CHAPITRE 2

Nombres complexes et trigonométrie

A. Les nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels est muni d'une addition et d'une multiplication définies par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall \left(a',b'\right) \in \mathbb{R}^2, (a,b) + \left(a',b'\right) = \left(a+a', b+b'\right)$$
$$(a,b) \times \left(a',b'\right) = \left(aa' - bb', ab' + ba'\right)$$

Muni de ces opérations, $\mathbb{R}^2$ est noté $\mathbb{C}$. Ses éléments sont les nombres complexes. ✎ (1)

✎ (1) Ou les complexes.

Le nombre complexe $(0,1)$ est noté i et, pour tout réel a, on convient d'identifier le nombre complexe $(a,0)$ et le réel a. ✎ (2)

✎ (2) Les égalités $(x,0)+(x',0)=(x+x',0)$ $(x,0)(x',0)=(xx',0)$ montrent que l'injection $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \to (x,0)$ transporte les opérations.

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib$.

Définition 1

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.
$a + ib$ est la **forme algébrique** du nombre complexe z,
a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$,
b est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$. ✎ (3)

✎ (3) Noter que la partie imaginaire est un nombre réel.

Propriété 1

Dans $\mathbb{C}$ les opérations sont les suivantes :

$$(a+ib) + \left(a'+ib'\right) = \left(a+a'\right) + i\left(b+b'\right),$$
$$(a+ib)\left(a'+ib'\right) = \left(aa'-bb'\right) + i\left(ab'+ba'\right)$$

En particulier, $i^2 = -1$.

Propriété 2

Un nombre complexe est **réel** lorsque sa partie imaginaire est nulle :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0.$$

Un nombre complexe de partie réelle nulle est dit **imaginaire pur** : ✎ (4)

$$z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0.$$

✎ (4) Les imaginaires purs sont les complexes de la forme ib, avec b réel. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Dans les deux propriétés suivantes, z, z', z'' sont des complexes quelconques.

Propriété 3

L'addition dans $\mathbb{C}$ est

- commutative : $z + z' = z' + z$;
- associative : $\left(z+z'\right) + z'' = z + \left(z'+z''\right)$.

0 est élément neutre : $z + 0 = z$.
$z = (x,y)$ admet un opposé, noté $-z$, qui est $(-x,-y)$: $z + (-z) = 0$. ✎ (5)

✎ (5) Ces propriétés se démontrent en utilisant la forme algébrique.

Propriété 4

La multiplication dans $\mathbb{C}$ est

- commutative : $zz' = z'z$;
- associative : $\left(zz'\right)z'' = z\left(z'z''\right)$;
- distributive sur l'addition : $\left(z+z'\right)z'' = zz'' + z'z''$.

1 est l'élément neutre : $1z = z$.
Si $z \neq 0$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$; z' est unique et s'appelle l'inverse de z.
Pour $z = a + ib \neq 0$ ✎ (6) cet inverse, noté $1/z$ ou z^{-1}, est :

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}. \text{ ✎ (7)}$$

✎ (6) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

✎ (7) Ces propriétés se démontrent en utilisant la forme algébrique.

(8) Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

C'est pour résumer l'ensemble de ces règles de calculs que l'on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps. (8)

Définition 2

(9) La conjugaison est l'application $z \mapsto \overline{z}$. C'est une involution.

Soit z un nombre complexe, $z = a + ib$ avec a et b réels.

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $a - ib$, noté $\overline{z}$. On a $\overline{\overline{z}} = z$. (9)

Propriété 5

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, on a : $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right)$.

On a donc $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

Propriété 6

(10) Et $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

Opérations et conjugaison

Pour tous complexes z_1, z_2 :

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (10), $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et, pour $\overline{z_2} \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

B. Représentation géométrique Affixe – Module – Argument

Le plan orienté $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Pour x et y réels, $M(x, y)$ désigne le point de coordonnées (x, y).
L'ensemble des vecteurs du plan est noté $\mathcal{V}$.

1. Image d'un complexe – Affixe d'un point, d'un vecteur

Définition 3

(11) Les points d'affixe réelle sont ceux de l'axe $(O, \vec{i})$, appelé l'axe réel. Ceux d'affixe imaginaire pure sont les points de l'axe $(O, \vec{j})$, appelé l'axe imaginaire pur.

L'affixe du point $M(x, y)$ est le nombre complexe $x + iy$, noté z_M. (11)

L'affixe du vecteur $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ est le nombre complexe $x + iy$, noté $z_{\vec{u}}$.

Définition 4

(12) Cette bijection permet d'identifier $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$. On écrira $M(z)$.

L'antécédant $M(z)$ d'un complexe z, par la bijection $\mathcal{P} \to \mathbb{C}$, $M \mapsto z_M$, s'appelle l'image z dans le plan complexe $\mathcal{P}$. (12)

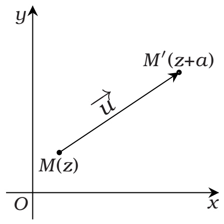
L'antécédant d'un complexe z, par la bijection $\mathcal{V} \to \mathbb{C}$, $\vec{u} \mapsto z_{\vec{u}}$, s'appelle l'image vectorielle de z.

Propriété 7

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.

Pour tous points A et B, on a : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

(13)

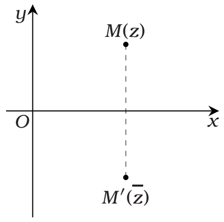


Théorème 1

Interprétation géométrique de l'addition

- Étant donné un vecteur $\vec{u}$ d'affixe a, la translation de vecteur $\vec{u}$ transforme le point M, d'affixe z, en le point M', d'affixe $z' = z + a$. (13)
L'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ est $z' = z + a$.
- Étant donné un point $A(a)$ et un réel k non nul, l'homothétie, de centre A et de rapport k, transforme le point M en le point M' tel que : $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.
Son écriture complexe est $z' = a + k(z - a)$.

(14)

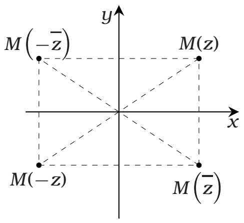


Théorème 2

Interprétation géométrique de la conjugaison

La réflexion s_{Ox}, d'axe $\left(O, \vec{i}\right)$, transforme le point M, d'affixe z, en le point M', d'affixe $z' = \bar{z}$. (14)
L'écriture complexe de s_{Ox} est $z' = \bar{z}$.

(15)



Théorème 3

(15) L'écriture complexe de la réflexion s_{Oy}, d'axe $\left(O, \vec{j}\right)$, est $z' = -\bar{z}$.
L'écriture complexe de la symétrie, de centre O, est $z' = -z$.

2. Module

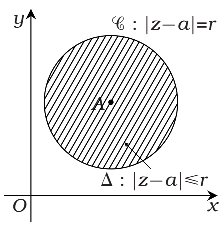
Définition 5

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, d'image M, le **module** de z est $\|\overrightarrow{OM}\|$. Il est noté $|z|$.

(16) L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$.

Théorème 4

La distance entre deux points A et B, d'affixes a et b, est $AB = |b - a|$. (16)



Théorème 5

Soit a un nombre complexe et r un réel strictement positif. On note A l'image de a.
L'ensemble des images des nombres complexes z tels que :
- $|z - a| = r$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r,
- $|z - a| \leqslant r$ est le disque fermé (17) Δ de centre A et de rayon r,
- $|z - a| < r$ est le disque ouvert (18) de centre A et de rayon r.

(17) Le cercle $\mathscr{C}$ est inclus.

(18) Le cercle $\mathscr{C}$ est exclus.

Propriété 8

Expressions du module

Pour tout complexe $z = a + i\,b$, a et b réels :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}. \text{ (19)}$$

(19) $z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)$
$=a^2+b^2$.

Remarques

1) Si z est réel, $|z|$ n'est autre que la valeur absolue de z.
En particulier, pour tout complexe z, on a $z = |z|$ si et seulement si z est un réel positif.
2) Pour tout complexe z, on a $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Propriété 9

Pour tout complexe z, on a : $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$. (20)

(20) $|a|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ et $|b|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

Propriété 10

Module d'un quotient, d'un produit

Pour tous complexes z et z', on a :

1) $|zz'| = |z| \times |z'|$,

2) si $z \neq 0$

- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ ▪ $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ ▪ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$. [21]

[21] On procède par récurrence en convenant que $z^0=1$.

1) On a $|zz'|^2 = (zz')\left(\overline{zz'}\right) = (z\bar{z})\left(z'\bar{z'}\right) = |z|^2 \times |z'|^2$.

2) Si $z \neq 0$, $|z'| = \left|\dfrac{z'}{z}z\right| = \left|\dfrac{z'}{z}\right| \times |z|$.

Théorème 6

Inégalité triangulaire

Étant donné deux complexes z et z', on a $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement si $z = 0$ ou s'il existe un réel positif λ tel que $z' = \lambda z$.

- On calcule :

$$\left(|z| + |z'|\right)^2 - |z+z'|^2 = \left(z\bar{z} + 2|zz'| + z'\bar{z'}\right) - (z+z')\left(\bar{z}+\bar{z'}\right)$$
$$= 2\left(|\bar{z}z'| - \mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)\right) \geqslant 0 \text{ [22]}$$

On obtient l'inégalité triangulaire puisque les réels $|z| + |z'|$ et $|z+z'|$ sont positifs.

- Si $z = 0$, l'inégalité est une égalité.
- Si $z' = \lambda z$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, il vient $|z+z'| = |1+\lambda|\,|z| = (1+\lambda)|z| = |z| + |z'|$.
- Si $|z| + |z'| = |z+z'|$ et $z \neq 0$, on a $\bar{z}z' \in \mathbb{R}^+$ [23] donc $z' = \lambda z$ avec $\lambda = \dfrac{\bar{z}z'}{|z|^2} \in \mathbb{R}^+$.

[22] Avec la propriété 9.

[23] Avec la remarque 1) suivant la propriété 8.

3. Nombres complexes de module 1

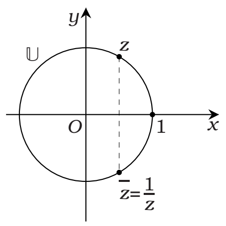
Définition 6

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.
$\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

Propriété 11

Soit z un nombre complexe. On a $z \in \mathbb{U} \iff \dfrac{1}{z} = \bar{z}$. [24]

[24]



Remarque

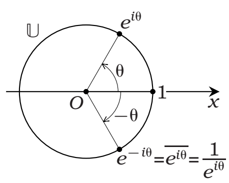
$\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse.

Définition 7

Exponentielle d'un nombre imaginaire pur

Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. [25] [26]

[25]



[26] $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Propriété 12

$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta}\,;\theta \in \mathbb{R}\right\}$. [27]

[27] Lorsque θ parcourt l'intervalle $[0,2\pi[$, le point $M(\cos\theta, \sin\theta)$ décrit $\mathscr{C}$ donc $e^{i\theta}$ décrit $\mathbb{U}$.

Propriété 13

Pour tous réels θ et θ', on a :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta'[2\pi]. \text{ [28]}$$

[28] En particulier $e^{i\theta}=1 \iff \theta \equiv 0[2\pi]$.

Théorème 7

Pour tous réels θ et θ', on a :

- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$, ▪ $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$,
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\,i\,\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, (formule de Moivre).

☞ On a $e^{i\theta} e^{i\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$, et en développant, il vient :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = \left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\right)$$

Les formules d'addition en trigonométrie donnent alors :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = \cos\left(\theta+\theta'\right) + i\,\sin\left(\theta+\theta'\right), \text{ c'est-à-dire } e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$ ✎ (29)

✎ (29) On obtient les autres formules avec $e^{i0}=1$ et en procédant par récurrence.

Formulaire 1

Formule de Moivre ✎ (30)

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Formules d'Euler ✎ (31)

Pour tout réel θ, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

✎ (30) C'est une relecture de la formule $e^{ni\theta}=(e^{i\theta})^n$.

✎ (31) Avec la propriété 5.

4. Argument d'un nombre complexe non nul

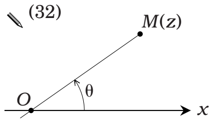
Définition 8

Soit z un nombre complexe non nul, d'image M.

Toute mesure θ de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}}\right)$ s'appelle un argument de z. ✎ (32)

On écrit $\arg z \equiv \theta\left[2\,\pi\right]$.

✎ (32)



Propriété 14

Pour tout réel θ, $\arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta\left[2\,\pi\right]$.

Propriété 15

Pour un nombre complexe non nul z, on a :

- $z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg z \equiv \left[2\,\pi\right]$, ▪ $z \in \mathbb{R}_-^* \iff \arg z \equiv \pi\left[2\,\pi\right]$,
- $z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\left[\pi\right]$.

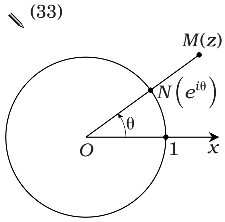
Propriété 16

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, les arguments de z sont ceux de $\dfrac{z}{|z|}$.

☞ Pour $z \neq 0$, notons M et N les images de z et $z/|z|$. On a :

$\overrightarrow{OM} = |z|\,\overrightarrow{ON}$ donc $\left(\widehat{\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{i}\,,\overrightarrow{ON}}\right)\left[2\,\pi\right]$ ✎ (33) c'est-à-dire $\arg z \equiv \arg\dfrac{z}{|z|}\left[2\,\pi\right]$.

✎ (33)



(34) Si $z=a+ib$ on a $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ et θ est défini modulo 2π par
$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Propriété 17

Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$z=\rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho=|z| \text{ et } \theta\equiv\arg(z)\left[2\pi\right].$$ (34)

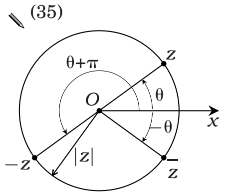
Exemple 1 Soit a et b des réels avec $(a,b)\neq(0,0)$.

En écrivant le nombre complexe $a+ib$ sous forme trigonométrique $a+ib=A\,e^{i\varphi}$, il vient :

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}A\,e^{-i\varphi}\right)=A\cos(\theta-\varphi).$$

On a $A=\sqrt{a^2+b^2}$ et φ est défini modulo 2π par $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(35)



Théorème 8

Pour des nombres complexes non nuls z et z', on a :

- $z'=z \iff \left|z'\right|=|z|$ et $\arg z'\equiv\arg z\left[2\pi\right]$,
- $z'=\bar{z} \iff \left|z'\right|=|z|$ et $\arg z'\equiv-\arg z\left[2\pi\right]$,
- $z'=-z \iff \left|z'\right|=|z|$ et $\arg z'\equiv\pi+\arg z\left[2\pi\right]$. (35)

Propriété 18

Pour des nombres complexes non nuls z et z', on a :

$$\arg\left(zz'\right)\equiv\arg z+\arg z'\left[2\pi\right] \text{ et } \arg\left(\frac{z'}{z}\right)\equiv\arg z'-\arg z\left[2\pi\right].$$

☞ Posons $\rho=|z|$, $\rho'=\left|z'\right|$, $\theta\equiv\arg z\left[2\pi\right]$ et $\theta'\equiv\arg z'\left[2\pi\right]$.

