile que le théorème précédent, le théorème de la valeur finale permet de calculer la limite quand t tend vers l'infini d'une fonction temporelle $f(t)$ en connaissant uniquement sa transformée de Laplace :

$$\lim_{t \to +\infty} [f(t)] = \lim_{p \to 0} \left[pF(p)\right]$$

Propriétés diverses

Sans être fondamentales, les trois propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles lors du calcul de certaines transformées de Laplace :

$$e^{-at}f(t) \quad \rightarrow \quad F(p+a)$$

$$tf(t) \quad \rightarrow \quad -\frac{dF}{dp}$$

$$\frac{f(t)}{t} \quad \rightarrow \quad \int_0^{+\infty} F(p)dp$$

Transformée de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(p)$ de retrouver son original, autrement dit la fonction

$f(t)$ dont elle est la transformée de Laplace. Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe :

$$\text{Si : } f(t) \quad \rightarrow \quad F(p)$$

$$\text{Alors : } f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}dp$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante c supérieure au seuil de convergence α de $F(p)$.

Remarque

Que le lecteur se rassure : les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares : nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction $F(p)$.

Fiche 4

Transformées de Laplace de signaux usuels

Échelon unité

L'échelon unité (figure 1.4) est la fonction $u(t)$ telle que $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

$$\text{On a alors : } u(t) \quad \rightarrow \quad U(p) = \frac{1}{p}$$

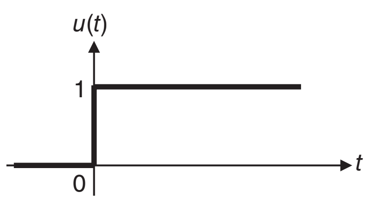

Figure 1.4

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire), d'amplitude A, aura pour transformée de Laplace :

$$f(t) = Au(t) \quad \rightarrow \quad F(p) = \frac{A}{p}$$

Rampe ou échelon de vitesse

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction $u(t)$ précédente. On la note en général $v(t)$. Elle est nulle pour t négatif et est égale à t pour t positif ou nul (figure 1.5).

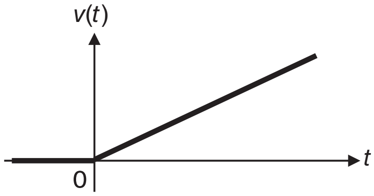

Figure 1.5

On peut écrire : $v(t) = t \cdot u(t)$

On a évidemment : $V(p) = \dfrac{U(p)}{p} = \dfrac{1}{p^2}$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, toute rampe de type $s(t) = kt$ (pour t positif) aura pour transformée de Laplace :

$$s(t) = kt \quad \rightarrow \quad S(p) = \frac{k}{p^2}$$

Impulsion unitaire

En dérivant cette fois la fonction $u(t)$, on obtient une fonction habituellement notée $\delta(t)$ et appelée impulsion unitaire ou impulsion de Dirac.

Il s'agit en théorie d'une fonction nulle pour tout t sauf pour $t = 0$ où elle a une valeur infinie. L'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction $\delta(t)$ et l'axe des t vaut 1. Le schéma de la figure 1.6 donne une idée de cette impulsion en faisant tendre le paramètre θ vers 0.

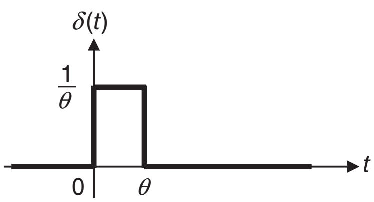

Figure 1.6

On a alors : $\delta(t) \rightarrow \Delta(p) = 1$

Signal sinusoïdal

On considère un signal $s(t)$ nul pour $t < 0$ et valant $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t \geq 0$.

On a alors : $S(p) = \dfrac{p \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{p^2 + \omega^2}$

On retiendra essentiellement les deux résultats suivants :

pour $s(t) = \sin \omega t$, $S(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, et pour $s(t) = \cos \omega t$, $S(p) = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$.

Fiches
QCM
Vrai ou faux ?
Exercices
1. Modélisation des systèmes linéaires…

Signaux quelconques

Face à un signal quelconque, on peut certes entreprendre le calcul direct de la transformée de Laplace. Ce calcul peut parfois être relativement délicat. On peut aussi se référer à une table de transformées de Laplace telle que celle fournie en annexe.

