EXERCICES ET MÉTHODES DE

MÉCANIQUE

MÉCANIQUE DU POINT
ET DU SOLIDE INDÉFORMABLE

TOUT EN FICHES

Yves Granjon

EXERCICES ET MÉTHODES DE

MÉCANIQUE

MÉCANIQUE DU POINT ET DU SOLIDE INDÉFORMABLE

LICENCE, IUT, CAPES, ÉCOLES D'INGÉNIEURS

DUNOD

Illustration de couverture : dmitro2009 – shutterstock.com

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-081030-7

Table des matières

Avant-propos

La mécanique est la discipline qui s'intéresse au mouvement et plus généralement au comportement des corps ponctuels ou non lorsque ceux-ci sont soumis à des actions, par exemple des forces extérieures.

Nous abordons dans un premier temps la mécanique du point, plus simple à étudier, puis, la mécanique du solide pour laquelle il est important de bien maîtriser les notions élémentaires de mécanique du point.

Qu'il s'agisse de points ou de solides, la mécanique est une science très vaste dont nous n'abordons dans cet ouvrage que les fondamentaux en les appliquant uniquement aux solides indéformables. Plus tard, le lecteur désireux de poursuivre une étude plus approfondie de ce domaine pourra aborder des sujets encore plus passionnants comme la mécanique des solides déformables, la résistance des matériaux, etc.

Ces sujets nécessiteront sans aucun doute une bonne maîtrise des bases de la mécanique. Nous avons donc tenté de les rassembler dans cet ouvrage en abordant successivement les grands domaines selon lesquels elle est, en général, structurée. Nous parlerons donc d'abord de cinématique du point, discipline dont le but est de décrire géométriquement les mouvements des objets ponctuels, puis la cinétique du point où l'on étudie l'influence de la masse sur les mouvements, puis la dynamique qui relie le mouvement des objets aux actions mécaniques qu'ils subissent. Enfin, les aspects énergétiques des mouvements seront abordés. Ces quatre champs d'étude seront détaillés pour la mécanique du point dans les quatre premiers chapitres puis généralisés au solide indéformable qui, disons-le, peut être considéré comme un ensemble de point. Un chapitre particulier sera consacré aux changements de référentiel, une notion qui nous accompagnera tout au long de cet ouvrage et qui est fondamentale.

La mécanique fait appel à un formalisme mathématique auquel il faut s'entraîner et s'habituer : géométrie, calcul vectoriel, trigonométrie, calcul différentiel et analyse sont des outils courants. En ce sens, la mécanique fait partie des domaines les plus complets des sciences physiques et il est couramment admis qu'être bon en mécanique, c'est être bon en sciences, tout simplement.

C'est pourquoi nous avons privilégié une approche simple des phénomènes décrits, sans pour autant délaisser le nécessaire formalisme sans lequel la résolution d'un problème ne serait qu'un bricolage hasardeux mais sans tomber dans une approche théorique ex-cessive comme celle qu'on rencontre trop souvent dans certains ouvrages. En particulier, cet ouvrage privilégie aussi le raisonnement physique qui, seul, permet de comprendre avant d'appliquer des formules toutes faites.

Au sein de chaque chapitre, les résultats essentiels du cours sont présentés sous forme de fiches. Chaque fiche aborde un principe fondamental, une loi physique ou un théorème particulier. À la fin de chaque chapitre, un QCM permet au lecteur de tester ses connaissances et de valider ses acquis. Un ensemble de questions Vrai/faux complète cet outil d'auto-évaluation. Le lecteur pourra ensuite s'entraîner avec des exercices et des problèmes entièrement corrigés. Les solutions sont présentées dans leurs moindres détails en insistant systématiquement sur les méthodes à assimiler et sur le savoir-faire à acquérir absolument pour être capable de résoudre n'importe quel problème de mécanique. Chaque chapitre propose des exercices de difficultés variées. Il est conseillé de les aborder dans l'ordre, sans chercher à brûler les étapes en négligeant tel ou tel qui paraît trop facile et sans succomber à la tentation de lire trop rapidement la solution. Par ailleurs, de nombreux exercices nécessitent l'utilisation de résultats des exercices précédents. Certains de ces exercices sont de grands classiques ; d'autres sont plus originaux. Ils ont tous vocation à guider l'étudiant vers la maîtrise des différentes notions et de l'aider à acquérir suffisamment d'aisance pour aborder avec succès des problèmes de plus en plus sophistiqués.