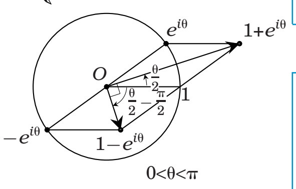
On a alors $z=\rho e^{i\theta}$ et $z'=\rho' e^{i\theta'}$, donc $zz'=\rho\,\rho'\,e^{i(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{\rho'}{\rho}e^{i(\theta'-\theta)}$.

Ainsi, $\theta'+\theta$ est un argument de zz' et $\theta'-\theta$ est un argument de z'/z.

Corollaire

Pour des nombres complexes non nuls z et z', on a $\arg z'=\arg z\left[2\pi\right]$ si et seulement si z'/z est un réel strictement positif.

(36)



Propriété 19

Soit θ un réel. On a : (36)

1) $1+e^{i\theta}=2\cos\dfrac{\theta}{2}\,e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta}=-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{\frac{i\theta}{2}}$;

2) ▪ $\left|1+e^{i\theta}\right|=2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$ et $\left|1-e^{i\theta}\right|=2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$;

- Si $-\pi<\theta<\pi$ alors $\arg\left(1+e^{i\theta}\right)\equiv\dfrac{\theta}{2}\left[2\pi\right]$; (37)
- Si $0<\theta<2\pi$ alors $\arg\left(1-e^{i\theta}\right)\equiv\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$. (38)

(37) Si $\theta\equiv\pi\left[2\pi\right]$ on a $1+e^{i\theta}=0$.

(38) Si $\theta\equiv0\left[2\pi\right]$ on a $1-e^{i\theta}=0$.

☞ 1) On factorise $1+e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{-i\theta}{2}}\right)$ et $1-e^{i\theta}=-e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{-i\theta}{2}}\right)$ et on conclut avec la formule d'Euler.

2) Les formules concernant les modules découlent de 1).

Quant aux arguments, on a $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ lorsque $-\pi<\theta<\pi$ et $\sin\dfrac{\theta}{2}$ lorsque $0<\theta<2\pi$.

Exemple 2 Soit $n \geqslant 1$ un entier et t un réel.

Pour $t \not\equiv 0\left[2\pi\right]$, on calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}} e^{\frac{int}{2}}$.

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kt = \begin{cases} n+1 & \text{si } t \equiv 0\left[2\pi\right] \\ \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\cos\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \not\equiv 0\left[2\pi\right] \end{cases}$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kt = \begin{cases} 0 & \text{si } t \equiv 0\left[2\pi\right] \\ \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \not\equiv 0\left[2\pi\right] \end{cases}$$

5. Applications géométriques

Propriété 20

Étant donné des points A, B, C, D avec $A \neq B$ et $C \neq D$, d'affixes respectives a, b, c, d, on a :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \left[2\pi\right].$$

Avec la relation de Chasles, on a modulo 2π :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \widehat{\left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right)} - \widehat{\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right)} \equiv \arg\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right).$$

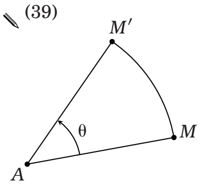
Définition 9

Étant donné un point A et un réel θ, la rotation de centre A et d'angle θ est la transformation du plan, notée $\mathrm{rot}_{A,\theta}$ ainsi définie :

- $\mathrm{rot}_{A,\theta}(A) = A$,
- si $M \neq A$, alors $M' = \mathrm{rot}_{A,\theta}(M)$ où M' est le point tel que

$$AM' = AM \text{ et } \widehat{\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)} \equiv \theta\left[2\pi\right]$$ (39)

(39)



Théorème 9

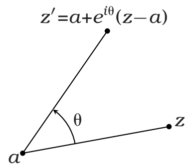
Écriture complexe d'une rotation

Soit A un point du plan, d'affixe a, et un réel θ.

L'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle θ est :

$$\mathrm{rot}_{A,\theta} : z' = a + e^{i\theta}(z-a)$$ (40)

(40)



Soit $M(z)$ un point du plan et $M'\left(z'\right)$ son image par $\mathrm{rot}_{A,\theta}$.

Si $z = a$, on a $z' = a$.

Si $z \neq a$, on a $\dfrac{z'-a}{z-a} \in \mathbb{U}$ car $\left|\dfrac{z'a}{z-a}\right| = \dfrac{AM'}{AM}$ et $\arg\left(\dfrac{z'-a}{z-a}\right) \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)} \equiv \theta\left[2\pi\right]$

donc $\dfrac{z'-a}{z-a} = e^{i\theta}$.

Dans les deux cas, $z' = a + e^{i\theta}(z-a)$.

Propriété 21

Alignement de points

Des points A, B et C, avec $A \neq C$, d'affixes a, b, c, sont alignés si et seulement si :

$$\frac{c-b}{c-a} \text{ est réel.}$$

Si $B = C$, les points A, B, C sont alignés et $\dfrac{c-b}{c-a} = 0$ est réel.

Si $B \neq C$, A, B, C, sont alignés si et seulement si :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv 0\left[\pi\right],$$

c'est-à-dire $\arg \dfrac{c-b}{c-a} \equiv 0\left[\pi\right]$ ou encore $\dfrac{c-b}{c-a}$ est réel.

Propriété 22

Orthogonalité ✎ (41)

✎ (41) On procède comme pour la propriété 21.

Soit A, B et C, avec $A \neq C$, des points d'affixes a, b, c.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\frac{c-b}{c-a} \text{ est imaginaire pur.}$$

2) Si $B \neq C$, les droites (AC) et (BC) sont orthogonales si et seulement si :

$$\frac{c-b}{c-a} \text{ est imaginaire pur.}$$

Propriété 23

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes en A.

Il existe deux droites Δ, et deux seulement, passant par A et telles que :

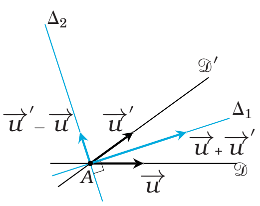
$$\left(\widehat{\mathscr{D}, \Delta}\right) = \left(\widehat{\Delta, \mathscr{D}'}\right)\left[\pi\right] \text{ ✎ (42)}$$

✎ (42) L'angle de deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est défini modulo π par $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathscr{D}_1}, \overrightarrow{\mathscr{D}_2}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}\right)[\pi]$ où $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ dirigent $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Ces droites s'appellent les bissectrices des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Elles sont orthogonales et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{u'}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont des vecteurs **unitaires** dirigeant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. ✎ (43)

✎ (43)



Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs unitaires dirigeant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, d'affixe $e^{i\theta}$ et $e^{i\theta'}$, et $\overrightarrow{\delta}$ un vecteur dirigeant une droite Δ passant par A.

En utlisant la relation de Chasles, on a $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\delta}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{\delta}, \overrightarrow{u'}}\right)\left[\pi\right]$ si et seulement si :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\delta}}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right].$$

Cela montre qu'il existe deux droites solutions et deux seulement et qu'elles sont orthogonales.

Par ailleurs, on a $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}}\right) \equiv \arg e^{i(\theta' - \theta)} \equiv \theta - \theta'\left[2\pi\right]$ et : ✎ (44)

✎ (44) Avec la propriété 19.

$$\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}}\right) \equiv \arg \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} \equiv \arg\left(1 + e^{i(\theta'-\theta)}\right) \equiv \frac{\theta' - \theta}{2}\left[\pi\right] \text{ ✎ (45)}$$

✎ (45) Selon le signe de $\cos\left(\dfrac{\theta' - \theta}{2}\right)$.

$$\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'}}\right) \equiv \arg\left(1 - e^{i(\theta'-\theta)}\right) \equiv \frac{\theta' - \theta}{2} - \frac{\pi}{2}\left[\pi\right] \text{ ✎ (46)}$$

✎ (46) Selon le signe de $\sin\left(\dfrac{\theta' - \theta}{2}\right)$.

C. Racines d'un nombre complexe

1. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Définition 10

Soit z un nombre complexe et n un entier naturel avec $n \geqslant 2$. (47)

Une **racine** $n^{\text{ième}}$ de z est un complexe Z tel que $Z^n = z$.

(47) Pour $n=2$, on parle de racine carrée et, pour $n=3$, de racine cubique.

Théorème 10

Tout nombre complexe non nul admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$. (48)

(48) 0 est l'unique racine $n^{\text{ième}}$ de 0.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$; posons $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg z \, [2\pi]$.

On cherche les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$. (49)

L'égalité $Z^n = z$ se traduit par $\rho^n = r$ et $n\alpha \equiv \theta \, [2\pi]$, donc par :

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad \alpha \equiv \frac{\theta}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right].$$

En posant $Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, l'égalité $Z_{k'} = Z_k$ se traduit par :

$$\frac{\theta + 2k'\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \, [2\pi] \quad \text{c'est-à-dire} \quad k' = k[n].$$

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z sont donc les n nombres complexes deux à deux distincts Z_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

(49) z étant non nul, ses racines $n^{\text{ièmes}}$ sont non nulles.

Définition 11

L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 est noté $\mathbb{U}_n$.

Propriété 24

Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul et Z_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de z.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z sont les $Z_0 u$ où u décrit $\mathbb{U}_n$. (50)

(50) Si $r=|z|$ et $\theta \equiv \arg z \, [2\pi]$, $Z_0 = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n}}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de z.

L'égalité $Z^n = z$ s'écrit $Z^n = Z_0^n$ ou $\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^n = 1$ c'est-à-dire $\frac{Z}{Z_0} \in \mathbb{U}$.

2. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1

Théorème 11

(51) L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 est $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,; 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$.

En posant $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a $\mathbb{U}_n = \left\{ \left(\omega_n\right)^k \,; 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$.

(51) Relire la démonstration du théorème 10 et utiliser la formule de Moivre.

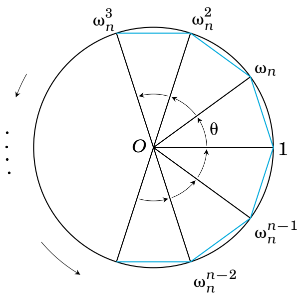
Remarque

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est stable par produit et passage à l'inverse.

Propriété 25

Les images des racines n ièmes de 1 sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés dont le centre de gravité est O.

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$



☞ En notant, pour tout entier relatif, M_k l'image de ω_n^k, on a $M_n = M_0$ et on calcule :

$$M_{k-1}M_k = \left|\omega_n^k - \omega_n^{k-1}\right| = \left|\omega_n^{k-1}\left(\omega_n - 1\right)\right| = |\omega_n - 1| = 2\sin\frac{\pi}{n}$$ [52]

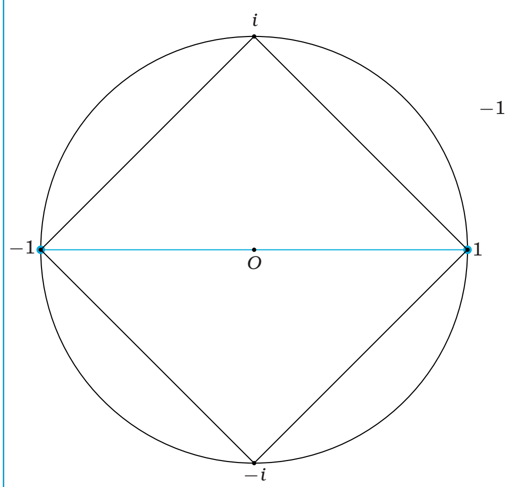
[52] Avec la propriété 19.

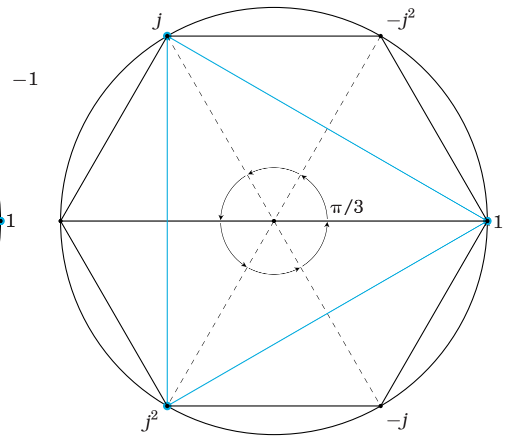
ce qui montre que les côtés du polygone $M_0M_1 \cdots M_{n-1}M_0$ ont même longueur.

Le centre de gravité de ce polygone est l'isobarycentre des sommets, c'est le point d'affixe :

$$z = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^k = \frac{1}{n}\frac{\omega_n^n - 1}{\omega_n - 1} = 0.$$

Exemple 3 On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{-i\sqrt{3}}{2}$.





$\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$

$\mathbb{U}_4 = \{\pm 1, \pm i\}$

On observe l'inclusion $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_4$ et la factorisation :

$\left(z^4 - 1\right) = \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right)$.

$\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$

$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$

$\mathbb{U}_6 = \{\pm 1, \pm j, \pm j^2\}$

On observe les inclusions $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_6$ et $\mathbb{U}_3 \subset \mathbb{U}_6$ et les factorisations :

$$z^6 - 1 = \left(z^2 - 1\right)\left(z^4 + z^2 + 1\right) = \left(z^3 - 1\right)\left(z^3 + 1\right)$$

Exemple 4 Avec $(-2)^3 = -8$, on voit que -2 est une racine cubique de -8. Les trois racines cubiques de -8 sont donc -2, $-2j$, et $-2j^2$, c'est-à-dire -2, $1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.

Exemple 5 **Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas**

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ donc $\mathbb{U}_5 = \left\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$.
On observe que, pour $z \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$, on a :

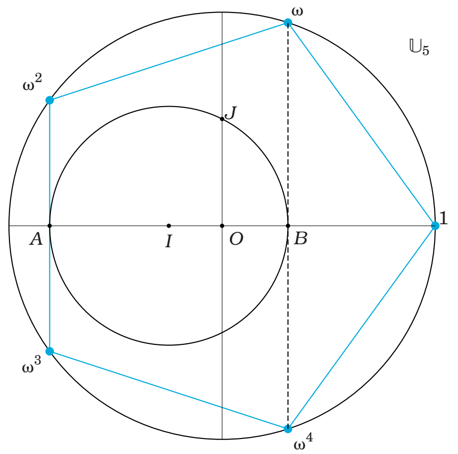
$$0 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

donc avec $x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, il vient :

$$0 = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 4x^2 + 2x - 1$$

Il en découle, avec $z = \omega$ puis avec $z = \omega^2$, que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont les racines du trinôme $4x^2 + 2x - 1$; on a donc :



$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos\frac{2\pi}{5} \times \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}.$$

En notant A et B les points d'affixes $\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$ et I leur milieu, on a donc :

$$z_I = -\frac{1}{4} \text{ et } \overline{OA} \times \overline{OB} = -\frac{1}{4}.$$

Notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[A, B]$; il rencontre Oy en un point J. On a :

$$-\frac{1}{4} = \overline{OA} \times \overline{OB} = \left(\overline{OI} + \overline{IA}\right)\left(\overline{OI} - \overline{IA}\right) = OI^2 - IA^2 \text{ [53]} = -OJ^2 \text{ donc } OJ = \frac{1}{2}.$$

[53] Avec le théorème de Pythagore.