Les tables ne contiennent peut-être pas directement la fonction qui nous intéresse, mais les propriétés fondamentales et la linéarité de la transformation permettent la plupart du temps de se ramener à des compositions simples.

Ceci est notamment très utile lorsque l'on cherche l'original d'une fonction $F(p)$ et que celle-ci se présente sous la forme d'une fraction rationnelle. Il faudra alors penser à la décomposer en éléments simples qui seront facilement identifiables dans la table.

Fiche 5

Fonction de transfert

Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$. On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales, il vient :

$$a_n p^n S(p) + \cdots + a_1 pS(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \cdots + b_1 pE(p) + b_0 E(p)$$

soit : $S(p)\left[a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0\right] = E(p)\left[b_m p^m + \cdots + b_1 + b_0\right]$

D'où : $\dfrac{b_m p^m + \cdots + b_1 + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} = \dfrac{S(p)}{E(p)}$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée fonction de transfert du système et communément notée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p, il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

$$G(p) = \frac{b_m(p - z_m)(p - z_{m-1}) \cdots (p - z_1)}{a_n(p - p_n)(p - p_{n-1}) \cdots (p - p_1)}$$

Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelées les zéros de la fonction de transfert. Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels. Nous verrons plus loin que l'étude, le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes.

Mise en cascade de deux systèmes

Sur le schéma de la figure 1.7, nous avons placé deux systèmes en cascade, respectivement de fonction de transfert $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

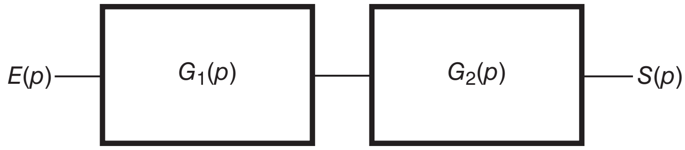

Figure 1.7

À la condition expresse que la mise en cascade ne perturbe pas le fonctionnement du système situé en amont, la fonction de transfert globale du système composé des deux éléments a pour expression :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)$$

Il convient donc d'être particulièrement vigilant avant d'utiliser cette propriété, notamment pour les systèmes électriques qui, en règle générale, sont affectés par la présence d'une charge à leur sortie.

Original d'une fonction de transfert

Bien qu'une fonction de transfert $G(p)$ ne soit pas, à proprement parler, la transformée de Laplace d'un signal, on peut calculer sa transformée inverse $g(t)$ que l'on appelle l'original de la fonction de transfert.

Le principal intérêt de ce concept réside dans le fait que si on injecte une impulsion de Dirac dans un système de fonction de transfert $G(p)$, le signal de sortie $s(t)$ sera égal à $g(t)$.

En effet, si $E(p) = 1$, on a $S(p) = G(p)$.

La réponse impulsionnelle d'un système est donc l'original de sa fonction de transfert. Cette propriété (bien que dans la réalité il soit impossible de construire une impulsion de Dirac parfaite), joue un rôle important dans l'identification des systèmes.

Fiche 6

Méthode de résolution

Principe

La première utilisation intéressante du modèle Laplacien réside dans la résolution systématique de problèmes physiques dans lesquels on possède un système linéaire quelconque régi par une équation différentielle clairement identifiée. On injecte à l'entrée de ce système un signal donné et on souhaite déterminer quel est le signal de sortie.

La connaissance de la fonction de transfert du système (qui s'écrit immédiatement à partir de l'équation différentielle) fournit évidemment la relation entre $S(p)$ et $E(p)$

c'est-à-dire entre les transformées de Laplace respectives de la sortie et de l'entrée du système :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

Il suffit donc de calculer ou de déterminer à partir des tables, la transformée de Laplace de *e(t)*, puis d'effectuer le calcul de *S(p)* puis, enfin, toujours à partir des tables, de déterminer l'original de *S(p)*.