Rappelons enfin que les progrès effectués sont toujours proportionnels aux efforts consentis pour résoudre les premiers exercices. Ne vous découragez pas, donc, devant un exercice qui paraît difficile. En mécanique comme partout ailleurs, les premiers pas ne sont pas les plus faciles.

Un dernier conseil : bien veiller à observer une rigueur absolue quant aux notations ou aux conventions de signes. La plupart des erreurs proviennent du non-respect de ces règles élémentaires.

Cet ouvrage a été conçu avec le souci constant de rendre la mécanique du point et la mécanique du solide accessibles au plus grand nombre. Je souhaite que chaque lecteur puisse y trouver les réponses à ses questions et les clés de sa réussite.

YG

Cinématique du point

1

Mots clés

Vecteurs, produit vectoriel, vecteur position, vecteur vitesse, accélération, coordonnées cartésiennes, coordonnées cylindriques, coordonnées sphériques, trajectoire, mouvement rectiligne, mouvement uniforme, mouvement circulaire, vitesse angulaire.

Les cinq premiers chapitres de cet ouvrage sont consacrés à la mécanique du point matériel. On considérera alors des objets matériels suffisamment petits pour être assimilables à des points. D'une manière générale, la mécanique du point s'intéresse au mouvement des points matériels soumis à des actions extérieures. Mais dans ce premier chapitre, nous allons uniquement aborder la cinématique du point qui consiste à décrire le mouvement d'un point dans l'espace, indépendamment des causes qui lui donnent naissance. Nous sommes ainsi dans une logique purement descriptive. Ce qui nous importe ici, c'est de connaître la position d'un point, sa vitesse ou son accélération, tout comme il peut être intéressant de décrire sa trajectoire, autrement dit, la suite de points qu'il occupe lorsque le temps varie. Précisons bien en effet, que nous allons nous intéresser à des points en mouvement. Par conséquent, les positions, vitesses ou accélérations s'entendent toujours comme des variables du temps.

Fiche 1

Rappel sur les vecteurs

Notations

On considère l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, x, y, z\right)$, les axes étant respectivement munis des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Soit M un point de l'espace repéré par ses coordonnées : $\mathrm{M}\left(a, b, c\right)$ et M′ un point de coordonnées $\mathrm{M}'\left(a', b', c'\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = (a' - a)\vec{i} + (b' - b)\vec{j} + (c' - c)\vec{k}$$

On utilise préférentiellement la notation suivante qui lui est strictement équivalente :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \\ c' - c \end{pmatrix}$$

La norme d'un tel vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ est définie par :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$$

Opérations sur les vecteurs

Soit $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs de l'espace définis par :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{et } \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Remarque

a, b et c sont appelées les composantes du vecteur $\overrightarrow{U}$. On utilise aussi parfois le terme de coordonnées.

Combinaisons linéaires

On a : $$\lambda\overrightarrow{U} + \mu\overrightarrow{V} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x \\ \lambda b + \mu y \\ \lambda c + \mu z \end{pmatrix}$$

En particulier : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x \\ b + y \\ c + z \end{pmatrix}$ et $\lambda\overrightarrow{U} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$

Produit scalaire

On a : $$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

Comme son nom l'indique, le produit scalaire n'est pas un vecteur.
Le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux.

Produit vectoriel

On a : $$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

Par ailleurs :

- $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \left|\sin\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)\right|$
- $\vec{W}$ est toujours orthogonal aux deux vecteurs donnés $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
- La base de vecteurs $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)$ est de sens direct. Cela signifie qu'on peut déterminer le sens de $\vec{W}$ en « faisant tourner » le vecteur $\vec{U}$ sur le vecteur $\vec{V}$ et en utilisant la règle du tire-bouchon (figure 1.1).
- Deux vecteurs colinéaires possèdent un produit vectoriel nul.
- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition : $\vec{U} \wedge \left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right) = \vec{U} \wedge \vec{V_1} + \vec{U} \wedge \vec{V_2}$.
- Il est compatible avec la multiplication par un scalaire : $\lambda\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) = \lambda\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge \lambda\vec{V}$.
- Enfin, il est antisymétrique (ou anticommutatif) : $\vec{V} \wedge \vec{U} = -\vec{U} \wedge \vec{V}$

