

Clément Santamaria

Toute la
PHYSIQUE
dans un
VERRE D'EAU

ellipses

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

1

COMMENT SE PROPAGE UN RAYON LUMINEUX DANS UN VERRE D'EAU SALÉE ?

L'étude de la propagation de la lumière peut se faire, dans

un premier temps, sans se préoccuper de sa nature profonde. En effet, le trajet d'un rayon dépend simplement du milieu considéré qui est caractérisé par une donnée unique : son indice n . Si ce dernier est constant, le milieu est homogène, et la lumière se propage en ligne droite. Dans le cas où la concentration en sel n'est pas constante, la propagation ne sera pas rectiligne du fait de la variation de l'indice du milieu n . L'origine et les propriétés de n sont liées à l'interaction entre l'onde électromagnétique que constitue la lumière, et la matière. Nous aborderons dans les chapitres suivants les aspects électromagnétiques, ainsi que l'approche quantique, indispensables à une compréhension plus précise des phénomènes mis en jeu.

Déterminons tout d'abord l'équation décrivant la propagation d'un rayon lumineux dans le cas le plus général.

Le principe de Fermat énonce que la trajectoire suivie par la lumière, entre deux points A et B , est telle que l'intégrale curviligne L_{AB} doit être stationnaire. L_{AB} est le chemin optique, et par définition, n étant l'indice du milieu dans lequel se fait la propagation :

$$L_{AB} = \int_{AB} n ds$$

La condition de stationnarité signifie que si l'on considère un déplacement $\delta\mathbf{M}$ autour d'un point M , la quantité $L' - L$ est infiniment petite par rapport à $\|\delta\mathbf{M}\|$, (Fig 1.1.). En termes plus physiques, historiquement, Fermat énonça son principe en disant que L_{AB} devait être minimale.

Si L_{AB} est stationnaire, L_{BA} l'est aussi. En conséquence, le trajet de la lumière ne dépend pas du sens de parcours. Il s'agit de la loi dite du retour inverse de la lumière.

La propagation peut bien sûr s'effectuer à travers une succession de milieux ayant des indices différents. Chaque surface de séparation est appelée dioptre, et afin de décrire la propagation de la lumière, il est nécessaire de connaître l'angle sous lequel est atteint ce dioptre par le rayon lumineux. Ce sont les lois de Snell-Descartes (Fig 1.2.) qui vont nous permettre la description précise du trajet emprunté par la lumière.

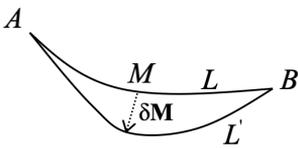


Fig 1.1. Stationnarité de L_{AB}

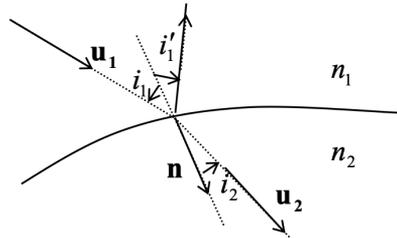


Fig 1.2. Lois de Snell-Descartes

On peut montrer que la condition de stationnarité du chemin optique L_{AB} , conduit à la relation :

$$n_2 \mathbf{u}_2 - n_1 \mathbf{u}_1 = C \mathbf{n}$$

n_1 et n_2 étant les indices des milieux considérés, C une constante, et \mathbf{n} la normale au dioptre.

Cette expression contient en fait, les lois de Snell-Descartes :

- 1^{re} loi de la réfraction : le rayon réfracté est dans le plan d'incidence défini par $(\mathbf{u}_1, \mathbf{n})$
- 2^e loi de la réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$
- 1^{re} loi de la réflexion : le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence
- 2^e loi de la réflexion : $i_1 = i_1'$.

Il est possible d'exprimer de façon vectorielle les lois de Descartes. On obtient alors la loi fondamentale de l'optique géométrique, qui est l'équivalent du principe fondamental de la dynamique en mécanique :

$$\frac{d(nu)}{ds} = \mathbf{grad}n$$

où s est l'abscisse curviligne permettant la description du rayon, et n caractérise un milieu éventuellement inhomogène.

Si le milieu est homogène, n est constant et donc $\mathbf{grad}n = 0$. La propagation est alors rectiligne.