Remarque

Un rapide coup d'œil sur la table de transformées de Laplace fournie en annexe nous montre que la plupart des transformées des signaux usuels se présentent sous la forme d'une fraction rationnelle simple de polynômes de la variable p. La fonction de transfert se présentant toujours sous la forme d'une fraction rationnelle, il est clair qu'il en sera de même pour la transformée de Laplace du signal de sortie, qui ne sera rien d'autre que le produit de deux fractions rationnelles. En décomposant la fraction rationnelle $S(p)$ en éléments simples que l'on retrouvera facilement dans la table et en utilisant la propriété de linéarité de la transformation, on calculera aisément l'expression de la sortie $s(t)$.

Exemples

Système du second ordre sollicité par un échelon unitaire

Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon. Soit $e(t) = u(t)$. On cherche à identifier l'expression du signal de sortie $s(t)$.

Le calcul de la fonction de transfert ne pose aucun problème ; on applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle :

$$p^2S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

$$S(p)\left[p^2 + 4p + 3\right] = 2E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}$$

Remarque

Avec un peu d'habitude, l'écriture de la fonction de transfert deviendra immédiate et ne nécessitera plus l'application stricte de la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle. En effet, les coefficients de l'équation différentielle se retrouvent dans le même ordre dans les deux polynômes de la fraction rationnelle $G(p)$.

Nous savons par ailleurs que $E(p) = \dfrac{1}{p}$ (échelon unitaire).

On en déduit donc :

$$S(p) = \frac{2}{p(p^2+4p+3)}$$

En remarquant que $S(p) = \dfrac{2}{p(p^2+4p+3)} = \dfrac{2}{p(p+3)(p+1)}$, on peut envisager la décomposition de $S(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+3)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+1}$$

$$S(p) = \frac{A(p+3)(p+1) + Bp(p+1) + Cp(p+3)}{p(p+3)(p+1)}$$

$$S(p) = \frac{(A+B+C)p^2 + (4A+B+3C)p + 3A}{p(p+3)(p+1)}$$

Identifions : $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+B+3C=0 \\ 3A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{2}{3} \\ B=\dfrac{2}{3} \\ C=-1 \end{cases}$

D'où : $S(p) = \dfrac{2}{3p} + \dfrac{1}{3(p+3)} - \dfrac{1}{p+1} = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p)$

Compte tenu de la linéarité de la transformation de Laplace, on aura évidemment : $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$, chaque $s_i(t)$ étant l'original de $S_i(p)$.

La table de transformées de Laplace nous donne, sans calcul :

$$\frac{2}{3p} \rightarrow \frac{2}{3}u(t)$$

$$\frac{1}{3(p+3)} \rightarrow \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$-\frac{1}{p+1} \rightarrow -e^{-t}u(t)$$

Au final : $s(t) = \left[\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}e^{-3t} - e^{-t}\right]u(t)$

Remarque

Les expressions temporelles fournies par les tables ne sont valables que pour $t > 0$; ces fonctions sont nulles pour $t < 0$. La présence de $u(t)$ dans ces expressions suffit à nous le rappeler. Parfois, par abus d'écriture, on peut omettre $u(t)$ à condition de ne pas perdre de vue que l'expression n'est valable que pour $t > 0$ et que toutes les fonctions que nous utilisons sont nulles pour $t < 0$.

Étude de la réponse d'un circuit RC à une entrée en rampe

Considérons le circuit RC présenté sur la figure 1.8. Le signal d'entrée injecté est $e(t) = 3t$ et la sortie correspond à $s(t)$ dont on cherche l'expression.

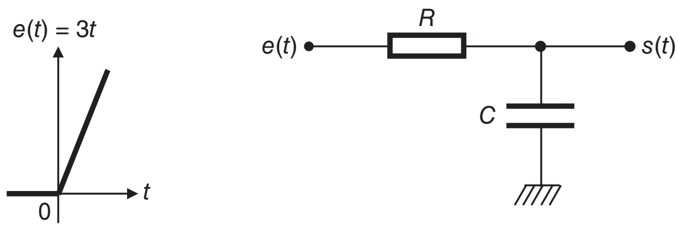

Figure 1.8

Considérons le courant $i(t)$ qui circule à la fois dans R et dans le condensateur C. Les équations électriques du système sont :

$$\begin{cases} e(t) - s(t) = Ri(t) \\ i(t) = C\dfrac{ds}{dt} \end{cases}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$RC\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