On obtient une construction du pentagone régulier dont les sommets sont les racines cinquièmes de 1 en traçant le cercle centré au point I d'affixe $-1/4$ et passant par le point J d'affixe $i/2$. Ce cercle coupe Ox en A et B et les tangentes en ces points fournissent les 4 éléments de $\mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$.

3. Racines carrées d'un nombre complexe Équation du second degré

3.1 – Calcul des racines carrées sous forme algébrique

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe non nul.

Si $b = 0$, $z = a$ est réel et ses racines carrées sont :

$$\begin{array}{ll} \sqrt{a} \text{ et } -\sqrt{a} & \text{si } a > 0 \\ i\sqrt{-a} \text{ et } -i\sqrt{-a} & \text{si } a < 0 \end{array}$$

Si $b \neq 0$, l'équation $(x + iy)^2 = z$ s'écrit $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

- Dans certains cas, une solution évidente apparaît. Par exemple, si $z = -3 + 4i$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

une solution évidente est $x = 1$ et $y = 2$. On conclut que les racines carrées de $-3 + 4i$ sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

■ S'il n'y a pas de solution évidente, on remarque que l'équation $(x+iy)^2 = z$ donne aussi $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$, en comparant les modules. Alors $x^2-y^2 = a$ et $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ donnent $x^2 = 1/2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)$ et $y^2 = 1/2\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)$, ce qui permet de déduire $|x|$ et $|y|$.
De plus, le signe de xy étant celui de b, x et y ont le même signe si $b>0$ et de signe contraire si $b<0$.
Ce raisonnement par analyse fournit deux solutions possibles et il s'agit bien des deux racines carrées de z puisque l'on sait qu'elles existent.

3.2 – Équation du second degré

Méthode

On considère l'équation : [54]

$$\textbf{(E)}: \quad z \in \mathbb{C}, \quad az^2+bz+c=0, \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } a \neq 0.$$

Cette équation s'écrit aussi $z \in \mathbb{C}, \ \left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = 0.$

Soit δ une racine carrée [55] de b^2-4ac. Alors on a $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2$.

Les solutions de (E) sont : $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$.

[54] Les équations du second degré à coefficients réels sont connues. La méthode est la même pour le traitement des équations à coefficients complexes.

[55] N'importe laquelle des deux.

Définition 12

Étant donné l'équation **(E)**, le nombre $\Delta = b^2-4ac$ en est le **discriminant**.
En posant $b=2b'$, le nombre $\Delta' = b'^2-ac$ est le **discriminant réduit**.

En utilisant le calcul fait en préambule, il vient :

Propriété 26

a) Si $\Delta = 0$, l'équation **(E)** admet une racine double qui est $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$. [56]

b) Si $\Delta \neq 0$, soit δ une racine carrée de Δ, l'équation **(E)** admet deux racines distinctes qui sont $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$. [57]

Avec $\delta' = \dfrac{\delta}{2}$ racine carrée de Δ', ces formules deviennent :

$$z_1 = \frac{-b'-\delta'}{a}, \quad z_2 = \frac{-b'+\delta'}{a}.$$

[56] On a alors $az^2+bz+c=a(z-z_0)^2$.

[57] On a alors $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Propriété 27

Deux complexes z_1 et z_2 (distincts ou non) sont les racines de **(E)** si et seulement si :

$$z_1+z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1z_2 = \frac{c}{a}.$$

☞ Que Δ soit nul ou non [58], les racines sont $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

Donc $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \dfrac{b^2-\Delta}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

La réciproque résulte de l'identité $(z-z_1)(z-z_2) = z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2$.

[58] Dans le cas d'une racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$, la somme des racines est $2z_0$ et le produit est z_0^2.

Cas particulier : a, b, c réels

$\Delta = b^2-4ac \geqslant 0$, on retrouve le classique trinôme à coefficients réels.
$\Delta = b^2-4ac < 0$, les racines carrées de Δ sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$.

Les solutions de **(E)** sont donc : $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Ce sont alors des nombres complexes conjugués.

Exemple 6 Soit l'équation (E) : $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.

- Les racines de (E) sont les racines carrées des racines du trinôme $t^2 - (5-14i)t - 2(5i+12)$.
- Celles-ci sont $t_1 = -2i$ et $t_2 = 5 - 12i$ car $t_1 + t_2 = 5 - 14i$ et $t_1 t_2 = -10i - 24$.
- Les racines carrées de $-2i$ sont $\pm\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ c'est-à-dire $1 - i$ et $1 + i$.
- Les racines carrées de $5 - 12i$ sont les complexes $x + iy$ tels que $x^2 - y^2 = 5$ et $xy = -6$, $x = 3$ et $y = -2$ vérifiant ces égalités, les racines de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.
- En conclusion, les racines de (E) sont $1 - i$, $1 + i$, $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.

Exemple 7 Pour tout réel θ, les racines du trinôme $z^2 - 2z\cos\theta + 1$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ car $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$.

D. Trigonométrie

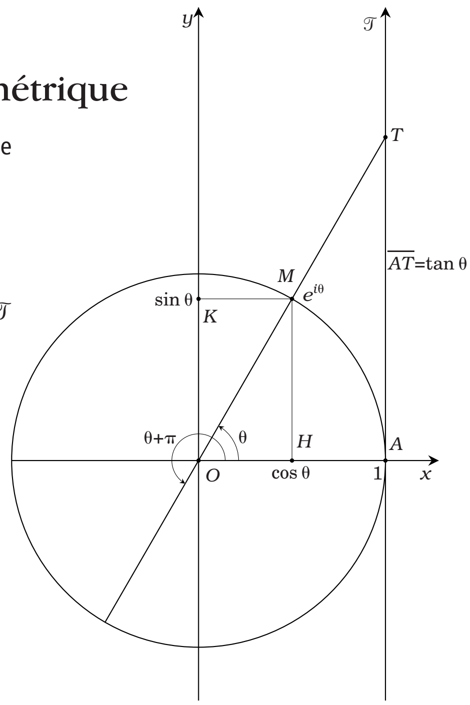
1. Lecture du cercle trigonométrique

M est un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, d'affixe $e^{i\theta}$ où $\theta = \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)\left[2\pi\right]$.
Ses coordonnées sont :

$$x = \overline{OH} = \cos\theta \quad \text{et} \quad y = \overline{OK} = \sin\theta.$$

Si $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\left[\pi\right]$, la droite (OM) coupe la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point $A(1)$ en un point T.
Par le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OH}} \text{ donc } \overline{AT} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$



Définition 13

Pour tout réel θ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on pose $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. (59)

(59) $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Propriété 28

La fonction tan est π-périodique, impaire et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

avec : $\lim\limits_{\substack{\theta \to -\frac{\pi}{2} \\ \theta > -\frac{\pi}{2}}} \tan\theta = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \tan\theta = +\infty$. (60)

(60) Par lecture du cercle trigonométrique. Lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le point T décrit $\mathscr{T}$ de bas en haut.

Propriété 29

Pour tout réel θ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$. (61)

(61) Avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

1.1 – Angles associés

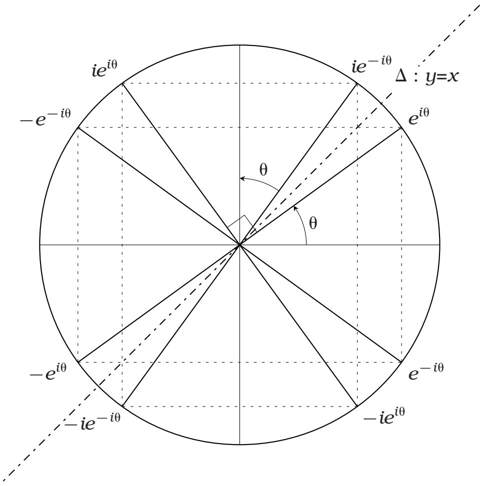
L'écriture complexe de $\mathrm{rot}_{0,\pi/2}$ est $z' = iz$. Cela permet de placer facilement sur $\mathscr{C}$ les points d'affixe $\pm e^{\pm i\theta}$ et $\pm i\, e^{\pm i\theta}$ et d'en déduire les formules exposées dans les deux formulaires ci-après. On observe diverses symétries par rapport aux axes, à la droite $\Delta\ : y = x$, par rapport à O. En particulier, les points d'affixes $e^{i\theta}$ et $i\, e^{-i\theta}$ sont symétriques par rapport à Δ, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta.$$

Et, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$$
$$\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin\theta.$$



Formulaire 2

- $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$, $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
- $\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\theta$, $\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

Formulaire 3

- Pour tout réel θ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$:

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta.$$

- Pour tout réel θ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$:

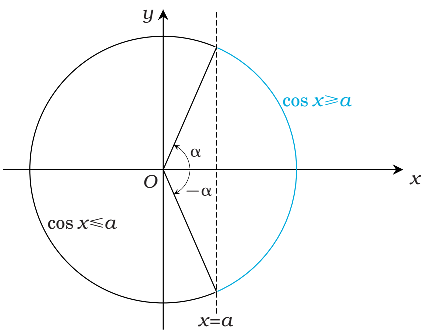
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} \quad\text{et}\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}.$$ ✎ (62)

✎ (62) En particulier, deux droites de pentes m et m' sont orthogonales si et seulement si $mm' = -1$.

1.2 – Équations et inéquations

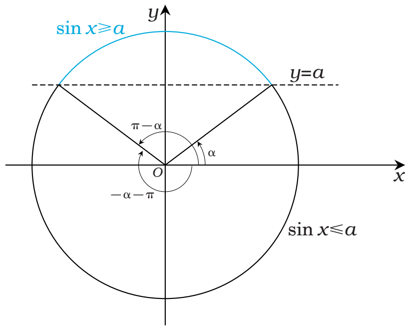
Soit a un réel tel que $-1 \leqslant a \leqslant 1$.
Il existe un unique réel α tel que $a = \cos\alpha$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

- Les solutions de l'équation $\cos x = a$ sont les réels x tels que $x \equiv \alpha\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\,[2\pi]$.
- Les solutions de l'inéquation $\cos x \leqslant a$ sont les réels x pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
  $\alpha + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - \alpha + 2k\pi.$
- Les solutions de l'inéquation $\cos x \geqslant a$ sont les réels x pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
  $-\alpha + 2k\pi \leqslant x \leqslant \alpha + 2k\pi.$



Soit a un réel tel que $-1 \leqslant a \leqslant 1$.
Il existe un unique réel α tel que $a = \sin\alpha$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

- Les solutions de l'équation $\sin x = a$ sont les réels x tels que $x \equiv \alpha\,[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \alpha\,[2\pi]$.
- Les solutions de l'inéquation $\sin x \leqslant a$ sont les réels x pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
  $-\alpha - \pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant \alpha + 2k\pi$.
- Les solutions de l'inéquation $\sin x \geqslant a$ sont les réels x pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
  $\alpha + 2k\pi \leqslant x \leqslant \pi - \alpha + 2k\pi$.



Soit a un réel.
Il existe un unique réel α tel que :

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \tan\alpha = a.$$

- Les solutions de l'équation $\tan x = a$ sont les réels x tels que $x \equiv \alpha[\pi]$.
- Les solutions de l'inéquation $\tan x \leqslant a$ sont les réels x pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

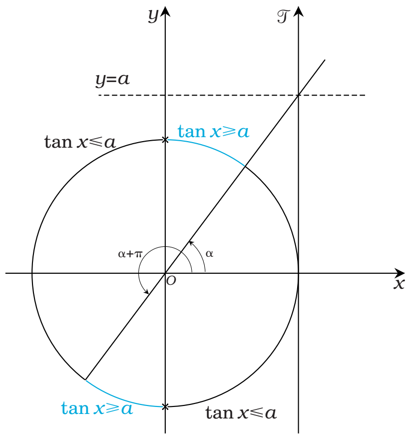
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leqslant \alpha + 2k\pi \qquad \text{ou}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leqslant \alpha + \pi + 2k\pi.$$

- Les solutions de l'inéquation $\tan x \geqslant a$ sont les réels x pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\alpha + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{ou}$$

$$\alpha + \pi + 2k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$



2. Formules de trigonométrie

2.1 – Formules d'addition

Soit a et b des réels. Pour établir la relation $e^{i(a+b)} = e^{ia}\, e^{ib}$, on a déjà utilisé :

$\cos(a+b) = \cos a \,\cos b - \sin a \,\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \,\cos b + \sin b \,\cos a$.

En remplaçant b par $-b$, on obtient deux autres formules.

Formulaire 4

$$\cos(a+b) = \cos a \,\cos b - \sin a \,\sin b, \qquad \sin(a+b) = \sin a \,\cos b + \sin b \,\cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \,\cos b + \sin a \,\sin b, \qquad \sin(a-b) = \sin a \,\cos b - \sin b \,\cos a$$

$\tan x$ est défini, pour tout $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Étant donné a et b réels, $a + b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$.

Il vient alors $\tan(a+b) = \dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$.

Si on a de plus $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, alors il vient $\cos a \cos b \neq 0$ et on divise le numérateur et le dénominateur par $\cos a \cos b$.

Formulaire 5

Pour $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.\quad (63)$$

Pour $a \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a-b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.\quad (64)\quad (65)$$

(63) Avec $b=\pi/2-a$, on a $\tan b = 1/\tan a$, donc $\tan a \tan b = 1$.

(64) On change b en $-b$ dans la formule précédente.

(65) Si $a-b=\pi/2[\pi]$ on a $\tan a \tan b = -1$.

2.2 – Duplication de l'argument

Dans les formules d'addition, le cas particulier $a = b$ donne

Formulaire 6

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a, \text{ ou } (66)\ \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \text{ ou } \cos^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.\quad (67)$$

(66) En utilisant $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

(67) Avec $a \not\equiv \pi/2[\pi]$ et $a \not\equiv \pi/4[\pi]$.

Expression de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ en fonction de $\tan(\theta/2)$

On sait que, pour $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$. Il vient alors :

$$\sin 2a = 2\tan a \cos^2 a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a} \quad\text{et}\quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 a} - 1.$$

Formulaire 7

Pour $\theta \not\equiv \pi\,[2\pi]$ (68) on pose $t = \tan\frac{\theta}{2}$ et on obtient :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2} \text{ avec aussi } \theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi].$$

(68) Dans les formules ci-dessus, on pose $\theta = 2a$.

Exemple 8 Équation $a\cos x + b\sin x = c$.

a, b, c sont des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

a) **Avec les formules d'addition**

L'équation s'écrit $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, où α est un réel tel que :

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad\text{et}\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- Si $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $|c| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$, les solutions sont les réels x tels que $x \equiv \alpha \pm \beta\,[2\pi]$, où β est un réel tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Le calcul explicite de $\cos x$ et de $\sin x$ s'obtient après celui de $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$ en utilisant les formules d'addition.

b) **Avec l'angle moitié**

Si les réels x tels que $x \equiv \pi\,[2\pi]$ ne sont pas solutions ($a + c \neq 0$), on ramène l'équation à un équation du second degré en posant $t = \tan(x/2)$. L'équation obtenue est :

$$(a+c)t^2 - 2bt + (c-a) = 0,$$

son discriminant réduit est $\Delta' = a^2 + b^2 - c^2$.