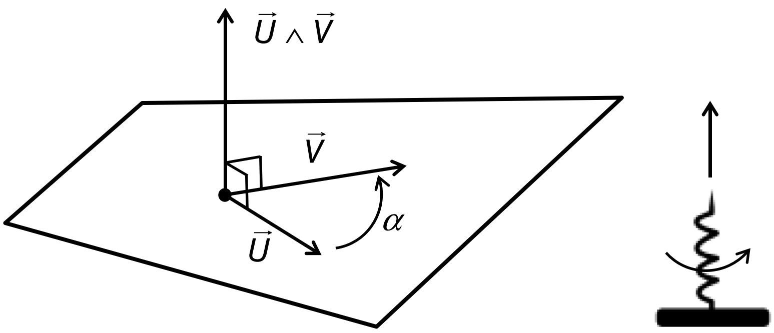

Figure 1.1

On retiendra en particulier, concernant les vecteurs unitaires de la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

Produit mixte

Soit $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$, trois vecteurs de l'espace. Le produit mixte correspond à l'égalité suivante :

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

Dérivée d'un vecteur

Si on s'intéresse à un vecteur $\vec{V}$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dépendent du temps, on peut écrire : $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. On définit la dérivée du vecteur par rapport au temps par :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

Remarque

On a l'habitude, en mécanique, de noter $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ et ce, afin d'alléger les écritures. Soit : $\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$. De même, pour la dérivée seconde de x, on notera $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Fiche 2

Définitions fondamentales

Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé (O, x, y, z), on considère un objet ponctuel représenté par un point M et en mouvement, dont les coordonnées (x, y, z) varient au cours du temps.

Remarque importante

En mécanique du point, nous nous intéresserons la plupart du temps à des points mobiles, donc dont les coordonnées varient avec le temps. Pour alléger les notations, nous n'écrirons pas $x(t)$ mais simplement x en partant du principe que toutes les variables géométriques sont des variables du temps.

Vecteur position

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est le vecteur position du point M, possédant pour composantes les coordonnées du point M.

Soit :
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cette position s'entend à un instant t donné, les coordonnées du point M étant supposées être variables au cours du temps.

Vecteur vitesse instantanée

On définit à chaque instant la vitesse du point M en mouvement par la dérivée du vecteur position :

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{M}}}(t) = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Vecteur accélération instantanée

On définit à chaque instant l'accélération du point M en mouvement par la dérivée du vecteur vitesse instantanée :

$$\overrightarrow{a_{\mathrm{M}}}(t) = \frac{d\overrightarrow{v_{\mathrm{M}}}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Fiche 3

Systèmes de coordonnées

Le système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) utilisé jusqu'à présent est sans nul doute celui qui nous est le plus familier. Néanmoins, selon la géométrie des systèmes que nous étudierons, il pourra s'avérer plus pratique et plus simple d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées.

Coordonnées cylindriques

Considérons un point M de l'espace comme indiqué sur la figure 1.2. Soit M′ sa projection sur le plan (O, x, y). Les coordonnées cylindriques consistent à repérer le point M dans l'espace par la distance r qui sépare M′ du point O (autrement dit $r = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\|$), par l'angle θ que forme le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$ avec l'axe Ox et par l'ordonnée z de M. Les coordonnées cylindriques de M sont donc : $\mathrm{M}(r, \theta, z)$.

On notera que le couple (r, θ) correspond aux coordonnées polaires de la projection de M dans le plan (O, x, y).

Remarque

On notera que r est toujours positif et que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

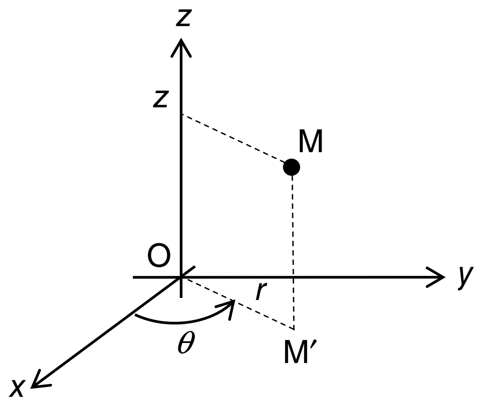

Figure 1.2

Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, on repère le point M par sa distance par rapport au point O, notée ρ (attention : $\rho \neq r$), par l'angle θ que forme le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ avec l'axe Ox (il s'agit bien du même angle θ qu'en coordonnées cylindriques) et par l'angle φ que forme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Oz (figure 1.3).