Nous sommes donc en présence d'un système du premier ordre dont la fonction de transfert s'obtient immédiatement :

$$G(p) = \frac{1}{RCp + 1}$$

Par ailleurs, $e(t) = 3t \quad \Rightarrow \quad E(p) = \dfrac{3}{p^2}$

d'où : $S(p) = \dfrac{3}{p^2\,(RCp + 1)}$

D'après la table de transformées de Laplace, on a :

$$S(p) = \frac{1}{p^2(1 + \tau p)} \quad \rightarrow \quad s(t) = \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1\right)u(t)$$

d'où on tire immédiatement :

$$S(p) = \frac{3}{p^2(1 + RCp)} \quad \Rightarrow \quad s(t) = 3RC\left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1\right)u(t)$$

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. Un système linéaire :

❑ a. Délivre en sortie un signal proportionnel au signal d'entrée.

❑ b. Est régi par une équation différentielle linéaire.

❑ c. Peut posséder plusieurs sorties.

❑ d. Possède une seule entrée.

2. La transformée de Laplace d'une fonction du temps :

❑ a. Peut être calculée quelle que soit la fonction du temps.

❑ b. Est une fonction complexe d'une variable réelle.

❑ c. N'existe que pour les signaux causaux.

❑ d. Résulte d'une transformation linéaire.

3. La transformée de Laplace d'un échelon unitaire :

❑ a. Est égale à $\frac{1}{p}$.

❑ b. Est égale à 1.

❑ c. Est égale à la dérivée de la transformée de Laplace d'une rampe unitaire.

❑ d. Est égale à la primitive de la transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac.

4. La transformation de Laplace inverse :

❑ a. Permet de déterminer le signal d'entrée d'un système si on connaît son signal de sortie.

❑ b. Permet de déterminer l'original d'une transformée de Laplace.

❑ c. Permet de calculer la dérivée d'une transformée de Laplace.

❑ d. Permet de calculer la primitive d'une transformée de Laplace.

5. Laquelle ou lesquelles de ces propositions sont vraies ?

❑ a. Le théorème du retard permet de calculer la transformée de Laplace d'une somme de fonctions temporelles.

❑ b. Le théorème de la valeur finale permet de prédire la limite quand $t \to \infty$ du signal de sortie d'un système linéaire.

❑ c. Les propriétés de changement d'échelle sont une conséquence de la linéarité de la transformation de Laplace.

❑ d. On détermine la transformée de Laplace d'une primitive d'une fonction temporelle en divisant par p la transformée de Laplace de cette fonction temporelle.

6. **La fonction de transfert d'un système régi par l'équation différentielle $2\dfrac{d^2s}{dt^2} + s(t) = \dfrac{de}{dt} + 3e(t)$ est :**

❑ a. $G(p) = \dfrac{3}{2p^2 + 1}$.

❑ b. $G(p) = \dfrac{2p^2 + 1}{p + 3}$.

❑ c. $G(p) = \dfrac{3p}{2p^2 + 1}$.

❑ d. $G(p) = \dfrac{p + 3}{2p^2 + 1}$.

7. **Laquelle ou lesquelles de ces affirmations sont vraies ?**

❑ a. Les pôles d'une fonction de transfert sont les racines de son numérateur.

❑ b. Un système d'ordre 2 possède obligatoirement deux pôles (ou un pôle double).

❑ c. Le nombre de zéros d'une fonction de transfert est toujours inférieur ou égal au nombre de ses pôles.

❑ d. Tout système d'ordre 1 possède un pôle et un zéro.

8. **L'original d'une fonction de transfert :**

❑ a. Est la transformée de Laplace inverse de sa réponse indicielle.

❑ b. Est sa transformée de Laplace inverse.

❑ c. Correspond à sa réponse impulsionnelle.

❑ d. Est une impulsion de Dirac pour tout système d'ordre 1.

Réponses

1. **b et c.** Par définition, un système linéaire est régi par une équation différentielle linéaire (le plus souvent à coefficients constants). Il peut posséder plusieurs entrées et plusieurs sorties.