- Si $\Delta' < 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $\Delta' \geqslant 0$, l'équation en t admet une ou deux solutions t_1 et t_2, on résout ensuite les équations :

$$\tan\frac{x}{2} = t_1 \quad\text{et}\quad \tan\frac{x}{2} = t_2.$$

2.3 – Conversion de sommes en produits

Formulaire 8

Pour tous réels a, b,

$$\cos a \ \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin a \ \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a \ \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a, \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$ [69]

[69] On les obtient directement à partir des formules de duplication.

Ces formules s'obtiennent à partir des formules d'addition. On peut aussi utiliser les formules d'Euler. Par exemple :

$$\cos a \cos b = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\,\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a+b)}+e^{-i(a-b)}\right)$$

et il vient $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$.

Les formules inverses : conversion de sommes en produits peuvent se déduire des précédentes par le simple changement de variable : $p = a+b$, $q = a-b$.

Formulaire 9

Pour tous réels p et q :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}.$$

Ces formules s'obtiennent aussi avec les factorisations :

$$e^{ip}+e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2\cos\frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad e^{ip}-e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2i\sin\frac{p-q}{2}.$$

2.4 – Linéarisations

1) Pour linéariser des expressions du type $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$, on utilise les formules d'Euler.
En posant $z = e^{i\theta}$ on a $2\cos\theta = z + z^{-1}$ et $2i\sin\theta = z - z^{-1}$.
En utilisant la formule du binôme de Newton, il vient :

$$2^n\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-2k} \quad \text{et} \quad (2i)^n\sin^n\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} z^{n-2k}.$$

On regroupe alors les termes correspondant aux indices k et $n-k$, en distinguant les cas où n est pair et où n est impair.

- Si $n = 2p-1$ est impair, il vient :

$$\cos^{2p-1}\theta = \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p-1}{k}\left(z^{2p-1-2k}+z^{2k+1-2p}\right)$$

$$= \frac{1}{4^{p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p-1}{k}\cos(2p-1-2k)\theta$$

$$\sin^{2p-1}\theta = \frac{1}{(2i)^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} \left(z^{2p-1-2k} - z^{2k+1-2p}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{4^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} \sin(2p-1-2k)\theta$$

- Si $n = 2p$ est pair, il vient :

$$\cos^{2p}\theta = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \left(z^{2p-2k} + z^{2k-2p}\right) + \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$$

$$= \frac{1}{4^p} \left[2 \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \binom{2p}{k} \cos(2p-2k)\theta \right\} + \binom{2p}{p} \right]$$

$$\sin^{2p}\theta = \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{2p}{k} \left(z^{2p-2k} + z^{2k-2p}\right) + \frac{(-1)^p \binom{2p}{p}}{(2i)^{2p}}$$

$$= \frac{(-1)^p}{4^p} \left[2 \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ (-1)^k \binom{2p}{k} \cos(2p-2k)\theta \right\} + (-1)^p \binom{2p}{p} \right]$$

2) Pour linéariser des expressions du type $\cos^p\theta \sin^q\theta$, on peut :

- linéariser $\cos^p\theta$ et $\sin^q\theta$, développer le produit des sommes obtenues ; il vient une somme de termes du type $\cos a \cos b$ ou $\sin a \cos b$ que l'on linéarise à leur tour ;
- écrire, toujours avec $z = e^{i\theta}$, $2^p(2i)^q \cos^p\theta \sin^q\theta = \left(z + z^{-1}\right)^p \left(z - z^{-1}\right)^q$, développer et procéder à des regroupements de termes ;
- observer des simplifications en utilisant des formules de trigonométrie.

2.5 – Transformation de $\tan(n\theta)$, $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$

Soit n un entier naturel normal. Pour tout réel θ, en utilisant la formule du binôme, il vient

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(i\sin\theta)^k.$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on déduit :

$$\cos n\theta = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \cos^{n-2\ell}\theta \sin^{2\ell}\theta$$

$$\sin n\theta = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^\ell \binom{n}{2\,\ell+1} \cos^{n-2\ell-1}\theta \sin^{2\ell+1}\theta.$$

Si $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ on obtient, en factorisant par $\cos^n\theta$:

$$\cos n\theta = \cos^n\theta \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \tan^{2\ell}\theta$$

$$\sin n\theta = \cos^n\theta \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^\ell \binom{n}{2\,\ell+1} \tan^{2\ell+1}\theta.$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 30

Pour tout entier naturel non nul et pour tout réel θ tel que :

$$\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ et } n\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

on a : $$\tan(n\theta) = \frac{\displaystyle\sum_{0\leqslant \ell \leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^{\ell} \binom{n}{2\ell+1} t^{2\ell+1}}{\displaystyle\sum_{0\leqslant \ell \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^{\ell} \binom{n}{2\ell} t^{2\ell}}$$ où $t = \tan\theta$.

Exemple 9 $\tan(2\theta) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\tan(3\theta) = \dfrac{3t-t^3}{1-3t^2}$, $\tan(4\theta) = \dfrac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$.

Définition 14

La suite des polynômes de Tchebycheff $\left(T_n\right)_{n\geqslant 0}$ est définie par :

$$\begin{cases} T_0(z) = 1, \ T_1(z) = z \\ \forall n \geqslant 1, \ T_{n+1}(z) - 2z\,T_n(z) + T_{n-1}(z) = 0. \end{cases}$$

Propriété 31

Pour tout entier naturel n, on a : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta) \\ n\sin(n\theta) = \sin\theta\, T_n'(\cos\theta). \end{cases}$

☞ La première formule s'obtient par une récurrence à deux pas en notant que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n+1)\,\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$.
La seconde formule s'obtient par dérivation de la première.

Exemple 10 On calcule les premiers polynômes de Tchebycheff et les polynômes dérivés.

$$\begin{cases} T_0(z) = 1 \\ T_1(z) = z \\ T_2(z) = 2z^2 - 1 \\ T_3(z) = 4z^3 - 3z \\ T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\ \cos 3\theta = 4\cos^3 - 3\cos\theta \\ \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2'(z) = 4z \\ T_3'(z) = 12z^2 - 3 \\ T_4'(z) = 32z^3 - 16z \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \sin 2\theta = \sin\theta(2cos\theta) \\ \sin 3\theta = \sin\theta\left(4\cos^2\theta - 1\right) \\ \sin 4\theta = \sin\theta\left(8\cos^3\theta - 4\cos\theta\right) \end{cases}$$

E. Exponentielle complexe

Définition 15

Pour tout complexe z, on pose $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$. ✎ (70)

✎ (70) e^z est aussi noté $\exp(z)$.

Propriété 32

Pour tout complexe z, e^z est non nul, avec :

$$\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)} \text{ et } \arg\left(e^z\right) = \mathrm{Im}(z)\left[2\,\pi\right].$$

Propriété 33

Pour tous complexes z et z' :

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Avec $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ où x, x', y et y' sont réels, on calcule :

$$e^{z+z'} = e^{x+x'} e^{i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^z e^{z'}.$$

Avec $e^0 = 1$, on déduit $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété 34

Pour tous complexes z et z', on a :

$$e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi.\ ^{(71)}$$

(71) $2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

On a les équivalences suivantes :

$$e^z = e^{z'} \iff e^{z-z} = 1 \iff \operatorname{Re}(z - z') = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(m - m') \equiv 0\,[2\pi].$$

Propriété 35

Soit a un nombre complexe et l'équation (E) : $e^z = a$, $z \in \mathbb{C}$.

1) Si $a = 0$, (E) n'a pas de solution.

2) Si $a \neq 0$, les solutions de (E) sont les nombres complexes :

$$\ell n\,|a| + i(\arg a + 2k\pi),\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le premier point résulte du fait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

Si $a \neq 0$, on les équivalences :

$$e^z = a \iff e^{\operatorname{Re}(z)} = |a| \text{ et } \operatorname{Im} z \equiv \arg(a)\,[2\pi]$$

$$\iff \operatorname{Re}(z) = \ell n\,|a| \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \operatorname{Im} z = \arg a + 2k\pi.$$

Méthodes

L'essentiel

I. Calculs et équations dans $\mathbb{C}$

■ **Conjugué d'un nombre complexe**

✔ **Si l'on veut** calculer un module

■ **on peut** penser à l'expression $|z|^2 = z\overline{z}$ qui est souvent plus efficace que $|z|^2 = a^2 + b^2$, $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

✔ **Si l'on veut** traduire que z est réel

■ **on peut** écrire $\overline{z} = z$.

✔ **Si l'on veut** traduire que z est imaginaire pur

■ **on peut** écrire que $\overline{z} = -z$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 3, 16 et 18

✔ **Si l'on veut** rendre réel le dénominateur dans un quotient $\dfrac{a}{b}$

■ **on peut** multiplier a et b par $\overline{b}$.

■ **Forme algébrique ou trigonométrique ?**

✔ **Si l'on veut** travailler dans un contexte additif

■ **on peut** utiliser la forme algébrique.

✔ **Si l'on veut** travailler dans un contexte multiplicatif

■ **on peut** utiliser la forme trigonométrique (ou exponentielle).

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 2, 14 et 15

✔ **Si l'on veut** calculer la valeur exacte du sinus ou du cosinus d'un angle θ

■ **on peut** comparer les deux formes d'un nombre d'argument θ.

✔ **Si l'on veut** calculer les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

■ **on peut** utiliser sa forme trigonométrique.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8

■ **Équations à coefficients réels ou complexes**

Si les coefficients d'une équation algébrique sont réels, les racines sont réelles ou deux à deux conjuguées.

Si les coefficients de deux équations sont deux à deux conjugués, les racines de l'une sont les conjuguées de celles de l'autre.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation du second degré

■ **on peut** penser à sa forme canonique ou utiliser son discriminant.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 4, 6 et 7

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation de degré 3 ou plus

■ **on peut** chercher une racine apparente réelle, ou une racine imaginaire pure.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

II. Application à la trigonométrie

✔ **Si l'on veut** calculer une somme de fonctions trigonométriques

- **on peut** l'interpréter comme partie réelle ou imaginaire d'une somme géométrique à l'aide de $\cos n\theta = \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right)$ ou $\sin n\theta = \mathrm{Im}\left(e^{in\theta}\right)$.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 9 et 11

✔ **Si l'on veut** linéariser une expression trigonométrique

- **on peut**
  - utiliser les formules d'Euler ou
  - mettre en œuvre les formules trigonométriques élémentaires.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 10

✔ **Si l'on veut** exprimer $\cos nx$ ou $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$

- **on peut** utiliser les polynômes de Tchebycheff.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 12

III. Nombres complexes et géométrie

Dans les applications géométriques, le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

- **Questions d'alignements, d'angles**

✔ **Si l'on veut** traiter une question portant sur des points A, B, C...

- **on peut** penser à les repérer par leurs affixes a, b, c.

✔ **Si l'on veut** exprimer que A, B, C distincts sont alignés

- **on peut** écrire que $\dfrac{c-b}{c-a}$ est réel.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 20

✔ **Si l'on veut** exprimer que ABC est rectangle en C

- **on peut** écrire que $\dfrac{c-b}{c-a}$ est imaginaire pur.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 21

- **Transformations géométriques**

✔ **Si l'on veut** effectuer une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, d'affixe a

- **on peut** penser à la représentation complexe $z \mapsto z + a$.

✔ **Si l'on veut** effectuer une homothétie de centre Ω, d'affixe ω et de rapport k

- **on peut** penser à la représentation complexe $z \mapsto \omega + k(z - \omega)$.

✔ **Si l'on veut** effectuer une rotation d'angle α et de centre Ω, d'affixe ω

- **on peut** penser à la représentation complexe : $z \mapsto \omega + e^{i\alpha}\left(z - \omega\right)$.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 13, 17, 18 et 19

Mise en œuvre

Ex. 1

Calculer les parties réelle et imaginaire de a) $(3+2i)^2(2-i)$ b) $\dfrac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$.

Solution

a) $(3+2i)^2 = 9+12i+4i^2$ donc $(3+2i)^2 = 5+12i$. Ensuite,

$(5+12i)(2-i) = 10-5i+24i-12i^2$, donc $(3+12i)(2-i) = 22+19i$.

b) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$.

Il vient alors $\dfrac{1+i}{1-i} = i$. Pour achever, $i(3+2i) = -2+3i$.

Commentaires

Développement d'un carré, et $i^2=-1$.

En développant.

En multipliant par le conjugué du dénominateur.

$(1+i)^2=2i$ et $|1-i|^2=2$.

Ex. 2

Calculer $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9$.

Indications

Utilisation de la forme trigonométrique et de la formule de Moivre.

Solution

Le module du nombre $z = 1+i\sqrt{3}$ est $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$, c'est-à-dire 2.

On a donc $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et z a $\dfrac{\pi}{3}$ pour argument.

Ainsi $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, et il vient $z^9 = 2^9e^{3i\pi}$.

Avec $e^{3i\pi} = -1$, on obtient $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9 = -512$.

Commentaires

La forme trigonométrique est adaptée au langage multiplicatif, et, en particulier, aux calculs de puissances.

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Formule de Moivre.

$\cos 3\pi=-1$ et $\sin 3\pi=0$.

Ex. 3

z étant un complexe différent de 1, calculer les parties réelle et imaginaire de $Z = \dfrac{2+\overline{z}}{1-\overline{z}}$.

Indications

On rend réel le dénominateur en multipliant par le conjugué de ce dénominateur.

Il serait bien long de passer trop vite aux parties réelles et imaginaires.

Solution

On a $Z = \dfrac{(2+\overline{z})(1-z)}{(1-\overline{z})(1-z)}$.

$(1-\overline{z})(1-z) = 1-z-\overline{z}+z\overline{z} = 1-2x+x^2+y^2 = (x-1)^2+y^2$

$(2+\overline{z})(1-z) = 2-2z+\overline{z}-z\overline{z} = 2-x-x^2-y^2-3iy.$

Finalement, $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{2-x-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}$, $\mathrm{Im}(Z) = -\dfrac{3y}{(x-1)^2+y^2}$.

Commentaires

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $1-z$ de $1-\overline{z}$.

Avec $z=x+iy$, x et y réels.

Ex. 4

Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré :

$$(\mathrm{E}_1)\quad 2x^2 - 10x + 13 = 0, \qquad (\mathrm{E}_2)\quad x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0 \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ donné.}$$

Indications

La forme canonique est préférable à l'utilisation du discriminant.

Solution

1) L'équation (E_1) s'écrit aussi $x^2 - 5x + \dfrac{13}{2} = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 \text{ ou encore } \left(x - \frac{5}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0.$$

Les solutions sont donc $\dfrac{5-i}{2}$ et $\dfrac{5+i}{2}$.