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée. Le chapitre 6 sur les phénomènes de transport nous montrera que la concentration en sel est plus importante au fond du récipient, et donc que le gradient de concentration est dirigé vers le bas. Or, nous allons voir que la concavité d'un rayon est toujours dirigée dans le sens du vecteur $\mathbf{grad}n$. Par conséquent, la déviation du rayon se fera également vers le bas.

Supposons donc que la concentration non constante en sel du milieu traversé, conduise à un gradient d'indice, $\mathbf{grad}n$.

On considère la trajectoire d'un rayon lumineux (Fig 1.3.) auquel on associe en chaque point, la base intrinsèque $(\mathbf{u}_T, \mathbf{u}_N)$. R étant le rayon de courbure,

on a $\frac{du_T}{ds} = \frac{\mathbf{u}_N}{R}$.

On peut écrire $\frac{d(nu_T)}{ds} = \frac{dn}{ds} \mathbf{u}_T + n \frac{du_T}{ds} = \mathbf{grad}n$.

Soit $\frac{dn}{ds} \mathbf{u}_T + \frac{n}{R} \mathbf{u}_N = \mathbf{grad}n$.

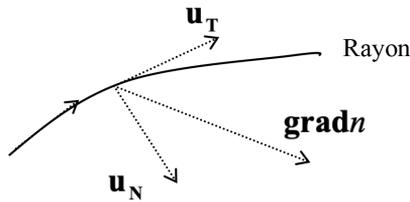


Fig 1.3. Rayon dans la base intrinsèque

En projetant sur \mathbf{u}_N on obtient $\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{grad}n$, qui exprime le fait que la concavité est toujours dirigée dans le sens du vecteur $\mathbf{grad}n$ (Fig 1.4.).

Notons D la déviation du rayon incident.

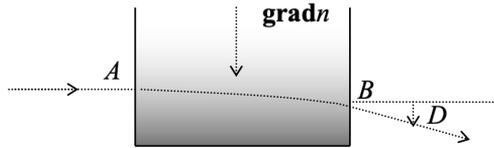


Fig 1.4. Gradient d'indice dû au sel

L'expression des lois de Snell-Descartes montre que la quantité $nsini$ se conserve, i étant l'angle avec la normale à la surface de séparation.

Si l'incidence est normale, la déviation recherchée D est donnée par l'expression :

$$D = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_A}{n_B}\right)$$

n_A et n_B sont les valeurs de l'indice du milieu en A et B. On notera que la déviation est liée uniquement au gradient d'indice, mais pas à la longueur traversée. Typiquement, on observe $D \approx 15^\circ$, pour une eau saturée en sel.

On retrouve cet effet de déviation dans une fibre optique. Dans ce cas, on souhaite que la lumière se propage par réflexion sur la face intérieure. Le cœur de la fibre a un indice n_1 , alors que la gaine extérieure a un indice n_2 . Lorsque la fibre optique est dite à gradient d'indice, ce dernier peut varier en fonction de la distance r au centre, suivant une loi de la forme :

$$n = n_1 \left[1 - 2 \frac{n_1 - n_2}{n_1} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r_1 \text{ étant le rayon du cœur de la fibre.}$$

La trajectoire de la lumière dans la fibre est alors sinusoïdale.

2

POURQUOI, LORSQUE L'ON REGARDE UN VERRE DE CÔTÉ, L'EAU SEMBLE REMPLIR LE VERRE COMME S'IL N'Y AVAIT PAS DE PAROI ?

Il s'agit en fait d'étudier les conditions de réfraction d'un rayon à la traversée d'un dioptre. Le verre constitue une surface de séparation entre l'air d'une part, et l'eau

d'autre part. Nous pouvons à nouveau introduire la 2^e loi de Descartes. La relation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ conduit, si $n_1 < n_2$, à un angle de réfraction

limite et maximum i_{lim} , tel que, $\sin i_{\text{lim}} = \frac{n_1}{n_2}$, lorsque l'angle d'incidence i_1 est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Si $n_1 > n_2$, lorsque $i_1 \leq i_{\text{lim}}$, il y a réfraction, mais si $i_1 > i_{\text{lim}}$, alors la réflexion est totale.