2. **c et d.** On ne peut calculer une transformée de Laplace que pour des signaux causaux que l'on peut considérer comme nuls avant un certain instant (pris comme origine des temps en général). De plus, il est nécessaire que l'intégrale de Laplace converge. Donc il existe des fonctions temporelles qui n'ont pas de transformée de Laplace. Par ailleurs, la transformée de Laplace est une fonction complexe d'une variable complexe p.

Enfin, la transformation de Laplace est bien une transformation linéaire.

3. **a.** Attention en ce qui concerne les propositions c et d : l'échelon unitaire est la dérivée d'une rampe et la primitive d'une impulsion de Dirac et non pas sa transformée de Laplace.

4. **b.** Il s'agit là de la définition de la transformée inverse.

5. **b et d.** Le théorème du retard permet de déterminer la transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un temps τ et les propriétés de changement d'échelle n'ont rien à voir avec la linéarité de la transformation de Laplace.

6. **d.** $2\dfrac{d^2s}{dt^2} + s(t) = \dfrac{de}{dt} + 3e(t) \Rightarrow 2p^2S(p) + S(p) = pE(p) + 3E(p)$

Soit : $G(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{p+3}{2p^2+1}$

7. Aucune des 4 affirmations n'est vraie.

8. **c.** Voir fiche 5.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. La transformation de Laplace doit sa linéarité à celle de l'intégration.	☐	☐
2. La transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac est la dérivée de celle de l'échelon unitaire.	☐	☐
3. Le théorème de la valeur initiale permet d'obtenir la valeur d'un signal au voisinage de $t = 0$ par valeur inférieure en fonction de sa transformée de Laplace.	☐	☐
4. En sommant un échelon de hauteur 2 et un échelon de hauteur -1, on obtient un échelon de hauteur 1, autrement dit, un échelon unitaire.	☐	☐
5. La transformée de Laplace d'une fonction $t \times s(t)$ est égale à l'opposé de la dérivée par rapport à p de la transformée de Laplace de $s(t)$.	☐	☐
6. En mettant en cascade deux systèmes d'ordre 1, on obtient un système d'ordre 2.	☐	☐
7. Si $s(t)$ possède une transformée de Laplace $S(p)$, alors la fonction $s\left(\frac{t}{2}\right)$ possède la transformée de Laplace $\frac{S(2p)}{2}$.	☐	☐
8. Si deux systèmes linéaires sont régis par la même équation différentielle, alors ils possèdent la même fonction de transfert.	☐	☐
9. Un système linéaire d'ordre 3 possède au maximum trois pôles.	☐	☐
10. Un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{p}{p+10}$ est régi par l'équation différentielle $\frac{ds}{dt} + 10s(t) = \frac{de}{dt}$.	☐	☐

Réponses

1. **Vrai.** L'intégration est linéaire et comme la transformation de Laplace est définie par une intégrale, elle l'est aussi.

2. **Faux.** Ce n'est pas la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac qui est la dérivée de celle de l'échelon unitaire mais c'est l'impulsion de Dirac elle-même qui est la dérivée de l'échelon unitaire (toutes deux fonctions du temps).

3. **Faux.** Le théorème de la valeur initiale permet d'obtenir la valeur d'un signal au voisinage de $t = 0$ par valeur supérieure et non pas inférieure.

4. **Vrai.** Cela se vérifie en sommant les deux fonctions temporelles mais aussi en sommant leurs transformées de Laplace : $\frac{2}{p} + \left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$.

5. **Vrai.** Voir propriétés diverses de la transformée de Laplace.

6. **Vrai.** En règle générale.

7. **Faux.** Si $s(t)$ possède pour transformée de Laplace $S(p)$, alors la fonction $s\left(\frac{t}{2}\right)$ possède la transformée de Laplace $2S(2p)$. Voir propriétés de changement d'échelle avec $k = \frac{1}{2}$.

8. **Vrai.** La fonction de transfert n'est *in fine* qu'une autre écriture de l'équation différentielle.

9. **Vrai.** S'il en possédait plus, il serait d'ordre plus élevé.

10. **Vrai**. $\frac{ds}{dt} + 10s(t) = \frac{de}{dt} \Rightarrow pS(p) + 10S(p) = pE(p) \Rightarrow G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{p}{p+10}$.