2) $x^2 - 2x\cos\theta + 1$ s'écrit aussi $(x - \cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta$ ou :

$(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$, ou encore $(x - \cos\theta + i\sin\theta)(x - \cos\theta + - \sin\theta)$.

Les racines de (E_2) sont $\cos\theta + i\sin\theta$ et $\cos\theta - i\sin\theta$.

Autre solution : $\Delta' = \cos^2\theta - 1$, soit $\Delta' = (i\sin\theta)^2$.

Les racines de (E_2) sont $\cos\theta + i\sin\theta$ et $\cos\theta - i\sin\theta$ c'est-à-dire $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Notons que, si $\sin\theta = 0$, il y a une racine double $\cos\theta$.

- $\theta = 0\ (2\pi)$, $\cos\theta = 1$,
- $\theta = \pi\ (2\pi)$, $\cos\theta = -1$.

Commentaires

Le discriminant (réduit) n'est pas indispensable.

$A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$.

ou encore $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

avec le discriminant (réduit) $\Delta' = -\sin^2\theta$.

Ex. 5

Une équation de degré 3

Soit le polynôme à coefficients réels $P(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.

1) Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation de $P(x)$.

2) Calculer les racines (complexes) de $P(x)$.

Indications

Pour une équation de degré 3, on cherche une solution «apparente».

Solution

1) $P(2) = 2^3 - 6\times 2^2 + 13\times 2 - 10 = 8 - 24 + 26 - 10$ donc $P(2) = 0$.

Effectuons alors la factorisation de $P(x)$ par $x - 2$.
Il existe a, b, c réels tels que

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$

$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$ donne

$$a = 1,\quad b - 2a = -6,\quad c - 2b = 13,\quad -2c = -10,$$

d'où $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$. Ainsi, $P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 5)$.

2) $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ montre que $x^2 - 4x + 5$ n'a pas de racine réelle. 2 est donc la seule racine réelle de $P(x)$.

$(x-2)^2 + 1 = (x - 2 - i)(x - 2 + i)$ montre que les racines complexes de $x^2 - 4x + 5$ sont $2 - i$ et $2 + i$.
Dans $\mathbb{C}$, les racines de $P(x)$ sont 2, $2 - i$ et $2 + i$.

Commentaires

$P(x)$, à coefficients réels, est factorisable par $x - d$ si et seulement si $P(d) = 0$.
L'objectif est de se ramener à un produit de facteurs du premier ou du second degré.

Par identification.

On peut aussi calculer le discriminant (réduit) : $\Delta' = -1$.

$A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$.

Ex. 6

Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C},\ \left(2z^2 - 3z + 2\right)^2 + \left(z^2 - 3z + 2\right)^2 = 0.$

Indications

On factorise avec l'identité remarquable $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.
On est alors ramené à deux équations du second degré à coefficients conjugués.

Solution

On factorise $\left(2z^2 - 3z + 2\right)^2 + \left(z^2 - 3z + 2\right)^2$ en :
$\left((2+i)z^2 - 3(1+i)z + 2(1+i)\right)\left((2-i)z^2 - 3(1-i)z + 2(1-i)\right)$.

$(E_1) : (2+i)z^2 - 3(1+i)z + 2(1+i) = 0$ a pour discriminant $\Delta = (1-3i)^2$.

Ses racines sont $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \dfrac{2}{5}(2+i)$.

$(E_2) : (2-i)z^2 - 3(1-i)z + 2(1-i) = 0$ est la conjuguée de (E_1).
Ses racines z_3 et z_4 sont les conjuguées de z_1 et z_2.

Commentaires

De la forme a^2+b^2.

$\Delta = 9(1+i)^2 - 8(1+i)(2+i)$ donc
$\Delta = -8-6i = 1-6i-9 = (1-3i)^2$.

Leurs coefficients sont conjugués.

Ex. 7

Soit u un réel tel que $|u| < \pi$. Calculer les module et argument de chacune des racines de l'équation :

$$z \in \mathbb{C},\ z^2 - 2z(\cos u + i\sin u) + 2i\sin u(\cos u + i\sin u) = 0.$$

Indications

Pour le discriminant (réduit) utiliser $z^2 - 2e^{iu}z + 2ie^{iu}\sin u = 0$. Pour mettre les racines sous forme de produits, utiliser $1 - \cos u = 2\sin^2\dfrac{u}{2}$, $1 + \cos u = 2\cos^2\dfrac{u}{2}$ et $\sin u = 2\sin\dfrac{u}{2}\cos\dfrac{u}{2}$.

Solution

Le discriminant réduit est $\Delta' = e^{2iu} - 2ie^{iu}\sin u = 1$.
Les racines sont $z_1 = \cos u + i\sin u - 1$ et $z_2 = \cos u + i\sin u + 1$.

$$z_1 = -2\sin^2\frac{u}{2} + 2i\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2} = 2i\sin\frac{u}{2}\left(\cos\frac{u}{2} + i\sin\frac{u}{2}\right).$$

Pour $-\pi < u < 0$, $\arg\left(2i\sin\dfrac{u}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $z_1 = \left[-2\sin\dfrac{u}{2}, \dfrac{u-\pi}{2}\right]$

et pour $0 < u < \pi$, $z_1 = \left[2\sin\dfrac{u}{2}, \dfrac{u+\pi}{2}\right]$.

$$z_2 = 2\cos^2\frac{u}{2} + 2i\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2} = 2\cos\frac{u}{2}\left(\cos\frac{u}{2} + i\sin\frac{u}{2}\right),$$

d'où $z_2 = \left[2\cos\dfrac{u}{2}, \dfrac{u}{2}\right]$.

Commentaires

$\Delta' = e^{iu}(\cos u - i\sin u) = 1$.

$1 - \cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$.

$\left|i\sin\frac{u}{2}\right| = \left|\sin\frac{u}{2}\right|$, $e^{i\frac{u}{2}} = \left[1, \frac{u}{2}\right]$.

$1 + \cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}$.

Ex. 8

On pose, comme il est usuel, $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.
Soit z un nombre complexe tel que $\overline{z} = jz^2$, calculer le module $|z|$ de z.
Déterminer les solutions de l'équation $z \in \mathbb{C},\ \overline{z} = jz^2$.

Indications

Mise en œuvre de j, racine cubique de 1.

Solution

- Analyse

De $\overline{z} = j\,z^2$, on déduit $|z| = |j|\ |z|^2$ donc $|z| = |z|^2$, ce qui donne $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. Ainsi les solutions de $\overline{z} = j\,z^2$ sont à rechercher parmi les nombres 0 et $e^{i\alpha}$.

Avec $|\overline{z}| = |z|$.

Les nombres $e^{i\alpha}$ sont les complexes de module 1.

- Synthèse

0 est solution évidente de l'équation.

Par ailleurs, étant donné α réel, $e^{i\alpha}$ est solution si et seulement si :

$$e^{-i\alpha} = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{2i\alpha}.$$

On utilise $\arg \overline{z} = -\arg z$ et $\arg zz' = \arg z + \arg z'$.

c'est-à-dire si et seulement si $e^{3i\alpha} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$, ou encore :

il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3\alpha = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

En multipliant les deux membres par $e^{i\alpha}$, il vient $e^{3i\alpha} e^{\frac{2i\pi}{3}} = 1$. L'égalité d'arguments est définie à un multiple entier relatif de 2π près.

Les solutions sont donc celles d'arguments $\alpha = -\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$, ce qui donne, modulo 2π, trois valeurs distinctes pour α : $-\dfrac{2\pi}{9}$, $\dfrac{4\pi}{9}$ et $\dfrac{10\pi}{9}$.

En conclusion, les solutions sont : 0, $e^{-i\frac{2\pi}{9}}$, $e^{i\frac{4\pi}{9}}$ et $e^{i\frac{10\pi}{9}}$.

Ex. 9

Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}, \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \quad (E)$.

Indications

Deux méthodes sont possibles :

1) transformer la somme $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ en produit,

2) calculer cette somme en utilisant les exponentielles complexes.

Solution

1) Première méthode

Les formules de transformation des sommes en produits donnent :

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

donc $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x(1 + 2\cos x)$.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des solutions de (E) est constitué des réels x qui vérifient $\sin 2x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\mathcal{S}(E) = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{k\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

soit aussi $\mathcal{S}(E) = \left\{ \dfrac{2k\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2) Deuxième méthode

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ est la partie imaginaire de $e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix}$.

L'objectif est encore de transformer cette somme en un produit.

$e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix}$ est la somme de trois termes en progression géométrique.

Raison e^{ix} et premier terme e^{ix}.

La raison e^{ix} est égale à 1 quand $x \equiv 0 \bmod 2\pi$. Il est immédiat que tous ces réels sont solutions de (E).

D'abord, on élimine le cas particulier où la raison vaut 1.

Quand $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$, on a $e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix} = e^{ix} \dfrac{e^{3ix} - 1}{e^{ix} - 1}$

$a + aq + aq^2 = a\dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$ quand $q \neq 1$.

$e^{3ix} - 1 = e^{3i\frac{x}{2}} \left(e^{3i\frac{x}{2}} - e^{-3i\frac{x}{2}} \right)$ et $e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \right)$.

On se met en situation d'utiliser les formules d'Euler.

Avec $e^{ix}\dfrac{e^{3i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} = e^{2ix}$, il vient alors $e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix} = e^{2ix}\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Calcul sur les exposants et $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha$.

La partie imaginaire de $e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix}$ est donc $\dfrac{\sin 2x \sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Avec $e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x$.

Dans ce deuxième cas, les solutions sont les réels tels que $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\sin\dfrac{3x}{2} = 0$ ou $\sin 2x = 0$.

Pour $x \neq 2k\pi$, on a $\frac{x}{2} \neq k\pi$, donc $\sin\frac{x}{2} \neq 0$.

Il s'agit des réels $\dfrac{2k\pi}{3}$ avec k entier non multiple de 6, et $\dfrac{k\pi}{2}$ avec k entier non multiple de 4.
Comme on a vu dans le premier cas que les nombres $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont solutions, on retrouve :

$$\mathcal{S}(E) = \left\{\frac{2k\pi}{3} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Il apparaît que cette deuxième méthode est bien plus pénible que la première : une parfaite connaissance des formules usuelles de trigonométrie ne doit pas être considérée comme un luxe dont on peut se passer.

Ex. 10

Linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$.

Indications

Deux méthodes : les formules d'Euler ou les formules élémentaires de trigonométrie.

Solution

1) Première méthode, formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2^4}\left[\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} - \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 2\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right] \\
&= -\frac{1}{16}(\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x).
\end{aligned}$$

2) Méthode trigonométrique

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x).$$

On a donc $\cos^2 x \sin^3 x = \dfrac{1}{8}(\sin x - \sin x \cos 4x)$, et on conclut avec :

$$\sin x \cos 4x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin 3x).$$

Commentaires

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Comme prévu, il s'agit essentiellement d'un calcul algébrique, avec, en début et en final, l'appel aux formules d'Euler.

$\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$ et $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

$\sin p \cos q = \frac{1}{2}\left(\sin(p+q) + \sin(p-q)\right)$.

Ex. 11

Somme trigonométrique

Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(x + k\alpha)$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(x + k\alpha)$.

Indications

Former $C_n + iS_n$ et distinguer $e^{i\alpha} = 1$ et $e^{i\alpha} \neq 1$.

Solution

1) $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(x+k\alpha)} = e^{ix} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha}$.

$\left(e^{ik\alpha}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

2) Premier cas, $e^{i\alpha} = 1$

$$C_n + iS_n = (n+1)e^{ix},\ C_n = (n+1)\cos x,\ S_n = (n+1)\sin x.$$

3) Deuxième cas, $e^{i\alpha} \neq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha} = \frac{e^{i(n+1)\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}} \frac{e^{i(n+1)\frac{\alpha}{2}} - e^{-i(n+1)\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = e^{in\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$C_n = \cos\left(x + \frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ S_n = \sin\left(x + \frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Commentaires

$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(x+k\alpha) + i\sin(x+k\alpha)$.

De premier terme 1, de raison $e^{i\alpha}$.

$\alpha \equiv 0 \bmod (2\pi)$.

$\alpha \not\equiv 0 \bmod (2\pi)$.

$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha} = \frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1}$.

En identifiant parties réelles et parties imaginaires des deux membres.

Ex. 12

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{3+4i}{5}$ n'est pas une racine n ième de 1.

Indications

Raisonner par l'absurde et utiliser les polynômes de Tchebycheff.

Solution

On a $\left|\frac{3+4i}{5}\right| = 1$; posons $\frac{3+4i}{5} = e^{i\theta}$.

Supposons $\frac{3+4i}{5} \in \mathbb{U}_n$. Alors $\cos n\theta = 1$.

Or $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ où T_n est le polynôme de Tchebycheff de degré n.
Les formules :

$$\begin{cases} T_0(z) = 1 \\ T_1(z) = z \\ T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z) \end{cases}$$

prouvent que les coefficients de T_n sont des entiers, et que le coefficient dominant vaut 2^{n-1}.

En écrivant : $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z_k$, $c_k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$2^{n-1}3^n = 5^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k 3^k 5^{n-k},$$

ce qui apporte une contradiction car $2^{n-1}3^n$ n'est pas multiple de 5.

Commentaires

Ex. 13

Étant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on forme $Z = \frac{z+i}{z-2i}$.

1) Déterminer l'ensemble (E_1) des images des nombres z tels que Z soit réel.

2) Déterminer l'ensemble (E_2) des images des nombres z tels que Z soit imaginaire pur.

3) Déterminer l'ensemble (E_3) des images des nombres z tels que Z ait $\frac{\pi}{2}$ pour argument.

Solution

1) $Z = \overline{Z}$ se lit $(z+i)(\overline{z}+2i) = (\overline{z}-i)(z-2i)$, $z \neq 2i$, soit $z+\overline{z} = 0$, $z \neq 2i$, c'est-à-dire z imaginaire pur différent de $2i$.
L'ensemble (E_1) est donc l'axe des ordonnées, sauf le point $(0,2)$.

2) $Z + \overline{Z} = 0$ se lit $(z+i)(\overline{z}+2i) + (\overline{z}-i)(z-2i) = 0$, $z \neq 2i$, soit :

$$2z\overline{z} - 4 + i(z - \overline{z}) = 0,\ z \neq 2i$$

c'est-à-dire $x^2 + y^2 - y - 2 = 0$, $(x,y) \neq (0,2)$, ou encore :

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},\ (x,y) \neq (0,2).$$

(E_2) est donc le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, de rayon $\frac{3}{2}$ privé du point $B = (0,2)$.

3) $\arg Z = \frac{\pi}{2}$ équivaut à $\operatorname{Re} Z = 0$ et $\operatorname{Im} Z > 0$.

Avec $Z = \dfrac{(z+i)(\overline{z}+2i)}{|z-2i|^2} = \dfrac{x^2+y^2-y-2+3ix}{|z-2i|^2}$, on voit que (E_3) est caractérisé par $x^2 + y^2 - y - 2 = 0$ et $x > 0$. Il s'agit donc de la partie de $\mathscr{C}$ constituée des points d'abscisses strictement positives.

