OPTIMUM

1re et 2e année

Toute la probabilité

Maths appliquées

ECG

- Cours et méthode
- Astuces et pièges à connaître
- Exercices et problèmes d'entraînement
- QCM d'évaluation et extraits d'annales

Hédi **Joulak**

ellipses

L'essentiel du cours

Notion d'évènement

Expérience aléatoire

Quand on ne peut prévoir le résultat d'une expérience, on dit que celle-ci est aléatoire.
On appelle alors univers, l'ensemble des résultats possibles ou observables de cette expérience ; on le note en général Ω.

Le conseil du prof :
La bonne lecture de l'expérience aléatoire est primordiale.
Il faut savoir quel type d'éléments on cherche : un entier, un couple d'entiers ou autre chose ? à quoi correspond-il ? quelles sont ses valeurs possibles ?

Évènement

$\star$ Un évènement est une partie de l'univers Ω.
$\star$ Un évènement sera dit élémentaire s'il ne contient qu'un seul résultat.

L'ensemble des évènements est noté $\mathcal{A}$.
Cet ensemble est stable par passage à l'union, à l'intersection dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut lister un à un) et au complémentaire.

Réalisation d'évènement

$\star$ On dira que l'évènement A est réalisé si le résultat de l'expérience est dans A.
$\star$ Si A et B sont des évènements, alors $A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique celle de B.
$\star$ L'égalité $A = B$ signifie que l'on a $A \subset B$ et $B \subset A$.

Le conseil du prof :
Concrètement, pour montrer que $A \subset B$, on partira de l'évènement A en supposant qu'il est réalisé. On s'écrit alors la conclusion à atteindre : la réalisation de B ; et, entre l'hypothèse et la conclusion, on agit par différentes implications et déductions.

Opérations sur les évènements

On note A et B des évènements de Ω.
⋆ L'évènement $\overline{A}$, appelé l'évènement contraire de A, est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.
⋆ L'évènement $A \cup B$, appelé réunion (ou union) de A et B, est réalisé si et seulement si A l'est ou si B l'est.
⋆ L'évènement $A \cap B$, appelé intersection de A et B, est réalisé si et seulement si A et B le sont.

Le conseil du prof :
La notion de contraposée nous permet d'affirmer que :

$$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Évènements incompatibles

Si l'on a deux évènements A et B vérifiant $A \cap B = \emptyset$, alors on dira qu'ils sont incompatibles (ou disjoints).

Système complet d'évènements

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements de Ω (où $I \subset \mathbb{N}$) sera appelée système complet d'évènements si :

⋆ $\forall i, j \in I,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$

⋆ $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Le conseil du prof :
Sauf demande explicite de l'énoncé, vous n'aurez pas à justifier que telle famille est un système complet d'évènements.

Coefficients binomiaux

Factorielle

Soit E un ensemble fini à n éléments.
On appelle permutation de E, tout choix de n éléments tous distincts dans E.
Il y en a factorielle n et on note $n!$:

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

> *La factorielle n représente le nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.*

Coefficient binomial

Le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments (où $0 \leq p \leq n$) est $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ (on le lit p parmi n) et il est défini par :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

> *Le coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ représente le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.*

Les relations importantes

⋆ La symétrie :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

⋆ La petite formule : $\forall n, p \geq 1$,

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

⋆ Le triangle de Pascal : pour tout $n \geq 1$ et p tel que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Les conseils du prof :
⋆ *La petite formule sera très utile dans le calcul d'espérance ou de variance où l'on peut retrouver des termes de la forme* $k\binom{n}{k}$.
Parfois, on pourra appliquer 2 fois cette formule et avoir :

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

⋆ *La différence de coefficients binomiaux peut être simplifiée par le triangle de Pascal :* $\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1}$.

Probabilité

Définition

On appelle probabilité toute application $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

⋆ $P(\Omega) = 1$

⋆ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Si on a $P(A) = 1$ alors on dira que l'évènement A est quasi-certain.
Si on a $P(A) = 0$ alors on dira que l'évènement A est quasi-impossible.

Propriétés

$\star$ Pour tout évènement A, on a :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$\star$ Pour toute famille finie $(A_i)_{i=1}^n$ d'évènements deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), on a :

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$\star$ Pour tout évènement A, on a :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$\star$ Croissance :

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Formule du crible de Poincaré

$\star$ Pour 2 évènements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\star$ Pour 3 évènements :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Équiprobabilité

On dira que l'on a équiprobabilité lors d'une expérience aléatoire si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.
Dans ce cas, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour réaliser } A}{\text{nombre de cas favorables au total}}$$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit un évènement A de probabilité non nulle.
L'application $P_A : B \longmapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est une probabilité que l'on appelle la probabilité conditionnelle relative à A.
Le réel $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, que l'on notera $P_A(B)$, est appelé la probabilité de B sachant A.

Le conseil du prof :
Pour appliquer cette formule, on n'oubliera pas de relever que $P(A) \neq 0$.

Les propriétés

$\star$ $P_A(\emptyset) = 0$, $P_A(\Omega) = 1$ et $\forall B$ vérifiant $A \subset B$, $P_A(B) = 1$.
$\star$ $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

Des formules importantes

Formule des probabilités composées

$\star$ Si $P(A) \neq 0$ alors on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

$\star$ Soit $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
On a la formule :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Le conseil du prof :
On peut éviter l'utilisation de cette formule par une traduction détaillée et chronologique de l'évènement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$.
On précisera l'évolution du modèle au fur et à mesure de l'expérience.

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (où $I \subset \mathbb{N}$).
Alors, pour tout évènement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Les conseils du prof :
$\star$ *Si le système complet est infini, alors la somme est une série ; on justifiera sa convergence grâce au fait qu'elle est égale à une probabilité.*

$\star$ *Si le système complet n'est pas donné explicitement, il peut être suggéré soit à travers la formule à prouver (si l'on doit montrer que* $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1)$ *on s'appuiera sur le système complet* $((X_n = 0), (X_n = 1))$*) soit à travers des calculs de probabilités conditionnelles (on doit calculer* $P(Y = 1)$ *et on a déterminé* $P_{(X=k)}(Y = 1)$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *donc prend comme système complet* $(X = k)_{0\leq k\leq n}$*).*

$\star$ *Il faut être vigilant sur le fait d'avoir un vrai système complet d'évènements c'est-à-dire que l'on recouvre bien tous les cas possibles.*

Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (où $I \subset \mathbb{N}$). Alors, pour tout évènement B (tel que $P(B) \neq 0$) et $i \in I$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k\in I} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$

Indépendance

Définitions

$\star$ Deux évènements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$\star$ Des évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont dits deux à deux indépendants si :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$\star$ Des évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont dits mutuellement indépendants si :

$$\forall I \subset \mathbb{N},\quad P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Le conseil du prof :
Il ne faudra pas confondre les deux notions d'indépendance deux à deux et d'indépendance mutuelle.
Toutefois, on a l'implication : indépendance mutuelle $\Longrightarrow$ indépendance deux à deux.

Stabilités par passage au contraire

Si n évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les évènements B_i avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.
En particulier, si A et B sont des évènements indépendants alors il en est de même pour :

$$A \text{ et } \overline{B},\ \overline{A} \text{ et } B,\ \overline{A} \text{ et } \overline{B}$$