Remarque

On notera que ρ est toujours positif, que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et que $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

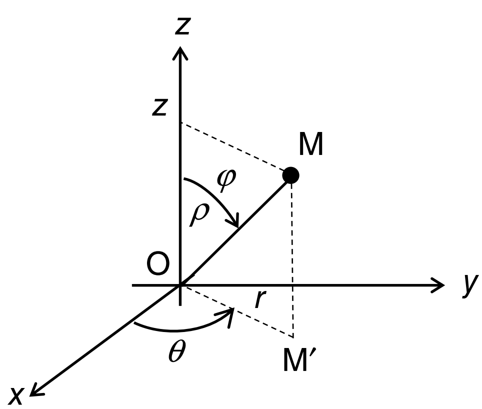

Figure 1.3

Remarque

En coordonnées sphériques, ρ est appelé le rayon, θ la longitude et φ la colatitude ou angle zénithal. L'angle complémentaire de φ, autrement dit $\frac{\pi}{2} - \varphi$ est appelé la latitude.

Fiche 4

Notion de trajectoire

Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé (O, x, y, z), on considère un objet ponctuel représenté par un point M, en mouvement, dont les coordonnées (x, y, z) varient au cours du temps.

On appelle trajectoire du point matériel considéré, le lieu des points M lorsque t varie d'un instant initial à un instant final. Souvent l'instant initial d'un mouvement est considéré comme correspondant à $t = 0$.

Ainsi, en écrivant $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou même $\mathrm{M}(x, y, z)$, on a directement connaissance de la trajectoire sous la forme d'une courbe paramétrée en t : $\mathrm{M}[x(t), y(t), z(t)]$.

En éliminant le temps t entre les expressions des trois coordonnées, il est possible d'établir l'équation de la trajectoire dans l'espace, par exemple sous la forme $z = f(x, y)$.

Dans le cas d'un mouvement contenu dans un plan, par exemple dans le plan (O, x, y), la connaissance des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ permet, par simple élimination du temps, de déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire $y = f(x)$.

Fiche 5

Mouvement rectiligne

Un point M subit un mouvement rectiligne si sa trajectoire appartient à une droite. Si on suppose que cette droite correspond à un axe Ox, la connaissance de $x(t)$ détermine entièrement la connaissance du mouvement. (Figure 1.4).

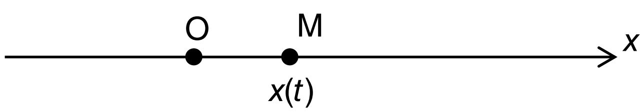

Figure 1.4

Considérant que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\vec{i}$, on a :

$$\overrightarrow{v_\mathrm{M}}(t) = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} = \dot{x}\vec{i} \text{ et } \overrightarrow{a_\mathrm{M}}(t) = \frac{d\overrightarrow{v_\mathrm{M}}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$$

Si la valeur algébrique de la vitesse $v_\mathrm{M}(t) = \mathrm{C^{te}}$, autrement dit ne dépend pas du temps, le mouvement est dit rectiligne uniforme et l'on a bien sûr $\overrightarrow{a_\mathrm{M}}(t) = \vec{0}$. Selon le signe positif ou négatif de $v_\mathrm{M}(t)$, le mobile évolue dans le sens des x croissants ou dans l'autre sens.

Si la valeur algébrique $v_\mathrm{M}(t)$ croît, alors l'objet ponctuel accélère. On a alors $a_\mathrm{M}(t) > 0$. Si au contraire $v_\mathrm{M}(t)$ décroît, alors l'objet décélère et $a_\mathrm{M}(t) < 0$.

Si $a_\mathrm{M}(t) = \mathrm{C^{te}}$, le mouvement rectiligne est dit uniformément accéléré ou décéléré, selon le signe de $a_\mathrm{M}(t)$.

