

Daniel Duverney
Gilles Bouton
Pascale Bouton
Géry Huvent

MPSI,
MP2I, PCSI,
PTSI, TSI

Toutes les mathématiques

Première année
de classes préparatoires scientifiques

3^e édition



ellipses

Table des matières

Module 1 Outils fondamentaux	1
Chapitre 1 : Trigonométrie	3
1.1 Cercle trigonométrique	3
1.2 Symétries dans le cercle trigonométrique	5
1.3 Formules d'addition	6
1.4 Formules de duplication	7
1.5 Transformations de produits en sommes	7
1.6 Transformations de sommes en produits	8
Exercices	8
Chapitre 2 : Compléments de trigonométrie	11
2.1 Inversion des fonctions trigonométriques	11
2.2 Résolution d'équations trigonométriques	13
2.3 Transformation d'expressions trigonométriques	13
2.4 Coordonnées polaires du plan	15
2.5 Fonctions sinusoïdales	16
Exercices	17
Chapitre 3 : Nombres complexes et trigonométrie	19
3.1 Forme algébrique des nombres complexes	19
3.2 Plan complexe et forme trigonométrique	20
3.3 Exponentielle complexe	21
3.4 Forme exponentielle des nombres complexes	23
3.5 Formules d'Euler et linéarisation	23
3.6 Sommes trigonométriques et complexes	24
3.7 Sommes de fonctions sinusoïdales	26
Exercices	27
Chapitre 4 : Introduction aux déterminants	29
4.1 Qu'est-ce qu'un déterminant ?	29
4.2 Calcul pratique des déterminants	30
4.3 Règle de Sarrus	32
4.4 Opérations sur les déterminants	33
4.5 Interspersion de colonnes dans un déterminant	34
4.6 Formules de Cramer	35

4.6.1	Systèmes de deux équations à deux inconnues	35
4.6.2	Systèmes de trois équations à trois inconnues	36
	Exercices	37
Chapitre 5	Produit scalaire	39
5.1	Projection orthogonale sur un axe orienté	39
5.2	Produit scalaire et projection orthogonale	41
5.3	Propriétés algébriques du produit scalaire	42
5.4	Bases orthonormées du plan	43
5.4.1	Définition et exemples	43
5.4.2	Expression analytique du produit scalaire	44
5.4.3	Changement de base orthonormée	45
5.5	Bases orthonormées de l'espace	46
5.5.1	Définition	46
5.5.2	Coordonnées cylindriques et sphériques	46
5.5.3	Propriétés des bases orthonormées	48
	Exercices	48
Chapitre 6	Notions de géométrie plane	51
6.1	Le triangle	51
6.2	Le cercle	53
6.2.1	Circonférence et surface	53
6.2.2	Théorème de l'angle inscrit	54
6.3	Constructions à la règle et au compas	55
6.4	Similitudes du plan et triangles semblables	57
6.5	Barycentre	59
6.5.1	Définition du barycentre	59
6.5.2	Propriétés du barycentre	60
6.5.3	Barycentre et géométrie	61
	Exercices	62
Chapitre 7	Géométrie analytique du plan	67
7.1	Orthogonalité, distance, parallélisme	67
7.1.1	Orthogonalité et distance	67
7.1.2	Parallélisme	68
7.2	Equations cartésiennes	69
7.2.1	Définition	69
7.2.2	Equation normale d'une droite	70
7.2.3	Equation fonctionnelle d'une droite	71
7.2.4	Equation cartésienne d'un cercle	72
7.3	Equations polaires	73
7.4	Notions sur la parabole	74
7.5	Géométrie du plan complexe	74
7.5.1	Longueurs et angles	74
7.5.2	Transformations élémentaires du plan complexe.	76
7.5.3	Similitude complexe	78