Commentaires

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$, $bd \neq 0$.

z est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.
Avec $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$.

On remarque que la condition $x > 0$ donne $z \neq 2i$.

Ex. 14

Étant donné x et y réels, on considère les nombres complexes

$z_1 = x - 4 + i(y+5)$, $\quad z_2 = x + 4 + i(1-y)$ $\quad z = x + iy$ et son image $M = (x,y)$ dans le plan.

1) Pour quel point M a-t-on $z_1 = 3z_2$?

2) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que $z_1 - z_2$ soit réel.

3) On note A le point d'affixe $-2i$. Montrer que $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $|z+2i| = 5$.
En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M tels que $z_1 z_2$ soit imaginaire pur.

Solution

1) $z_1 = 3z_2$ équivaut à $x - 4 + i(y+5) = 3(x+4) + 3i(1-y)$

soit : $\begin{cases} x - 4 = 3(x+4) \\ y + 5 = 3(1-y) \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} 2x = -16 \\ 4y = -2 \end{cases}$

Le point qui correspond à la solution est $M = \left(-8, -\frac{1}{2}\right)$.

2) On a $z_1 - z_2 = -8 + i(2y+4)$.
$z_1 - z_2$ est réel si et seulement si $2y + 4 = 0$, c'est-à-dire $y = -2$.
L'ensemble $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = -2$.

3) La partie réelle de $z_1 z_2$ est $(x-4)(x+4) - (y+5)(1-y)$.

$z_1 z_2$ est donc imaginaire pur si et seulement si

$$(x-4)(x+4) - (y+5)(1-y) = 0,$$

soit si et seulement si $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$, c'est-à-dire :

$$x^2 + (y+2)^2 = 25,$$

ou encore $|x + i(y+2)|^2 = 25$, soit $|x + i(y+2)| = 5$.
$z + 2i = z - (-2i)$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$, donc $|z+2i| = 5$ équivaut à $AM = 5$. L'ensemble $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 5.

Commentaires

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Un complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle.

Avec a, b, c, d réels, la partie réelle de $(a+ib)(c+id)$ est $ac - bd$.
Un complexe est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Une somme de carrés de deux réels fait penser au carré du module d'un nombre complexe.

Ex. 15

Rotation dans le plan complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Calculer les module et argument du nombre complexe $a = \sqrt{3} - i$; marquer son image A.

2) On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit f l'application qui, à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de $M' = \mathcal{R}(M)$. Exprimer $f(z)$ à l'aide de z.

3) Construire l'image B de A par la rotation $\mathcal{R}$. Déterminer l'affixe b de B sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

4) Déduire des calculs précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Indications

Les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$ peuvent s'obtenir à partir de celles de $\cos\frac{\pi}{6}$ et de $\sin\frac{\pi}{6}$ ou en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. L'objectif est ici de mettre l'accent sur une rotation.

Solution

1) On a $|a|^2 = \sqrt{3}^2 + (-1)^2$, donc $|a| = 2$. L'argument α de a est défini par $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ (à 2π près).

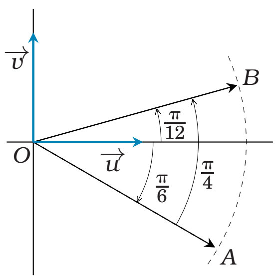
2) On a $f(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$

3) B est sur le cercle de centre O, de rayon OA et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$.

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}-i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left((\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)\right)$$

donc $b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.



Par ailleurs, $b = e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc $b = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$ c'est-à-dire

$$b = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou} \quad b = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

4) L'égalité $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}$

donne alors : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Commentaires

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Faire une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, «c'est multiplier» par $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Forme trigonométrique de b.

Par identification des parties réelles et imaginaires des formes algébrique et trigonométrique.

Ex. 16

Identité du parallélogramme

Montrer que, pour z et z' complexes, on a : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

En déduire que, dans un parallélogramme $ABCD$, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Solution

Développons $\left|z+z'\right|^2$:

$$\left|z+z'\right|^2 = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}.$$

De même, en remplaçant z' par $-z'$, il vient :

$$\left|z-z'\right|^2 = z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'}.$$

On en déduit $\left|z+z'\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 = 2\left|z\right|^2 + 2\left|z'\right|^2$ c'est-à-dire :

$$\left|z+z'\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 = 2\left(\left|z\right|^2 + \left|z'\right|^2\right).$$

Soit a, b, c, d les affixes de A, B, C, D.

On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Avec les affixes, cela s'exprime par $d-a=c-b$ et $b-a=c-d$.

Posons $z=d-a=c-b$ et $z'=b-a=c-d$.

Alors $z+z'=c-a$ et $z-z'=d-b$. On a donc :

$$|c-a|^2 + |d-b|^2 = |d-a|^2 + |c-b|^2 + |b-a|^2 + |c-d|^2$$

c'est-à-dire $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Commentaires

$\left|z+z'\right|^2 = (z+z')\overline{(z+z')}$.

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{-z'} = -\overline{z'}$.

En additionnant les deux égalités précédentes.

$ABCD$ est un parallélogramme.

$\mathrm{aff}(\overrightarrow{AB}) = b-a$.

Avec l'égalité établie au début.

Ex. 17

Soit A, B, C, D quatre points du plan orienté. Sur les côtés du quadrilatère $ABCD$, on construit les triangles isocèles rectangles APB, CQB, CRD, ASD tels que :

$$\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\right) = \pi/2\,, \quad \left(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}\right) = \pi/2\,, \quad \left(\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{RC}\right) = \pi/2\,, \quad \left(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}\right) = \pi/2\,.$$

Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.

Solution

L'objectif est de montrer que $[PR]$ et $[QS]$ ont le même milieu.

Soit p, q, r, s les affixes respectives de P, Q, R, S.

L'affixe du milieu K de $[PR]$ est $(1/2)(p+r)$.

Celle du milieu J de $[QS]$ est $(1/2)(q+s)$.

Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme revient donc à montrer que :

$$p+r=q+s.$$

Soit a, b, c, d les affixes respectives de A, B, C, D.

$\overrightarrow{PA}$ se déduit de $\overrightarrow{PB}$ par la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\pi/2$ ce qui se traduit par : $a-p=i(b-p)$.

Donc $p(1-i)=a-ib$, d'où $2p=(a-ib)(1+i)$.

Finalement, $p=(1/2)\big(a(1+i)+b(1-i)\big)$.

De même :

$$q=(1/2)\big(c(1+i)+b(1-i)\big)$$

$$r=(1/2)\big(c(1+i)+d(1-i)\big)$$

$$s=(1/2)\big(a(1+i)+d(1-i)\big)$$

Avec les expressions des affixes p, q, r et s, il vient :

$$p+r=\frac{1}{2}\big((a+c)(1+i)+(b+d)(1-i)\big)$$

$$\text{et } q+s=\frac{1}{2}\big((a+c)(1+i)+(b+d)(1-i)\big)$$

donc $p+r=q+s$ et $PQRS$ est un parallélogramme.

Commentaires

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR})$.

$\mathrm{Aff}(\overrightarrow{PA}) = e^{i\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{Aff}(\overrightarrow{PB})$.

On multiplie les deux membres par $1+i$.

$\mathrm{aff}(\overrightarrow{QC}) = e^{i\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{aff}(\overrightarrow{QB})$

$\mathrm{Aff}(\overrightarrow{RC}) = e^{i\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{Aff}(\overrightarrow{RD})$

$\mathrm{Aff}(\overrightarrow{SA}) = e^{i\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{Aff}(\overrightarrow{CD})$.

Ex. 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Étant donné un point M d'affixe z, on considère le point M' d'affixe z^3.
Déterminer l'ensemble des points M tels que M, M' et A (d'affixe 1) soient alignés.

Solution

1) Remarquons tout d'abord que l'alignement est réalisé dès que deux des points A, M ou M' sont confondus.

- $A = M$ lorsque $z = 1$.
- $M = M'$ lorsque $z = z^3$, c'est-à-dire $z = 0$, $z = 1$ ou $z = -1$.
- $A = M'$ si et seulement si $z^3 = 1$ c'est-à-dire $z = 1$, $z = j$ ou $z = j^2$.

En conclusion deux des points A, M et M' sont confondus si et seulement si :

$$z = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1 \text{ ou } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

2) Si M n'a pas l'une des affixes rencontrées ci-dessus, les points A, M et M' sont distincts.

Ils sont alors alignés lorsque le nombre $\dfrac{z^3 - 1}{z - 1}$ est réel, c'est-à-dire si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel.

$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$ montre que $z^2 + z + 1$ est réel lorsque $y(2x + 1) = 0$ c'est-à-dire $y = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}\cdot$

Notons que les cinq points rencontrés dans les cas particuliers sont sur les droites $\mathscr{D}$ et Δ d'équations respectives $x = -\dfrac{1}{2}$ et $y = 0$.

En conclusion, $\mathscr{S}$ est exactement la réunion de $\mathscr{D}$ et de Δ.

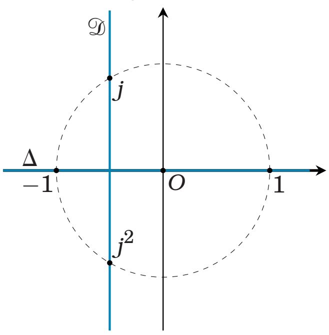
Commentaires

$z(z^2-1)=0.$

$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{z^3-1}{z-1}=z^2+z+1.$

Avec $x=\text{Re}\, z$ et $y=\text{Im}\, z$.



Ex. 19

Soit A le point d'affixe 1, B celui d'affixe -1. Déterminer l'ensemble (E) des points du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}.$$

Indications

Étant donné A, B et M, deux à deux distincts et d'affixes respectives a, b et z, on a $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \arg \dfrac{z-b}{z-a}$.

Solution

Pour tout M d'affixe z, différent de A et de B, on a :

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right).$$

On a donc $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$.

Commentaires

On applique la propriété rappelée.

Ceci équivaut à $\dfrac{z+1}{z-1}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est réel strictement positif.

Pour traduire cette condition, il faut envisager la forme algébrique de ce nombre.

Soit $z = x + iy$, avec x et y réels. Il vient alors :

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2-1+y^2-2iy}{(x-1)^2+y^2}$$

puis, avec $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, il vient :

$$\frac{z+1}{z-1}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2\left((x-1)^2+y^2\right)}\left(x^2+y^2-2\sqrt{3}y-1-i\sqrt{3}\left(x^2+y^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}y-1\right)\right)$$

La condition caractéristique se lit alors :

Partie imaginaire nulle et partie réelle strictement positive.

$$x^2+y^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}y-1=0 \text{ et } x^2+y^2-2\sqrt{3}y-1>0$$

ou encore :

$$x^2+y^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}y-1=0 \text{ et } y<0.$$

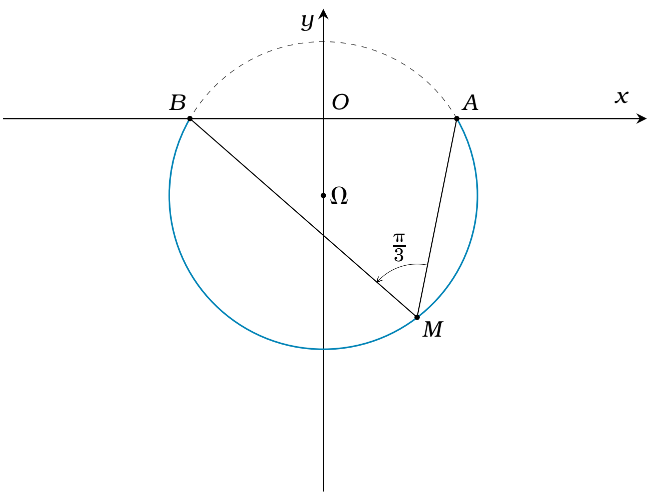
$y<0$ s'obtient par différence membre à membre des relations établies.

En écrivant

$$x^2+y^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}y-1 = x^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{4}{3},$$

on voit que l'ensemble d'équation $x^2+y^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y-1=0$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et de rayon $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ce cercle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



L'ensemble (E) est donc l'arc de cercle contenu dans le demi-plan d'équation $y<0$.

Exercices

Niveau 1

Dans les applications géométriques, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Calculs dans $\mathbb{C}$

Ex. 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0 \quad (E_1)$;

2) $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0 \quad (E_2)$.

Ex. 2

Résoudre : $z \in \mathbb{C}$,

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0 \quad (E).$$

Ex. 3

Soit θ réel, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $z = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta$.

Déterminer les module et argument de z. Déterminer θ pour que z et $z-1$ aient le même module.

Ex. 4

Soit λ et θ deux paramètres réels, $\lambda \neq 0$. Calculer le module et l'argument des racines de l'équation :

$$z \in \mathbb{C},\ z^2 - 2(\lambda\cos\theta + i\sin\theta)z + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Ex. 5 @

Déterminer les parties réelle et imaginaire des racines de l'équation :

$$z \in \mathbb{C},\ (-4-2i)z^2 + (7-i)z + 1 + 3i = 0.$$

Trigonométrie

Ex. 6

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$. En déduire une expression simple de $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.

Ex. 7 @

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \pi$. Calculer module et argument des racines de l'équation :

$$z \in \mathbb{C},\ z^2\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right) + 4iz\tan\frac{\theta}{2} - 4 = 0.$$

Ex. 8

Réduire la somme $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\cos k\frac{\pi}{3}$.

Ex. 9

En étudiant le quotient de $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)$ par $1-i$, calculer les valeurs (exactes) de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Ex. 10

Résoudre les équations suivantes.

1) $\cos 2x + \left(10-\sqrt{3}\right)\sin x + 5\sqrt{3} - 1 = 0$.

2) $3\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$.

3) $3\sin x + 5\cos x = 4\sqrt{2}$.

Transformations planes

Ex. 11

On considère l'homothétie h de centre $A(3,-1)$, de rapport $-\sqrt{2}$; la rotation r de centre $B(0,2)$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$; la translation t de vecteur $\overrightarrow{BO}$. On considère l'application composée $s = t \circ r \circ h$. Déterminer le point Ω tel que $s(\Omega) = O$.

Ex. 12

Soit A, B, C des points d'affixes a, b, c.

1) Montrer que :

- ABC est équilatéral direct si et seulement si
$$a + jb + j^2c = 0,$$
- ABC est équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

2) On suppose le triangle ABC direct.
Soit P, Q, R tels que les triangles CBQ, ACR et BAP soient équilatéraux directs.
U, V, W étant les centres de gravité de ces triangles, montrer que UVW est équilatéral direct.

Niveau 2

Ex. 13

1) Pour $\theta \in [0, \pi]$, résoudre l'équation (E) :

$$z \in \mathbb{C},\quad z^4 + 2z^2(1+\cos\theta)\cos\theta + (1+\cos\theta)^2 = 0.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=1}^{4} z_k^n$ où z_k, $1 \leqslant k \leqslant 4$ sont les racines de (E).