Pour que l'eau semble remplir le verre, les rayons issus de points M , intérieurs au verre, doivent atteindre un observateur tangentiellement au cercle extérieur, ou subir une réflexion totale en T . On a donc la situation (Fig 1.5) :

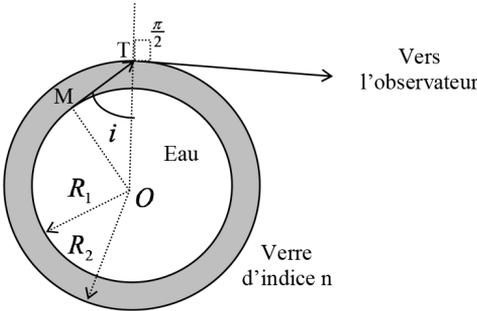


Fig 1.5. Verre vu de dessus

L'angle d'incidence i doit être supérieur à l'angle i_{lim} défini précédemment, afin d'obtenir une réflexion totale, lorsque l'on passe du verre d'indice n , à l'air.

On a donc $\sin i \geq \sin i_{\text{lim}} = \frac{1}{n}$, soit $\frac{R_1}{R_2} \geq \frac{1}{n}$ ou $\frac{R_2}{R_1} \leq n$.

Cette dernière condition est en général remplie.

3

QUEL EST LE TRAJET D'UN RAYON LUMINEUX PÉNÉTRANT DANS UN VERRE D'EAU ?

On considère tout d'abord le cas où le rayon est contenu dans un plan horizontal. On néglige les effets de translation dus à l'épaisseur du verre. On a donc la situation (Fig 1.6.) :

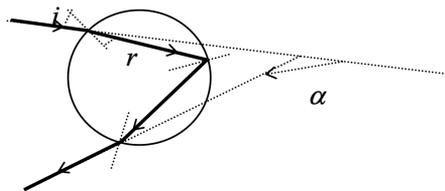


Fig 1.6. Verre vu de dessus

L'application des lois de Descartes conduit à une déviation :

$$\alpha = \pi + 2i - 4r$$

Il existe un minimum de déviation α_{\min} , tel que $\frac{d\alpha}{di} = 2\left(1 - 2\frac{dr}{di}\right) = 0$.

En différenciant la relation $\sin i = n \sin r$, on obtient $\sin^2 i_{\min} = \frac{(4 - n^2)}{3}$, qui pour $n_{\text{eau}} = 1,33$ conduit à $\alpha \approx 180^\circ - 42,1^\circ$.

Mais on peut envisager le cas où (Fig 1.7.), pour un angle d'incidence plus élevé :

$$\alpha = 2(i - 3r) + \pi$$

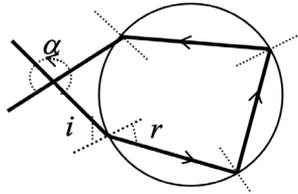


Fig 1.7. Verre vu de dessus

On trouve $\sin^2 i_{\min} = \frac{(9 - n^2)}{8}$, qui pour $n_{\text{eau}} = 1,33$, conduit à :
 $\alpha \approx 180^\circ + 51^\circ$.

Ces deux cas sont à la base de la compréhension du phénomène de l'arc-en-ciel. Si on considère que les cercles précédents sont en fait la vue en coupe d'une goutte d'eau, on aura, du point de vue d'un observateur ayant le soleil dans le dos, et en tenant compte de l'effet de la symétrie sphérique du problème, l'apparition d'un arc-en-ciel.

L'apparition des couleurs est due au fait que l'indice de l'eau varie avec la longueur d'onde de la radiation incidente suivant la relation de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

A et B étant des constantes positives, et λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

La déviation étant liée à n , elle est donc reliée à λ_0 dont les valeurs couvrent tout le spectre de la lumière visible.

Nous avons vu qu'il existait deux possibilités de propagation d'un rayon dans le cas d'une géométrie sphérique. Il y a donc deux arcs-en-ciel possibles. On montre (Fig 1.8.) que le violet est à l'intérieur de l'arc-en-ciel dans le premier cas ($42,1^\circ$) et à l'extérieur dans le deuxième cas (51°) qui est d'ailleurs moins lumineux.