Entraînement

Exercices

1. On considère la fonction $s(t)$ définie par :

$s(t) = 0$ pour $t < 0$.

$s(t) = \sin \omega t$ pour $t \geq 0$.

Déterminer la transformée de Laplace $S(p)$ de cette fonction en effectuant le calcul direct à partir de la forme intégrale de sa définition.

Conseil méthodologique
Poser l'expression de la transformée de Laplace et transformer l'expression de la fonction sinus en une combinaison d'exponentielles.

2. On considère une impulsion $s(t)$ de largeur T et hauteur A telles que représentée sur la figure 1.9 :

$s(t) = A$ pour $t < 0$ et pour $t > T$.

$s(t) = A$ pour $0 \leq t \leq T$.

Calculer la transformée de Laplace de ce signal.

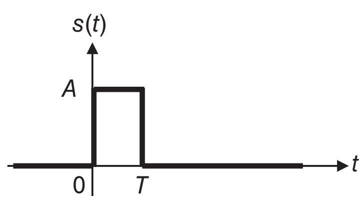

Figure 1.9

Conseil méthodologique
Décomposer le signal en une somme ou une différence de deux signaux simples.

3. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $s(t)$ définie par :

$s(t) = 0$ pour $t < 0$.

$s(t) = \dfrac{At}{T}$ pour $0 \leq t \leq T$.

$s(t) = A$ pour $t > T$.

Conseil méthodologique

Tracer le graphe de la fonction et chercher à la décomposer en une somme ou une différence de plusieurs fonctions simples.

4. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ définie par $f(t) = \cos^2 \omega t$ pour $t > 0$ et $f(t) = 0$ partout ailleurs.

Conseil méthodologique

Décomposer cette fonction, à l'aide de la formule de trigonométrie adéquate, en une somme de fonctions élémentaires dont on connaît les transformées de Laplace.

5. Calculer la transformée de Laplace inverse de l'expression $F(p) = \dfrac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p}$.

Conseil méthodologique

Factoriser le dénominateur et décomposer la fraction en éléments simples.

6. On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^3s}{dt^3} + 3\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + s(t) = 2\frac{de}{dt} + e(t)$$

Calculer sa fonction de transfert et déterminer ses pôles et ses zéros.

Conseil méthodologique

Cet exercice ne présente aucune difficulté. Il suffit d'appliquer la transformée de Laplace à chaque terme de l'équation.

7. On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$T\frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système. En déduire $S(p)$ si le signal d'entrée est un échelon unité.

Déterminer la valeur finale de $s(t)$ en utilisant le théorème de la valeur finale.

Calculer l'expression de $s(t)$ et retrouver le résultat précédent.

Pour quelle valeur t_0 de t, $s(t)$ atteint-il 95 % de sa valeur finale ?

Conseil méthodologique

Pas de difficulté particulière. La fonction de transfert s'obtient immédiatement et la table des transformées de Laplace fournit directement l'expression du signal de sortie.

8. On considère le montage électrique représenté sur la figure 1.10.

Déterminer l'équation différentielle qui lie $e(t)$ à la tension de sortie $s(t)$.

En déduire la fonction de transfert du système.

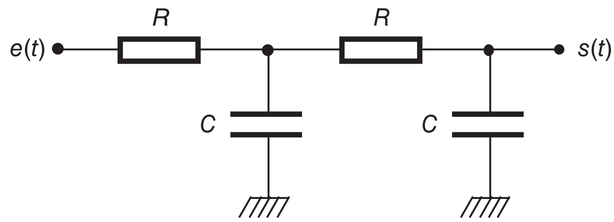

Figure 1.10

Conseil méthodologique

Le système électrique étudié résulte de la mise en cascade de deux systèmes simples et identiques. Attention, la présence du second perturbe le fonctionnement du premier et il n'est pas possible, ici, de considérer que la fonction de transfert globale correspond au simple produit des deux fonctions de transfert.