Mouvement circulaire

Un point M subit un mouvement circulaire si sa trajectoire appartient à un cercle de rayon R. Dans ces conditions, le mouvement est contenu dans un plan, par exemple (O, x, y), le point O étant le centre du cercle. Le point M peut toujours être repéré par ses coordonnées x et y (variables au cours du temps, bien sûr), mais il paraît beaucoup plus simple de le repérer par l'angle α qu'il forme avec un axe de référence, par exemple l'axe Ox (figure 1.5).

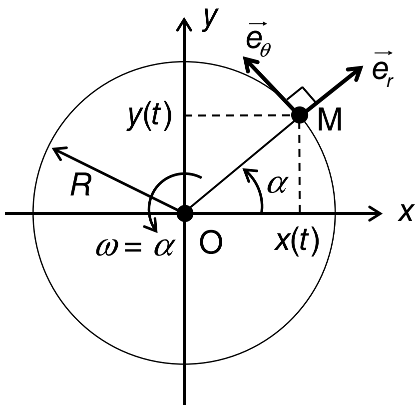

Figure 1.5

La dérivée de α par rapport au temps, soit $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$ est la vitesse angulaire du mouvement de rotation et est en générale notée ω. Elle se mesure en radians par seconde (rad/s). On introduit souvent la notion de vecteur vitesse de rotation, noté $\vec{\omega}$ et défini comme le vecteur ayant pour intensité la vitesse ω et porté par l'axe Oz (formant avec les axes Ox et Oy un repère direct).

Notons que ω est comptée positivement si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique et négativement dans le cas contraire. Dans le premier cas, le vecteur $\vec{\omega}$ est dirigé selon les z croissants et dans le second cas, selon les z décroissants.

Si $\omega = \mathrm{C^{te}}$, le mouvement est dit circulaire uniforme.

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_\mathrm{M}}(t)$ du point mobile M, mesuré dans le repère fixe (O, x, y) est en tout point tangent à la trajectoire circulaire. Son module $v_\mathrm{M}(t)$ dépend de ω et de R : $v_\mathrm{M}(t) = R\omega(t)$.

Dans le repère fixe, on a, à chaque instant :

$$\overrightarrow{v_\mathrm{M}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

On peut aussi exprimer vectoriellement $\overrightarrow{v_\mathrm{M}}(t)$ en le décomposant dans une base mobile d'origine M et tournant avec le point M, soit $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ comme indiqué sur la figure 1.5. Le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire radial et le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur unitaire orthoradial. Dans un mouvement circulaire, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_\mathrm{M}}(t)$ ne possède qu'une composante orthoradiale et ce, à chaque instant.

Remarque

Au travers de la description de ce mouvement circulaire, nous venons de mettre en évidence le fait qu'une position ou une vitesse ne sont pas décrites de la même manière selon le repère que l'on utilise. Il s'agit là de quelque chose de capital en mécanique. En choisissant d'observer un mouvement dans un repère ou dans un autre, nous n'aurons pas les mêmes valeurs. De plus, les expressions peuvent s'avérer beaucoup plus simples selon le choix opéré, à l'instar de la mesure du vecteur vitesse dans un repère tournant dans les lignes qui précèdent. Dans le chapitre suivant, nous allons insister sur la notion de référentiel et de repère associé, notions absolument fondamentales en mécanique.

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. Soit deux vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

❑ a. Le produit scalaire des deux vecteurs est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

❑ b. Les deux vecteurs sont orthogonaux

❑ c. Le produit vectoriel des deux vecteurs est : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

❑ d. Les deux vecteurs sont colinéaires

2. Soit deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

❑ a. Le produit scalaire des deux vecteurs est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

❑ b. Les deux vecteurs sont orthogonaux

❑ c. Le produit vectoriel des deux vecteurs est : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

❑ d. Les deux vecteurs sont colinéaires

3. Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de vecteurs unitaires orthonormée directe :

❑ a. $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

❑ b. $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$

❑ c. $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{k} \wedge \vec{j}$

❑ d. $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{i}$

4. Un point M en mouvement dans un repère fixe (O, x, y, z) est tel que $\overline{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

❑ a. Le vecteur vitesse de M est : $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$

❑ b. La valeur de la vitesse est : $v = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

❑ c. Il s'agit d'un mouvement plan

❑ d. Le vecteur accélération est nul

5. Un point M en mouvement dans un repère fixe (O, x, y, z) possède un vecteur vitesse tel que $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

