



**OPTIMUM**

# Toute la probabilité

## Maths approfondies



- Cours et astuces
- Exercices et problèmes
- Sujet d'entraînement

Hédi Joulak



Chapitre **1**

# Probabilités

# L'essentiel du cours

## Notion d'évènement

### *Expérience aléatoire*

Quand on ne peut prévoir le résultat d'une expérience, on dit que celle-ci est aléatoire.

On appelle alors univers, l'ensemble des résultats possibles ou observables de cette expérience ; on le note en général  $\Omega$ .

#### ***Le conseil du prof :***

*La bonne lecture de l'expérience aléatoire est primordiale.*

*Il faut savoir quel type d'éléments on cherche : un entier, un couple d'entiers ou autre chose ? à quoi correspond-il ? quelles sont ses valeurs possibles ?*

### *Évènement*

- ★ Un évènement est une partie de l'univers  $\Omega$ .
- ★ Un évènement sera dit élémentaire s'il ne contient qu'un seul résultat.

*L'ensemble des évènements est noté  $\mathcal{A}$ .*

*Cet ensemble est stable par passage à l'union, à l'intersection dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut lister un à un) et au complémentaire.*

### *Réalisation d'évènement*

- ★ On dira que l'évènement  $A$  est réalisé si le résultat de l'expérience est dans  $A$ .
- ★ Si  $A$  et  $B$  sont des évènements, alors  $A \subset B$  signifie que la réalisation de  $A$  implique celle de  $B$ .
- ★ L'égalité  $A = B$  signifie que l'on a  $A \subset B$  et  $B \subset A$ .

**Le conseil du prof :**

Concrètement, pour montrer que  $A \subset B$ , on partira de l'évènement  $A$  en supposant qu'il est réalisé. On s'écrit alors la conclusion à atteindre : la réalisation de  $B$  ; et, entre l'hypothèse et la conclusion, on agit par différentes implications et déductions.

**Opérations sur les évènements**

On note  $A$  et  $B$  des évènements de  $\Omega$ .

- ★ L'évènement  $\overline{A}$ , appelé l'évènement contraire de  $A$ , est réalisé si et seulement si  $A$  ne l'est pas.
- ★ L'évènement  $A \cup B$ , appelé réunion (ou union) de  $A$  et  $B$ , est réalisé si et seulement si  $A$  l'est ou si  $B$  l'est.
- ★ L'évènement  $A \cap B$ , appelé intersection de  $A$  et  $B$ , est réalisé si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont.

**Le conseil du prof :**

La notion de contraposée nous permet d'affirmer que :

$$A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$$

**Évènements incompatibles**

Si l'on a deux évènements  $A$  et  $B$  vérifiant  $A \cap B = \emptyset$ , alors on dira qu'ils sont incompatibles (ou disjoints).

**Système complet d'évènements**

Une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'évènements de  $\Omega$  (où  $I \subset \mathbb{N}$ ) sera appelée système complet d'évènements si :

- ★  $\forall i, j \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ★  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

**Le conseil du prof :**

Sauf demande explicite de l'énoncé, vous n'aurez pas à justifier que telle famille est un système complet d'évènements.

*Les lois de De Morgan*

Pour des évènements  $A$  et  $B$ , on a :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

**Coefficients binomiaux**

*Factorielle*

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments.

On appelle permutation de  $E$ , tout choix de  $n$  éléments tous distincts dans  $E$ .

Il y en a factorielle  $n$  et on note  $n!$  :

$$n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

| La factorielle  $n$  représente le nombre de bijections d'ensemble à  $n$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

*Coefficient binomial*

Le nombre de parties à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments (où  $0 \leq p \leq n$ ) est  $\binom{n}{p}$  (on le lit  $p$  parmi  $n$ ) et il est défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

| Le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  représente le nombre de chemins d'un arbre réalisant  $p$  succès pour  $n$  répétitions.