Ex. 14

Réduire les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+ky),$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(x+ky).$$

Ex. 15

Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\{z_k, 0\leqslant k\leqslant n-1\}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{U}_n$ et $\{A_k, 0\leqslant k\leqslant n-1\}$ l'ensemble des images dans le plan complexe des nombres z_k.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{MA_k}\right\| = n,$

2) $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = 2n.$

Ex. 16

Étant donné $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, résoudre l'équation :

$$x\in\mathbb{R},\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos kx}{\cos^k x}=0.$$

Ex. 17

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation (E) : $z^8+z^4+1=0$.

2) En déduire la factorisation de z^8+z^4+1 en produit de polynômes réels du second degré.

3) Retrouver ce résultat en remarquant que :

$$X^4+X^2+1 = X^4+2X^2+1-X^2,$$

et

$$X^4-X^2+1 = X^4+2X^2+1-3X^2.$$

Ex. 18 @

Étant donné $a\in\mathbb{R}$, déterminer les racines quatrièmes de :

$$z = 8a^2-\left(1+a^2\right)^2+4ia\left(1-a^2\right).$$

Ex. 19

Soit l'équation $z\in\mathbb{C}$, $z^3-2z^2+2(2-3i)z-20=0$.

1) Montrer qu'elle a une racine $z_0\in i\mathbb{R}$.

Calculer les deux autres racines, z_1 et z_2.

2) Déterminer le barycentre G des points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $-MA^2+MB^2+MC^2=36$.

Ex. 20

Étant donné $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, réduire la somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cos\big((k+1)\theta\big).$$

Ex. 21

Étant donné une famille $\left(z_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de n éléments de $\mathbb{C}^*$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Ex. 22

Résoudre l'équation (E) :

$$x\in\mathbb{C}, (1+x)^{2n}=(1-x)^{2n}$$

et calculer le produit des racines non nulles.

Ex. 23

Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les points A, M et M' soient alignés, A étant le point d'affixe 1 et M' celui d'affixe $1+z^2$.

Ex. 24

Sur un quadrilatère $ABCD$, on construit des triangles isocèles rectangles $A'BA$, $B'CB$, $C'DC$ et $D'AD$, de sommets A', B', C', D' tels que, comme écrits, ils soient de sens direct.

Montrer que $[A'C']$ et $[B'D']$ sont orthogonaux et ont même longueur.

Indications

Ex. 13

Équation bicarrée de discriminant simple.

Distinguer n pair et n impair.

Ex. 14

Commencer par montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+ky)$ est la partie réelle de $e^{ix}\left(1+e^{iy}\right)^n$.

Pour la seconde somme, une remarque simple permet de se ramener à la première.

Ex. 15

Utiliser l'isobarycentre G des A_k, pour exprimer les sommes $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2$ en fonction de $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{GA_k}$.

Ex. 16

$x \equiv \frac{\pi}{2} \bmod(\pi)$ est à écarter.

Distinguer les cas $x \equiv 0 \bmod(\pi)$ et $\dfrac{e^{ix}}{\cos x} \neq 1$.

Ex. 17

1) Avec le changement d'inconnue défini par $z = Z$, on est ramené aux racines quatrièmes de j et de $\bar{j}$.

2) Dans la décomposition dans $\mathbb{C}$, regrouper les facteurs relatifs à des racines conjuguées.

3) $X^4 + X^2 + 1 = \left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)$.

Ex. 19

1) Poser $z = iz_0$, avec $z_0 \in \mathbb{R}$. Factoriser par $\left(z - iz_0\right)$ pour se ramener à une équation du second degré.

Ex. 20

Ramener le calcul à celui de la somme $\sum_{k=1}^{n} k\, e^{i(1-k)\theta}$.

Pour $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 1$, calculer $\sum_{k=1}^{n} k\,\omega^{1-k}$ en utilisant la dérivée de $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$.

Ex. 21

Il s'agit de prouver que l'égalité a lieu si et seulement si les z_k ont tous même argument. La condition est évidemment suffisante.

Pour la condition nécessaire, examiner le cas $n = 2$ puis procéder par récurrence pour :

$$S_{n+1} = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}.$$

en remarquant que $S_{n+1} = S_n + z_{n+1}$.

Ex. 22

1) Se ramener à $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{2n} = 1$.

2) Utiliser $\cos \dfrac{(n-k)\pi}{2n} = \sin \dfrac{k\pi}{2n}$.

Ex. 23

Exprimer que $\arg(z-1) \equiv \arg z^2 \bmod(\pi)$ ou que $z^2 = \lambda(z-1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ex. 24

Exprimer, par exemple, que A' est l'image de A par une similitude de centre B et établir une égalité liant les affixes de A', B', C' et D'.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) En posant $u = z^2$ on se ramène à l'équation $\left(E_1'\right) : u^2 + (3-6i)u - 2(4+3i) = 0$.

$\Delta = (3-6i)^2 + 8(4+3i) = 5 - 12i = (3-2i)^2$, les solutions de $\left(E_1'\right)$ sont donc $-3+4i$ et $2i$.

De $-3+4i = 1+4i-4 = (1+2i)^2$ et $2i = (1+i)^2$, on déduit alors les quatre solutions de $\left(E_1\right)$:

$$1+2i, \quad -1-2i, \quad 1+i, \quad -1-i.$$

2) En posant $u = z^3$, on se ramène à l'équation $\left(E_2'\right) : u^2 + (2i-1)u - 1 - i = 0$.

$\Delta = (2i-1)^2 + 4(1+i) = 1$, les solutions de $\left(E_2'\right)$ sont donc $-i$ et $1-i$.

Avec $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, l'équation $z^3 = -i$ donne trois solutions, de module 1 et d'arguments $-\dfrac{\pi}{6} \bmod \dfrac{2\pi}{3}$.

Avec $1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, l'équation $z^3 = 1-i$ donne trois solutions, de module $\sqrt[6]{2}$ et d'arguments $-\dfrac{\pi}{12} \bmod \dfrac{2\pi}{3}$.

Ex. 2

L'équation (E) équivaut à $z \neq -2i$, $Z = \dfrac{z-2i}{z+2i}$, $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$.

$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ se lit $(Z+1)(Z^2+1) = 0$, et donne donc $Z = -1$ ou $Z = i$ ou $Z = -i$.

$z \neq -2i$, $Z = \dfrac{z-2i}{z+2i}$ équivaut à $z(1-Z) = 2i(1+Z)$, soit aussi à $Z \neq 1$, $z = \dfrac{2i(1+Z)}{1-Z}$.

On en déduit que les solutions de (E) sont 0, 2 et -2.

Ex. 3

On a $z = 2i\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on a $z = 0$; dans la suite on prend $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ et il vient :

$$\text{pour } 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2},\ |z| = 2\cos\theta \ \text{ et } \ \arg z = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

$$\text{et pour } \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi,\ |z| = -2\cos\theta \text{ et } \arg z = -\frac{\pi}{2} + \theta.$$

z et $z-1$ ont même module si et seulement si $z\overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1)$, soit $z + \overline{z} = 1$, ou encore $-2\sin 2\theta = 1$, ce qui, avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, donne $\theta = \dfrac{11\pi}{12}$ ou $\theta = \dfrac{7\pi}{12}$.

Ex. 4

Le discriminant réduit de l'équation est $\Delta' = (\lambda\cos\theta + i\sin\theta)^2 + 1 - \lambda^2 = \cos^2\theta - \lambda^2\sin^2\theta + 2i\lambda\sin\theta\cos\theta$.

Il vient ainsi $\Delta' = (\cos\theta + i\lambda\sin\theta)^2$.

Une racine est $z_1 = \lambda\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta + i\lambda\sin\theta$ c'est-à-dire $z_1 = (\lambda+1)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

De même, l'autre est $z_2 = (\lambda-1)(\cos\theta - i\sin\theta)$.

On a $|z_1| = |\lambda+1|$, $\arg z_1 = \theta$ si $\lambda + 1 > 0$ ou $\arg z_1 = \theta + \pi$ si $\lambda + 1 < 0$,

et $|z_2| = |\lambda-1|$ avec $\arg z_2 = -\theta$ si $\lambda - 1 > 0$ ou $\arg z_2 = -\theta + \pi$ si $\lambda - 1 < 0$.

Ex. 6

Avec $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il vient $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ d'où, avec $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

On en déduit $\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$, puis :

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8 = 2^8 e^{i\pi} = -256.$$

Ex. 8

En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin k\frac{\pi}{3}$, on a :

$$C_n + iS_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e^{ik\frac{\pi}{3}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - 1}\left(\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{3}} - 1\right) = \frac{\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{3}} - 1}{1 - 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}.$$

Comme $1 - 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = i\sqrt{3}$, il vient $C_n + iS_n = \frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3} - 1 + i\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{3}\right)$ d'où $C_n = \frac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$.

Ex. 9

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)$ et $1 - i$ sont de module $\sqrt{2}$. En factorisant $\sqrt{2}$, on obtient alors :

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

d'où le quotient $q = e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

En travaillant avec les formes algébriques, on obtient $q = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i)(1 + i) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)\right)$.

On en déduit $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$.

En notant que $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$, il vient $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Ex. 10

1) Avec $t = \sin x$ et $\cos 2x = 1 - 2t^2$, l'équation s'écrit $2t^2 - \left(10 - \sqrt{3}\right)t - 5\sqrt{3} = 0$.

On calcule $\Delta = \left(10 - \sqrt{3}\right)^2 + 40 = \left(10 + \sqrt{3}\right)^2$, donc les racines du trinôme sont 5 et $-\sqrt{3}/2$.
Les racines de l'équation posée sont donc les réels :

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif quelconque.}$$

2) Les réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne sont pas solution de l'équation. Avec $t = \tan x$, celle-ci s'écrit $3t^2 + 8t + 4 = 0$.
Les solutions de l'équation sont donc les réels tels que : $\tan x = -2$ ou $\tan x = -\frac{2}{3}$.

3) Avec des réels α et β tels que $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ et $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, l'équation s'écrit :

$$\cos(x - \alpha) = \cos\beta.$$

Ses solutions sont les réels x tels que $x \equiv \alpha \pm \beta[2\pi]$. Avec $\varepsilon = \pm 1$, ce sont les réels x tels que :

$$\cos x = \frac{10\sqrt{2} - 3\,\varepsilon\,/\sqrt{2}}{17} \text{ et } \sin x = \frac{6\sqrt{2} + 5\,\varepsilon\,/\sqrt{2}}{17}.$$

Ex. 11

L'affixe de $\overrightarrow{BO}$ est $-2i$; la translation t est définie par $z \mapsto z - 2i$.

L'homothétie h a pour représentation complexe :

$$z \mapsto 3 - i - \sqrt{2}(z - 3 + i).$$

La rotation r a pour représentation complexe :

$$z \mapsto 2i + e^{i3\pi/4}(z - 2i) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)z + \sqrt{2} + \left(\sqrt{2} + 2\right)i.$$

On en déduit que, par la composée $s = t \circ r \circ h$, le point M d'affixe z a pour image le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 - i)z - 2 + \left(4 + 3\sqrt{2}\right)i.$$

On a $s(\Omega) = O$ si et seulement si l'affixe z de Ω vérifie :

$$(1 - i)z - 2 + \left(4 + 3\sqrt{2}\right)i = 0.$$

Alors $z = \dfrac{2 - \left(4 + 3\sqrt{2}\right)i}{1 - i}$ donne enfin :

$$z = \frac{3}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2} + 2\right)i.$$

Ex. 12

1) Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$. Avec $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$, cela s'écrit $a = b - j^2(c - b)$, c'est-à-dire $a + jb + j^2c = 0$.

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si ABC ou ACB est équilatéral direct, c'est-à-dire si :

$$\left(a + jb + j^2\right)\left(a + j^2b + jc\right) = 0 \quad \text{ou encore} \quad a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

2) Les triangles PBA, BQC et ACB sont équilatéraux directs, donc :

$$\begin{cases} p + jb + j^2a = 0 \\ b + jq + j^2c = 0 \\ a + jc + j^2r = 0 \end{cases}$$

Par addition, il vient $3\left(u + jv + j^2w\right) = 0$, ce qui montre que UVW est équilatéral direct.

Niveau 2

Ex. 13

1) Les racines de (E) sont les racines carrées des solutions de l'équation $\left(E_1\right)$:

$$Z \in \mathbb{C}, \quad Z^2 + 2Z(1 + \cos\theta)\cos\theta + (1 + \cos\theta)^2 = 0.$$

Le discriminant réduit de $\left(E_1\right)$ est $\Delta' = (1+\cos\theta)^2(\cos^2\theta - 1) = -(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta$ dont $\delta = i(1+\cos\theta)\sin\theta$ est une racine carrée. Les solutions de (E_1) sont donc :

$$Z_1 = -(1 + \cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ et } Z_2 = -(1 + \cos\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$$

c'est-à-dire $\quad Z_1 = 2i^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}e^{i\theta}$ et $Z_2 = 2i^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}e^{-i\theta}$.

Remarquer que ce résultat reste valable dans les cas particuliers où $\Delta' = 0$ c'est-à-dire pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. En effet, pour $\theta = 0$, on obtient $Z_1 = Z_2 = -2$ et pour $\theta = \pi$, $Z_1 = Z_2 = 0$.

Il s'ensuit que les solutions de (E) sont :

$$z_1 = i\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad z_3 = -z_1, \quad z_2 = i\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\frac{\theta}{2}}, \quad z_4 = -z_2.$$

2) Si $n \in \mathbb{N}$ est impair : $z_3^n = -z_1^n$ et $z_4^n = -z_2^n$, donc $\sum_{k=1}^{4} z_k^n = 0$.

On étudie alors le cas où n est pair : $n = 2p$.

Soit $z_k = \sqrt{2}T_k$ où $T_1 = i\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\quad T_2 = -\overline{T_1}$, $\quad T_3 = -T_1$, $\quad T_4 = \overline{T_1}$.

$$T_1^{2p} + T_2^{2p} + T_3^{2p} + T_4^{2p} = 2\left(T_1^{2p} + \overline{T_1}^{2p}\right) = 4\,\mathrm{Re}\left(T_1^{2p}\right).$$

Avec $T_1^{2p} = (-1)^p\cos^{2p}\frac{\theta}{2}\,e^{ip\theta}$, il vient $\mathrm{Re}\left(T_1^{2p}\right) = (-1)^p\cos^{2p}\frac{\theta}{2}\cos p\theta$ d'où on déduit :

$$\sum_{k=1}^{2p} z_k^{2p} = (-1)^p 2^{p+2}\cos^{2p}\frac{\theta}{2}\cos p\theta.$$

Ex. 14

- $\cos(x+ky)$ est la partie réelle de $e^{i(x+ky)} = e^{ix}e^{iky}$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+ky) \text{ est la partie réelle de } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ix}e^{iky}.$$

En utilisant la formule du binôme, il s'ensuit que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+ky) \text{ est la partie réelle de } e^{ix}\left(1+e^{iy}\right)^n.$$

On a $1 + e^{iy} = e^{i\frac{y}{2}}\left(e^{i\frac{y}{2}} + e^{-i\frac{y}{2}}\right) = 2\cos\frac{y}{2}e^{i\frac{y}{2}}$ d'où il résulte $\left(1+e^{iy}\right)^n = 2^n\cos^n\frac{y}{2}e^{i\frac{ny}{2}}$.