Réponses

1. Décomposons la fonction sinus en une combinaison d'exponentielles complexes :

$$s(t) = \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Appliquons la définition de la transformée de Laplace :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \sin\omega t \cdot e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-pt}dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{j\omega t - pt}dt - \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{-j\omega t - pt}dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(p-j\omega)t}}{-(p-j\omega)}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(p+j\omega)t}}{-(p+j\omega)}\right]_0^{+\infty}$$

Si la partie réelle de p est positive (ce qui corrobore l'existence d'un seuil de convergence), on a :

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[0 - \frac{1}{-(p-j\omega)}\right] - \frac{1}{2j}\left[0 - \frac{1}{-(p+j\omega)}\right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(p-j\omega)} - \frac{1}{(p+j\omega)}\right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{(p+j\omega)-(p-j\omega)}{(p-j\omega)(p+j\omega)}\right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{2j\omega}{p^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Ce qui correspond bien au résultat recherché.

2. Nous pouvons remarquer comme indiqué sur la figure 1.11, que ce signal est la différence de deux signaux : $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$,

avec $s_1(t)$: échelon de hauteur A débutant à l'instant 0,

et $s_2(t)$: échelon de hauteur A débutant à l'instant T.

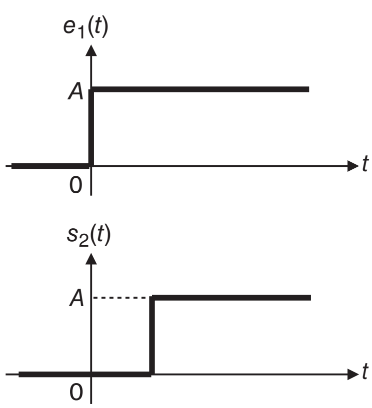

Figure 1.11

Nous aurons donc (linéarité de la transformée de Laplace) : $S(p) = S_1(p) - S_2(p)$.

avec : $S_1(p) = \dfrac{A}{p}$

et : $S_2(p) = \dfrac{A}{p} e^{-pT}$ (théorème du retard)

d'où : $S(p) = \dfrac{A}{p} - \dfrac{A}{p} e^{-pT} = \dfrac{A}{p}(1 - e^{-pT})$

3. Traçons, pour commencer, le signal $s(t)$ (figure 1.12). Nous pouvons remarquer que ce signal est l'intégrale d'un signal $x(t)$ que l'on peut représenter sur la figure 1.13.

Or, nous connaissons l'expression de la transformée de Laplace de ce signal $x(t)$ à ceci près qu'il s'agit ici d'une impulsion de hauteur A/T (exercice 1.2) :

$$X(p) = \frac{A}{Tp}[1 - e^{-pT}]$$

Comme $s(t)$ est une primitive de $x(t)$, on a :

$$S(p) = \frac{X(p)}{p} = \frac{A}{Tp^2}[1 - e^{-pT}]$$

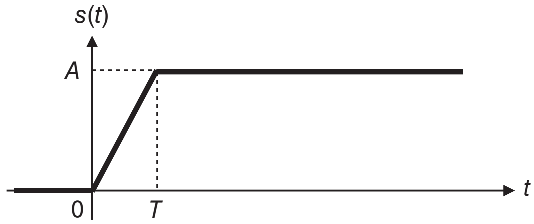

Figure 1.12

Figure 1.13

4. Linéarisons l'expression de la fonction $f(t) = \cos^2 \omega t$ afin de pouvoir l'exprimer sous la forme d'une combinaison de fonctions simples que nous pourrons aisément repérer dans la table :

$$f(t) = \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(\cos 2\omega t + 1) \quad \text{pour } t > 0.$$

La fonction $f(t)$ se décompose donc en une somme de deux signaux :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Avec : $f_1(t) = \dfrac{\cos 2\omega t}{2}$ pour $t > 0$,

et : $f_2(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t > 0$, autrement dit : $f_2(t) = \dfrac{u(t)}{2}$, $u(t)$ étant l'échelon unitaire.