**Les relations importantes**

★ La symétrie :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

★ La petite formule :  $\forall n, p \geq 1$ ,

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

★ Le triangle de Pascal : pour tout  $n \geq 1$  et  $p$  tel que  $1 \leq p \leq n$ , on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

**Les conseils du prof :**

★ La petite formule sera très utile dans le calcul d'espérance ou de variance où l'on peut retrouver des termes de la forme  $k \binom{n}{k}$ .

Parfois, on pourra appliquer 2 fois cette formule et avoir :

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$$

★ La différence de coefficients binomiaux peut être simplifiée par le triangle de Pascal :  $\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1}$ .

**Probabilité**

**Définition**

On appelle probabilité toute application  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

★  $P(\Omega) = 1$

★  $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

| Si on a  $P(A) = 1$  alors on dira que l'évènement  $A$  est quasi-certain.

| Si on a  $P(A) = 0$  alors on dira que l'évènement  $A$  est quasi-impossible.

**Propriétés**

★ Pour tout évènement  $A$ , on a :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

★ Pour toute famille finie  $(A_i)_{i=1}^n$  d'évènements deux à deux incompatibles ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ ), on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

★ Pour tout évènement  $A$ , on a :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

★ Croissance :

$$A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$$

**Formule du crible de Poincaré**

★ Pour 2 évènements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

★ Pour 3 évènements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

**Équiprobabilité**

On dira que l'on a équiprobabilité lors d'une expérience aléatoire si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour réaliser } A}{\text{nombre de cas favorables au total}}$$

## Probabilité conditionnelle

### *Définition*

Soit un évènement  $A$  de probabilité non nulle.

L'application  $P_A : B \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  est une probabilité que l'on appelle la probabilité conditionnelle relative à  $A$ .

Le réel  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ , que l'on notera  $P_A(B)$ , est appelé la probabilité de  $B$  sachant  $A$ .

### *Le conseil du prof :*

Pour appliquer cette formule, on n'oubliera pas de relever que  $P(A) \neq 0$ .

### *Les propriétés*

★  $P_A(\emptyset) = 0$ ,  $P_A(\Omega) = 1$  et  $\forall B$  vérifiant  $A \subset B$ ,  $P_A(B) = 1$ .

★  $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$ .

## Des formules importantes

### *Formule des probabilités composées*

★ Si  $P(A) \neq 0$  alors on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

★ Soit  $A_1, \dots, A_n$  des évènements tels que  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ .

On a la formule :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

### *Le conseil du prof :*

On peut éviter l'utilisation de cette formule par une traduction détaillée et chronologique de l'évènement  $A_1 \cap \dots \cap A_n$ .

On précisera l'évolution du modèle au fur et à mesure de l'expérience.



**Formule des probabilités totales**

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'évènements (où  $I \subset \mathbb{N}$ ).  
Alors, pour tout évènement  $B$ , on a :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout  $i \in I$ ,  $P(A_i) \neq 0$ , on a :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

**Les conseils du prof :**

★ Si le système complet est infini, alors la somme est une série ; on justifiera sa convergence grâce au fait qu'elle est égale à une probabilité.

★ Si le système complet n'est pas donné explicitement, il peut être suggéré soit à travers la formule à prouver (si l'on doit montrer que  $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1)$  on s'appuiera sur le système complet  $((X_n = 0), (X_n = 1))$ ) soit à travers des calculs de probabilités conditionnelles (on doit calculer  $P(Y = 1)$  et on a déterminé  $P_{(X=k)}(Y = 1)$  pour  $0 \leq k \leq n$  donc on prend comme système complet  $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$ ).

★ Il faut être vigilant sur le fait d'avoir un vrai système complet d'évènements c'est-à-dire que l'on recouvre bien tous les cas possibles.

**Formule de Bayes**

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'évènements (où  $I \subset \mathbb{N}$ ). Alors, pour tout évènement  $B$  (tel que  $P(B) \neq 0$ ) et  $i \in I$ , on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k \in I} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$