La partie réelle de $e^{ix}\left(1+e^{iy}\right)^n$ est donc celle de $2^n\cos^n\frac{y}{2}e^{i\left(x+\frac{ny}{2}\right)}$ c'est-à-dire :

$$2^n\cos^n\frac{y}{2}\cos\left(x+\frac{ny}{2}\right).$$

- En notant que $(-1)^k\cos(x+ky) = \cos(x+ky+k\pi)$, il suffit de remplacer y par $y+\pi$ dans la formule précédente.

On a $\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{y}{2}$, d'où $\cos^n\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\sin^n\frac{y}{2}$.

Pour $\cos\left(x+\frac{y}{2}+n\frac{\pi}{2}\right)$, il faut distinguer n pair et n impair.

En effet, $\cos\left(\theta+2p\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p\cos\theta$ et $\cos\left(\theta+(2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{p+1}\sin\theta$.

En conclusion,

- pour n pair, $n = 2p$, on a :

$$\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k\cos(x+ky) = (-1)^p 2^{2p}\sin^{2p}\frac{y}{2}\cos(x+py),$$

- pour n impair, $n = 2p+1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}(-1)^k\cos(x+ky) = (-1)^p 2^{2p+1}\sin^{2p+1}\frac{y}{2}\sin\left(x+(2p+1)\frac{y}{2}\right).$$

Ex. 15

1) O étant l'origine du repère, z_k est l'affixe de $\overrightarrow{OA_k}$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ est l'affixe de $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OA_k}$.

Puisque $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$ et O est l'isobarycentre des A_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, il s'ensuit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} = n\overrightarrow{MO}.$$

La condition $\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} \right\| = n$ s'écrit donc $OM = 1$.

L'ensemble des points M vérifiant **1)** est le cercle Γ de centre O et de rayon 1.

2) On a $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = nMO^2 + \sum_{k=0}^{n-1} OA_k^2$.

Puisque $|z_k| = 1$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} OA_k^2 = n$ et la condition $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = 2n$ se lit $OM^2 = 1$.

L'ensemble des points M vérifiant **2)** est à nouveau le cercle Γ.

Ex. 16

La fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$, est définie sur $D_n = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\,\pi \;/ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Pour tout x dans D_n, on a $f_n(x) = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^k$.

On a $\frac{e^{ix}}{\cos x} = 1$ si et seulement si $x \equiv 0 \bmod(\pi)$, et alors $f_n(x) = n$. Les réels $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne sont donc pas solution.

Pour $\frac{e^{ix}}{\cos x} \neq 1$, c'est-à-dire $x \not\equiv 0 \bmod(\pi)$ (et aussi $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod(\pi)$), on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^k = \frac{1 - \dfrac{e^{inx}}{\cos^n x}}{1 - \dfrac{e^{ix}}{\cos x}} = \frac{\cos^n x - \cos nx - i \sin nx}{-\, i \sin x \cos^{n-1} x}.$$

Il s'ensuit $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x \cos^{n-1} x}$. Les solutions cherchées sont donc les réels :

$$x = \frac{k}{n}\pi,\ x \not\equiv 0 \bmod \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

c'est-à-dire $x = \frac{k}{n}\pi$ avec k entier relatif tel que $2k \notin n\mathbb{Z}$.

Ex. 17

1) Les solutions de (E) sont les racines quatrièmes des solutions de (E_1) : $Z^2 + Z + 1 = 0$ c'est-à-dire les racines quatrièmes de j et $j^2 = \bar{j}$.

Avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, les quatre solutions de $z^4 = j$ sont $e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)}$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, c'est-à-dire :

$$e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{2\pi}{3}},\ e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Sachant que $j^2 = \bar{j}$, les solutions de $Z^4 = j^2$ sont les conjuguées des précédentes. On a ainsi trouvé les huit solutions de (E).

2) D'après **1)**, on a :

$z^8 + z^4 + 1 =$

$$\left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z - e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z - e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z - e^{5i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z - e^{-5i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$$

donc en effectuant les produits des facteurs conjugués :

$$z^8 + z^4 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{6} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{3} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{5\pi}{6} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1\right)$$

$$= \left(z^2 - z\sqrt{3} + 1\right)\left(z^2 + z + 1\right)\left(z^2 + z\sqrt{3} + 1\right)\left(z^2 - z + 1\right).$$

3) On a $X^4 + X^2 + 1 = \left(X^2 + 1\right)^2 - X^2 = \left(X^2 + 1 + X\right)\left(X^2 + 1 - X\right)$ **(1)**.

En appliquant **(1)** pour $X = z^2$, il vient $z^8 + z^4 + 1 = \left(z^4 + z^2 + 1\right)\left(z^4 - z^2 + 1\right)$.

On a donc, toujours d'après **(1)** :

$$z^8 + z^4 + 1 = \left(z^2 + z + 1\right)\left(z^2 - z + 1\right)\left(z^4 - z^2 + 1\right)$$

et il reste à factoriser $z^4 - z^2 + 1$.

En écrivant $z^4 - z^2 + 1 = z^4 + 2z^2 + 1 - 3z^2 = \left(z^2 + 1\right)^2 - 3z^2$, il vient :

$$z^4 - z^2 + 1 = \left(z^2 + z\sqrt{3} + 1\right)\left(z^2 - z\sqrt{3} + 1\right)$$

et finalement :

$$z^8 + z^4 + 1 = \left(z^2 + z + 1\right)\left(z^2 - z + 1\right)\left(z^2 + z\sqrt{3} + 1\right)\left(z^2 - z\sqrt{3} + 1\right).$$

Ex. 19

1) $z = ia$, $a \in \mathbb{R}$, est solution si et seulement si $2a^2 + 6a - 20 + ia\left(4 - a^2\right) = 0$; c'est-à-dire :

$$2a^2 + 6a - 20 = 0 \text{ et } a(a-2)(a+2) = 0.$$

Alors $a = 2$ convient, d'où la solution : $z_0 = 2i$.

On factorise $z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20$ par $(z - 2i)$ et on obtient :

$$z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = (z - 2i)\left(z^2 - 2(1-i)z - 10i\right).$$

L'équation $z^2 - 2(1-i)z - 10i = 0$ a pour discriminant réduit :

$$\delta' = (1-i)^2 + 10i = 8i = \left(2(1+i)\right)^2.$$

Les racines de cette équation sont alors $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = -1 - 3i$.

2) L'affixe de G est $\frac{1}{3}\left(z_0 + z_1 + z_2\right)$, c'est donc $\frac{2}{3}$.

$-|z - 2i|^2 + |z - 3 - i|^2 + |z + 1 + 3i|^2 = 36$ se développe en $z\bar{z} - 2\left(z + \bar{z}\right) - 4i\left(z - \bar{z}\right) = 20$ c'est-à-dire :

$$\text{avec } x = \operatorname{Re} z \text{ et } y = \operatorname{Im} z, \quad (x-2)^2 + (y+4)^2 = 40.$$

C'est une équation cartésienne du cercle de centre $A = (2, -4)$ et de rayon $2\sqrt{10}$.

Ex. 20

$C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cos(k+1)\theta$ est la partie réelle de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{i(k+1)\theta}$.

En posant $\omega = e^{i\theta}$ et $n - k = \ell$, il vient $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\omega^{k+1} = \sum_{\ell=1}^{n}\ell\omega^{n-\ell+1}$ soit aussi:

$$S_n = \omega^n \sum_{k=1}^{n} k\omega^{1-k}$$

(rappelons que k et ℓ sont des variables muettes).

- Pour $\omega = 1$, c'est-à-dire $\theta \equiv 0 \bmod (2\pi)$, on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $C_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Pour $\omega \neq 1$, on a $S_n = \omega^n P\left(\frac{1}{\omega}\right)$ où on a posé $P(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

On remarque alors que la fonction P est la dérivée de Q définie par $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ donc :

$$P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Il en résulte $S_n = \dfrac{n\,\omega^{-1} - (n+1) + \omega^n}{\left(\omega^{-1} - 1\right)^2}$.

Avec $\omega = e^{i\theta}$, il vient $\left(\omega^{-1} - 1\right)^2 = e^{-i\theta}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = e^{-i\theta}\left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = -4e^{-i\theta}\sin^2\frac{\theta}{2}$, puis :

$$S_n = \frac{n\left(1 - e^{-i\theta}\right) + 1 - e^{ni\theta}}{4e^{-i\theta}\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{n\left(e^{i\theta} - 1\right) + e^{i\theta} - e^{(n+1)i\theta}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

D'où finalement $C_n = \dfrac{n(\cos\theta - 1) + \cos\theta - \cos(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$ soit aussi $C_n = -\dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos\theta - \cos(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

Ex. 21

Nous allons montrer que l'on a $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ si et seulement si les z_k ont même argument.

1) Notons que, si les z_k ont même argument θ, on a $z_k = |z_k|\, e^{i\theta}$, d'où :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|e^{i\theta}\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

2) - Soit $n = 2$.

La condition $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ équivaut à $(z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\;|z_2|$, c'est-à-dire $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2\,|z_1|\;|z_2|$ ou encore $2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z_1} \times z_2\right) = 2\left|\overline{z_1}z_2\right|$ c'est-à-dire $\overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}_+$.

Enfin $\overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}_+$ équivaut à $\arg z_1 = \arg z_2$.

- Hypothèse de récurrence

Si $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$, alors les nombres u_k ont même argument.

Supposons $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$ et posons $Z = \sum_{k=1}^{n} z_k$. On a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|,$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

On en déduit alors :

$$\textbf{(1)}\quad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

$$\textbf{(2)}\quad |Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}|.$$

Notons que, les z_k étant non nuls, il vient $|Z| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \neq 0$, donc $Z \neq 0$.

(1) et l'hypothèse de récurrence donne : pour $1 \leqslant k \leqslant n$, les z_k ont même argument θ.

De **(2)**, on déduit que Z et z_{n+1} ont même argument.

Or $Z = \sum_{k=1}^{n} z_k$ admet θ pour argument, donc les z_k, $1 \leqslant k \leqslant n+1$, ont tous même argument.

- La propriété annoncée est donc héréditaire, et elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Ex. 22

1) 1 n'est pas solution de (E), l'équation équivaut donc à $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{2n} = 1$ c'est-à-dire $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{1+x}{1-x} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$, $-n+1 \leqslant k \leqslant n$ ou encore à $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $x\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1\right) = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1$, $-n+1 \leqslant k \leqslant n$.

Il n'y a pas de solution pour $k = n$; les solutions de (E) sont $x_k = \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1}$, $-n+1 \leqslant k \leqslant n-1$, soit encore :

$$x_k = \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right)} = i\tan\frac{k\pi}{2n}, \quad -n+1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

2) Le produit des racines non nulles de (E) est :

$$P_n = \prod_{1 \leqslant |k| \leqslant n-1} i\tan\frac{k\pi}{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \tan^2\frac{k\pi}{2n}.$$

Avec $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos^2\frac{k\pi}{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \cos^2\frac{(n-k)\pi}{2n}$ et $\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2n} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{k\pi}{2n}\right) = \sin\dfrac{k\pi}{2n}$,

il vient en conclusion, $P_n = 1$.

Ex. 23

$\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires se traduit par z^2 multiple réel de $z-1$.

A, M et M' sont colinéaires si et seulement si il existe λ réel tel que $z^2 = \lambda(z-1)$ **(1)**. De **(1)**, on déduit $\overline{z^2} = \lambda\left(\overline{z}-1\right)$ d'où $\overline{z^2}(z-1) = z^2\left(\overline{z}-1\right)$.

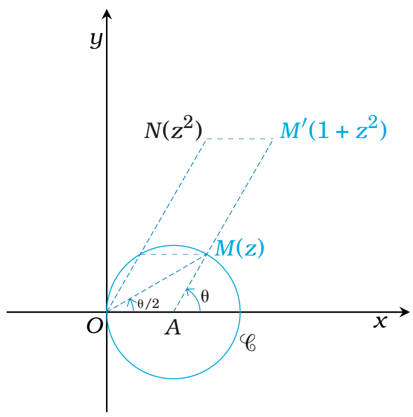
On a donc $\left(z-\overline{z}\right)\left(z\overline{z} - z - \overline{z}\right) = 0$ ce qui a lieu lorsque :

- $z = \overline{z}$ (M appartient à l'axe des réels) ou
- $|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) = 0$ c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (avec $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) (M appartient au cercle $\mathscr{C}$ passant par O et de centre $A = (1, O)$).

Réciproquement, si $\overline{z^2}(z-1) = z^2\left(\overline{z}-1\right)$ le nombre $z^2\left(\overline{z-1}\right)$ est réel, donc z^2 est multiple réel de $(z-1)$. L'ensemble cherché est donc la réunion de l'axe réel et du cercle $\mathscr{C}$.

Remarque : pour $M(z)$ sur $\mathscr{C}$, on a : $z = 1 + e^{i\theta}$ d'où :

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } z^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2}(z-1).$$



Ex. 24

A' se déduit de A par la similitude de centre B, d'angle $\pi/4$ et de rapport $1/\sqrt{2}$. Soit $a, b, c, d, a', b', c', d'$ les affixes respectives de A, B, C, D, A', B', C', D' dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct.

On a $a' - b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}(a-b)$

soit $a' - b = \dfrac{1}{2}(1+i)(a-b)$,

de même

$b' - c = \dfrac{1}{2}(1+i)(b-c)$,

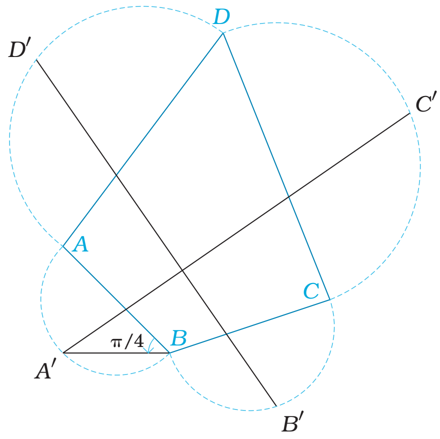
$c' - d = \dfrac{1}{2}(1+i)(c-d)$,

$d' - a = \dfrac{1}{2}(1+i)(d-a)$.

On en déduit que :

$a' - c' = \dfrac{1}{2}\left[(b-d)(1-i) + (a-c)(1+i)\right]$,

$b' - d' = \dfrac{1}{2}\left[(b-d)(1+i) + (c-a)(1-i)\right]$.



On remarque alors que $a' - c' = -i(b' - d')$. L'égalité des modules donne $A'C' = B'D'$.

L'égalité des arguments donne $(\widehat{\overrightarrow{D'B'}, \overrightarrow{C'A'}}) = -\dfrac{\pi}{2} \bmod (2\pi)$ et donc l'orthogonalité de $[A'C']$ et $[B'D']$.