

Table des matières

1	Théorie des ensembles	1
	Sommaire	3
A	Axiomes de la théorie des ensembles	5
1.1	Les axiomes de Zermelo-Fraenkel	5
1.2	Produit de deux ensembles, applications, axiome de choix	12
1.3	Famille d'ensembles : réunion, intersection, produit	16
B	Ensembles ordonnés	21
1.4	Relation d'ordre	21
1.5	Le lemme de Zorn	24
1.6	Applications aux espaces vectoriels	29
C	Ensembles infinis	32
1.7	L'axiome de l'infini	32
1.8	Ensembles équipotents	33
1.9	Ensembles infinis	36
D	Corrigés des exercices	40
1.10	Exercices du chapitre 1.A	40
1.11	Exercices du chapitre 1.B	44
1.12	Exercices du chapitre 1.C	45
2	Topologie	49
	Sommaire	51
A	Nombres réels	55
2.1	Construction des nombres réels	55
2.2	Structure de corps totalement ordonné	58

2.3	Suites convergentes de \mathbb{R}	62
2.4	Le théorème de Bolzano-Weierstrass	64
2.5	Ouverts, fermés et compacts de \mathbb{R}	66
2.6	Développement par rapport à une base	69
B	Espaces topologiques	73
2.7	Topologie définie par une distance	73
2.8	Le filtre des voisinages	76
2.9	Parties ouvertes, parties fermées	80
2.10	Intérieur, adhérence	84
2.11	Limites	89
2.12	Espaces à base dénombrable de voisinages	94
2.13	Applications continues	96
2.14	Fonctions semi-continues	101
2.15	Comparaison de topologies	104
2.16	Point adhérent à une base de filtre	106
2.17	Espaces séparés	108
2.18	Espaces métriques complets	112
2.19	Topologies initiales	116
2.20	Topologie induite	119
2.21	Topologie produit	126
2.22	Produit dénombrable d'espaces métriques	132
2.23	Topologie de la convergence simple	137
2.24	Topologies finales, topologie quotient	138
2.25	Prolongement des applications uniformément continues	140
2.26	Le théorème du point fixe	142
2.27	Topologie de la convergence uniforme	144
2.28	Le théorème de Baire	148
2.29	Espaces analytiques	152
C	Espaces compacts	157
2.30	Définitions équivalentes de la compacité	157
2.31	Propriétés des espaces compacts	160
2.32	Le théorème de Tychonoff	165
2.33	Espaces métriques compacts	168
2.34	Le théorème d'Ascoli	175
2.35	Espaces localement compacts	178
2.36	Le théorème d'Urysohn	183
2.37	Limite supérieure et inférieure	189
2.38	Les espaces projectifs	193

D	Espaces connexes	197
2.39	Propriétés fondamentales	197
2.40	Parties connexes de la droite réelle	200
2.41	Composante connexe	203
2.42	Espaces connexes compacts	206
E	Corrigés des exercices	211
2.43	Exercices du chapitre 2.A	211
2.44	Exercices du chapitre 2.B	213
2.45	Exercices du chapitre 2.C	248
2.46	Exercices du chapitre 2.D	274
2	Espaces localement convexes	289
	Sommaire	291
A	Espace localement convexe	295
3.1	Espace vectoriel topologique	295
3.2	Topologie définie par des semi-normes	297
3.3	Application linéaire et continue	303
3.4	Espace localement convexe métrisable	308
3.5	Sous-espace, produit	312
3.6	Quotient	317
3.7	Partie bornée, partie compacte	324
3.8	Partie convexe	329
3.9	Topologie de la convergence uniforme	332
B	Espaces d'applications linéaires et continues	341
3.10	Norme d'une application linéaire continue	341
3.11	Les théorèmes de Banach	345
3.12	Le théorème de Banach-Steinhaus	349
C	Dualité dans les espaces localement convexes	357
3.13	Le théorème de Hahn-Banach (forme analytique)	357
3.14	Le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique)	362
3.15	Topologies faibles	370
3.16	Dualité des espaces de Banach	374
3.17	Métrisabilité, compacité séquentielle	382
3.18	Orthogonalité, transposition	387

D	Famille sommable	396
	3.19 Série convergente et absolument convergente	396
	3.20 Famille sommable et absolument sommable	402
	3.21 Famille de nombres réels	408
	3.22 Sommation par paquets	410
	3.23 Produit infini	413
	3.24 Espaces l^p	417
E	Le théorème de Stone-Weierstrass	432
	3.25 Le théorème de Stone-Weierstrass	432
	3.26 Les théorèmes d'approximation de Weierstrass	435
F	Espaces de Hilbert	437
	3.27 Espaces préhilbertiens	437
	3.28 Le théorème de projection	442
	3.29 Représentation du dual	446
	3.30 Somme hilbertienne	450
	3.31 Base hilbertienne	452
G	Opérateurs compacts	457
	3.32 Définitions et propriétés élémentaires	457
	3.33 Analyse spectrale des opérateurs compacts	462
	3.34 Opérateurs compacts normaux et hermitiens	467
	3.35 Opérateurs de Hilbert-Schmidt	476
H	Corrigés des exercices	481
	3.36 Exercices du chapitre 3.A	481
	3.37 Exercices du chapitre 3.B	497
	3.38 Exercices du chapitre 3.C	506
	3.39 Exercices du chapitre 3.D	521
	3.40 Exercices du chapitre 3.E	534
	3.41 Exercices du chapitre 3.F	535
	3.42 Exercices du chapitre 3.G	543
	Bibliographie	557
	Notations	559