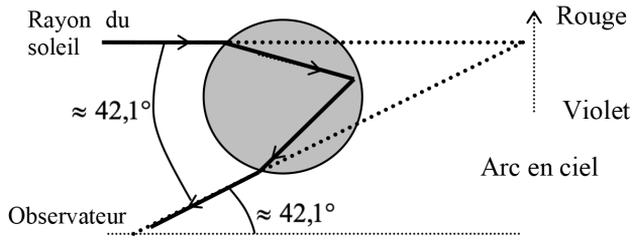


Fig 1.8. Arc-en-ciel primaire

Lorsque le rayon parvient sur le verre dans un plan d'incidence quelconque, le volume traversé a une forme plus ou moins prismatique.

On idéalise le phénomène, en considérant le cas d'école constitué d'un prisme (Fig 1.9.) d'angle au sommet A :

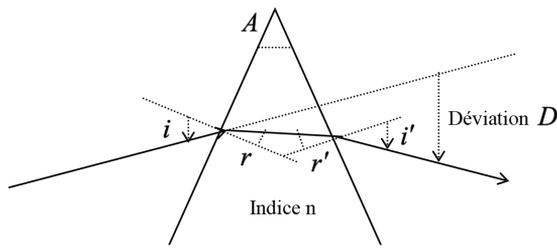


Fig 1.9. Déviation par un prisme

L'application des lois de Descartes conduit aux relations :

$$\sin i = n \sin r \text{ et } \sin i' = n \sin r'$$

On a également les relations d'origine géométrique :

$$A = r + r' \text{ et } D = i + i' - A$$

Ces relations montrent que la déviation D est liée à l'indice n , qui dépend lui-même de la longueur d'onde. On observe le même effet de dispersion que précédemment.

Il existe un minimum de déviation D_{\min} , obtenu lorsque $\frac{dD}{di} = 0$.

Le calcul conduit à la relation : $\sin\left(\frac{A + D_{\min}}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$.

Compte tenu de la variation de l'indice $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ (avec $A > 0$ et $B < 0$), on montre que le rouge est moins dévié que le violet.

POURQUOI UN OBJET PLACÉ DANS UN VERRE D'EAU, ET VU DE DESSUS, SEMBLE-T-IL PLUS PROCHE DE L'OBSERVATEUR ?

Nous sommes ramenés à l'étude du dioptre que nous avons déjà introduit précédemment.

En effet, l'eau ayant un indice n différent de celui de l'air, le système considéré est constitué de deux milieux aux caractéristiques différentes, séparés par une surface. Nous avons ici l'occasion d'introduire la notion de dioptre sphérique qui, par définition, constitue une surface, caractérisée par un rayon de courbure, séparant deux milieux d'indices différents.

Une hypothèse fondamentale en optique consiste à considérer des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique (axe de symétrie de révolution), et proches de celui-ci. L'optique est alors dite paraxiale. Il s'agit des conditions de Gauss dans lesquelles on se place très fréquemment.

L'application des lois de Descartes, dans l'approximation de Gauss, conduit à la relation dite de conjugaison du dioptre sphérique (Fig 1.10.) :

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

avec $p_1 = \overline{SA_1}$ et $p_2 = \overline{SA_2}$, des grandeurs algébriques définies par un sens positif choisi dans le sens de la propagation de la lumière, c'est-à-dire du milieu d'indice n_1 vers celui d'indice n_2 . S est le sommet du dioptre et $R = SC$ son rayon de courbure.

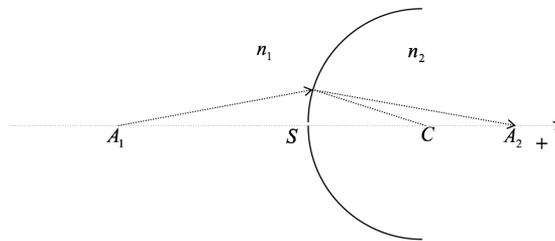


Fig 1.10. Dioptre sphérique

Deux cas particuliers peuvent être envisagés.

■ On considère R infini.

On obtient alors un dioptre plan et $\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2}$. On peut alors répondre à la

question posée, en considérant la figure 1.11. dans le cadre de l'approximation de Gauss :