On a donc : $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$

On a de toute évidence : $F_2(p) = \dfrac{1}{2p}$

Par ailleurs, à la lecture de la table, la fonction temporelle $\cos\omega t$ possède pour transformée de Laplace $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

On a donc : $F_1(p) = \dfrac{p}{2(p^2+4\omega^2)}$

En conclusion : $F(p) = F_1(p) + F_2(p) = \dfrac{1}{2p} + \dfrac{p}{2(p^2+4\omega^2)}$

5. Factorisons tout d'abord le dénominateur de l'expression de $F(p)$:

$$F(p) = \frac{3}{p^3+5p^2+6p} = \frac{3}{p(p+3)(p+2)}$$

La décomposition de cette fraction rationnelle nous donne :

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+2} = \frac{A(p^2+5p+6)+B(p^2+2p)+C(p^2+3p)}{p(p+3)(p+2)}$$

Soit : $F(p) = \dfrac{3}{p(p+3)(p+2)} = \dfrac{(A+B+C)p^2+(5A+2B+3C)p+6A}{p(p+3)(p+2)}$

En identifiant, on tire immédiatement :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+2B+3C=0 \\ A=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=1 \\ C=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{p+3} - \frac{3}{2(p+2)}$$

Il suffit à présent de rechercher dans la table des transformées de Laplace les fonctions temporelles originales des trois termes simples qui constituent cette combinaison et d'écrire $f(t)$ comme étant la même combinaison des trois fonctions temporelles originales :

$$f(t) = \left[\frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3e^{-2t}}{2}\right]u(t)$$

6. Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation :

$$p^3S(p) + 3p^2S(p) + 3pS(p) + S(p) = 2pE(p) + E(p)$$

Soit : $S(p)[p^3+3p^2+3p+1] = [2p+1]E(p)$

D'où : $G(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{2p+1}{p^3+3p^2+3p+1}$

Fiches QCM Vrai ou faux ? Exercices 1. Modélisation des systèmes linéaires…

Nous remarquons que le dénominateur se factorise (identité remarquable).

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p+1}{(p+1)^3}$$

La fonction de transfert possède donc un seul zéro $\left(-\frac{1}{2}\right)$ et un pôle triple (-1).

7. La fonction de transfert du système se détermine aisément en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation :

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp+1}$$

Nous en déduisons immédiatement l'expression de $S(p)$:

$$E(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p(Tp+1)}$$

Le théorème de la valeur finale prévoit que :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{p \to 0} \frac{pK}{p(Tp+1)} = K$$

Calculons l'expression de $s(t)$ afin de retrouver le résultat précédent. D'après la table :

$$S(p) = \frac{K}{p(Tp+1)} \qquad \Rightarrow \quad s(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

On a bien : $\lim_{t \to +\infty} s(t) = K$.

L'expression du signal de sortie nous conduit alors à la valeur t_0 de t, pour laquelle $s(t)$ atteint 95 % de sa valeur finale.

On a : $K\left(1 - e^{-\frac{t_0}{T}}\right) = 0{,}95K$

Soit : $1 - e^{-\frac{t_0}{T}} = 0{,}95$

$$\frac{t_0}{T} = -\ln 0{,}05 \approx 3 \quad \Rightarrow \quad t_0 \approx 3T$$

8. Appelons A le point commun aux deux résistances et $v_A(t)$ la tension en ce point. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 1.14) et appliquons la loi des nœuds au point A :

$$\frac{e - v_A}{R} = C\frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A - s}{R}$$

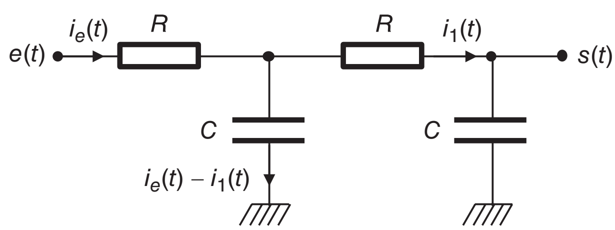

Figure 1.14

Par ailleurs, le courant $i_1(t)$ circulant dans le second condensateur, on peut écrire :

$$C\frac{ds}{dt} = \frac{v_A - s}{R}$$

Tirons de cette équation l'expression de la tension $v_A(t)$ et remplaçons celle-ci dans la première équation :

$$v_A = RC\frac{ds}{dt} + s(t)$$

$$e - RC\frac{ds}{dt} - s(t) = R^2C^2\frac{d^2s}{dt^2} + 2RC\frac{ds}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle qui lie $s(t)$ à $e(t)$:

$$R^2C^2\frac{d^2s}{dt^2} + 3RC\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

La fonction de transfert est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{R^2C^2p^2 + 3RCp + 1}$$