❑ a. Le mouvement est rectiligne uniforme

❑ b. L'objet se déplace sur l'axe Oz

❑ c. $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$

❑ d. Le vecteur accélération est nul

6. **Un point M en mouvement dans un repère fixe (O, *x*, *y*, *z*) possède un vecteur vitesse tel que $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.**

❑ a. Le mouvement est rectiligne uniforme

❑ b. L'objet se déplace dans le plan (O, x, y)

❑ c. $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$

❑ d. Le vecteur accélération est nul

7. **Un point M en mouvement dans un repère fixe (O, *x*, *y*, *z*) est tel que $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} at \\ bt \\ ct \end{pmatrix}$.**

❑ a. Le mouvement est rectiligne uniforme

❑ b. L'objet se déplace sur l'axe O*z*

❑ c. $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

❑ d. le vecteur accélération est nul

8. **Un point M en mouvement dans un repère fixe (O, *x*, *y*, *z*) est tel que $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, α variant au cours du temps.**

❑ a. Le point M est mobile dans le plan (O, x, y)

❑ b. Le point M est mobile sur une trajectoire parabolique

❑ c. Le vecteur vitesse de M est : $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

❑ d. Le point M est animé d'un mouvement circulaire

Réponses

1. **a.** Le produit scalaire est : $[1 \times (-2)] + [2 \times 1] + [1 \times (-1)] = -1$. Le produit scalaire étant non nul, les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux. Le produit vectoriel des deux vecteurs est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ -2+1 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. La proposition **c** est donc fausse. Et comme le produit vectoriel n'est pas égal à $\vec{0}$, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. **b et c.** Le produit scalaire est : $0 + 1 - 1 = 0$. Mais il ne s'agit pas du vecteur nul comme proposé en a. Ce produit scalaire étant nul, il s'agit bien de deux vecteurs orthogonaux. Le produit vectoriel des deux vecteurs est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 0+1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et comme le produit vectoriel n'est pas égal à $\vec{0}$, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

3. **a et b.** Les propositions **c** et **d** sont fausses : d'une part $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{k}$ tandis que $-\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}$; d'autre part $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.

4. **a et c.** Concernant la proposition **a**, on obtient bien le vecteur vitesse en dérivant chaque composante du vecteur position. La réponse **b** est fausse : $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ (norme du vecteur $\vec{v}$). Le mouvement est bien contenu dans le plan (O, x, y) puisque la coordonnée en z du point M est toujours nulle. Enfin, le vecteur accélération est tout simplement égal à $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. **a et d.** Examinons dans un premier temps la proposition **c**. Elle fausse car en intégrant le vecteur $\vec{v}$, on obtient $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2t + c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des constantes. Les coordonnées selon Ox et Oy sont constantes et rien n'indique qu'elles soient nulles tandis que seule la coordonnée selon Oz varie. On peut donc en déduire que le mouvement est rectiligne sur une droite parallèle à Oz. En dérivant le vecteur vitesse on obtient bien un vecteur accélération nul. Le mouvement est donc bien rectiligne uniforme.

6. **a et d.** La proposition **c** est fausse : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} t + a \\ t + b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des constantes. L'objet se déplace dans le plan d'équation $z = c$; donc la proposition **b** est fausse. Le mouvement est bien rectiligne uniforme puisque le vecteur vitesse est constant. Quant au vecteur accélération, il est effectivement nul (dérivée du vecteur vitesse).

7. **a, c et d.** La proposition **b** est fausse. Si l'objet se déplaçait sur l'axe Oz, le vecteur position aurait ses deux premières composantes nulles.

8. **a et d.** Comme la composante en z du vecteur position est nulle, le point M sera toujours dans le plan (O, x, y). La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est telle que $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$. Par conséquent, le point M est toujours à la même distance 1 du point O. M se déplace donc sur un cercle. La réponse **d** est donc valable, même si rien ne permet de dire que le point M parcourt l'ensemble du cercle. Tout dépend de la fonction $\alpha(t)$. Attention au calcul du vecteur vitesse. Justement, comme α varie au cours du temps, on doit dériver les composantes de $\overrightarrow{OM}$ comme des fonctions composées : $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\alpha \\ \dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	Le produit scalaire est commutatif.	☐	☐
2.	Le produit vectoriel est commutatif.	☐	☐
3.	En connaissant uniquement le vecteur vitesse d'un objet ponctuel mobile en fonction du temps, on peut déterminer sa position à chaque instant.	☐	☐
4.	Un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si et seulement si son vecteur vitesse est à chaque instant orienté dans la même direction.	☐	☐
5.	On obtient le vecteur accélération instantanée d'un objet ponctuel mobile en dérivant deux fois son vecteur position.	☐	☐
6.	La vitesse de rotation d'un objet ponctuel autour d'un point fixe correspond à la dérivée de sa position angulaire.	☐	☐
7.	Dans l'espace, en coordonnées cylindriques, un point est repéré par deux angles et par une ordonnée.	☐	☐
8.	La longitude est une des trois coordonnées que l'on retrouve aussi bien dans un système de coordonnées cylindriques ou sphériques.	☐	☐
9.	L'équation $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ est appelée égalité du produit mixte.	☐	☐
10.	Dans un mouvement circulaire, la norme du vecteur vitesse est constante.	☐	☐

Réponses

1. **Vrai.** Quels que soient les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. **Faux.** Le produit vectoriel est anticommutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
3. **Faux.** Le vecteur vitesse seul ne suffit pas puisqu'en intégrant ce vecteur vitesse, on détermine les coordonnées du vecteur position à des constantes près. Il faut donc des informations supplémentaires (par exemple des conditions initiales sur la position) pour déterminer complètement la position à chaque instant.
4. **Faux.** Si le vecteur vitesse est à chaque instant orienté dans la même direction, la trajectoire est bien une droite mais rien ne dit que cette vitesse est constante. Le mouvement peut ne pas être uniforme.
5. **Vrai.** Voir fiche 2.
6. **Vrai.** En reprenant les notations de la fiche 6, on a : $\omega = \dot{\alpha}$.
7. **Faux.** En coordonnées cylindriques, un point est repéré par une distance, un angle et une ordonnée (voir fiche 3).
8. **Vrai.** Il s'agit de l'angle θ dont il est question dans la fiche 3 à propos des deux systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.
9. **Vrai.** Cette équation dite du produit mixte est une propriété importante du produit vectoriel et du produit scalaire, très utile en mécanique.
10. **Faux.** Ce serait vrai si on avait parlé de mouvement circulaire uniforme.

Entraînement

Exercices

1. On considère un triangle (ABC) quelconque comme indiqué sur la figure 1.6. Soit I le milieu du segment [AB] et J le milieu de [AC]. Montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

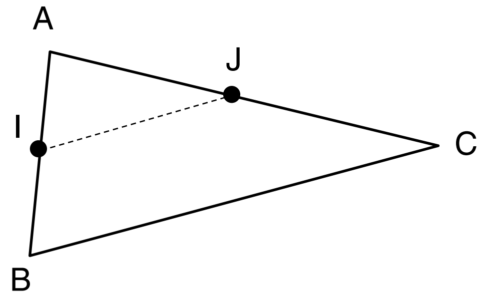

Figure 1.6

> **Conseil méthodologique**
> Un petit entraînement à propos de la manipulation de vecteurs. Utiliser la relation de Chasles.

2. Dans un repère cartésien (O, x, y, z), on considère le point de coordonnées $M(2, 1, 1)$. Calculer les coordonnées de ce point M en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

> **Conseil méthodologique**
> La vision dans l'espace, surtout en ce qui concerne les coordonnées sphériques n'est pas toujours chose aisée. Ne pas hésiter à faire des schémas en projection ou en coupe.

3. On considère un objet ponctuel M se déplaçant sur un axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$ à une vitesse $\overrightarrow{v(t)} = t\vec{i}$. En $t = 0$, le point M se trouve en O. À $t = 10$ s, l'objet se trouve en un point A. Calculer le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

> **Conseil méthodologique**
> Calculer l'expression générale du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en intégrant le vecteur vitesse. Attention aux conditions initiales et aux signes.

4. On considère un objet ponctuel M se déplaçant sur un axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$ à une vitesse $\overrightarrow{v(t)} = -2t\vec{i}$. En $t = 0$, le point M se trouve en un point A d'abscisse 4. À $t = 1$ s, l'objet se trouve en un point B. Calculer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.