Exercices	79
Chapitre 8 : Produit vectoriel et produit mixte	83
8.1 Produit vectoriel	83
8.2 Bases orthonormées directes	85
8.2.1 Dans le plan	85
8.2.2 Dans l'espace	85
8.2.3 Expression analytique du produit vectoriel	85
8.3 Produit mixte de trois vecteurs de l'espace	87
8.3.1 Définition et premières propriétés	87
8.3.2 Expression analytique du produit mixte	88
Exercices	88
Chapitre 9 : Géométrie analytique de l'espace	91
9.1 Equation cartésienne d'une sphère	91
9.2 Equation cartésienne d'un plan	92
9.3 Distance d'un point à un plan	94
9.4 Droites de l'espace	94
Exercices	95
Chapitre 10 : Introduction au calcul différentiel	99
10.1 Dérivée d'une fonction en un point	99
10.2 Opérations sur les fonctions dérivables	102
10.3 Notation de Leibniz	103
10.4 Dérivée d'une fonction composée	104
10.5 Notions de cinématique	105
10.5.1 Trajectoire, vitesse et accélération	105
10.5.2 Cas des coordonnées polaires	107
10.5.3 Mouvement rectiligne	108
10.5.4 Mouvement circulaire	109
Exercices	110
Chapitre 11 : Compléments de calcul différentiel	115
11.1 Dérivées des exposants rationnels	115
11.1.1 La longue histoire des exposants	116
11.1.2 Dérivées des exposants fractionnaires	117
11.2 Dérivées des fonctions réciproques	119
11.3 Un exemple de calcul infinitésimal	120
11.4 Dérivée de l'exponentielle complexe	121
11.5 Dérivées partielles	121
11.5.1 Fonctions de plusieurs variables	121
11.5.2 Dérivées partielles	122
Exercices	123
Chapitre 12 : Exponentielles et logarithmes	127
12.1 Fonctions exponentielles	127

12.1.1	Définition et propriété fondamentale	127
12.1.2	Dérivée des fonctions exponentielles	128
12.1.3	Limites et formes indéterminées	129
12.1.4	Fonction exponentielle complexe	130
12.2	Fonctions logarithmes	131
12.2.1	Définition et exemples	131
12.2.2	Propriété fondamentale	132
12.2.3	Le rôle central du logarithme népérien	133
12.3	Trigonométrie hyperbolique	134
12.3.1	Définition et formules d'addition	134
12.3.2	Dérivées et représentations graphiques	136
	Exercices	137
Module 2 Fonctions de variable réelle		141
Chapitre 13 : Représentations graphiques		143
13.1	Plan général d'étude d'une fonction	143
13.2	Ensemble de définition d'une fonction	144
13.3	Réduction de l'ensemble d'étude	145
13.3.1	Fonctions paires et impaires	145
13.3.2	Fonctions périodiques	146
13.4	Asymptotes	146
13.5	Branches paraboliques	148
13.6	Tangente en un point	149
13.7	Points d'inflexion	151
	Exercices	152
Chapitre 14 : Primitives		155
14.1	Primitives d'une fonction	155
14.2	Calculs élémentaires de primitives	157
14.3	Intégration par parties	158
14.4	Primitives de fonctions trigonométriques	159
14.5	Changement de variable	160
	Exercices	161
Chapitre 15 : Intégrales		163
15.1	Définition et interprétation géométrique	163
15.2	Propriétés élémentaires des intégrales	165
15.3	Intégration par parties	167
15.4	Changement de variable	168
15.5	Applications du calcul intégral	169
15.5.1	Volume de la sphère	169
15.5.2	Surface de la sphère	169
15.5.3	Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle	170
	Exercices	171

Chapitre 16 : Equations différentielles homogènes	175
16.1 Equation linéaire homogène du premier ordre	175
16.2 Equation de l'oscillateur harmonique	176
16.3 Equation du second ordre (cas général)	178
16.4 Exemple de système différentiel linéaire	179
16.5 Amortissement et oscillations libres	180
16.5.1 Equation du premier ordre	180
16.5.2 Equation du second ordre	181
Exercices	182
Chapitre 17 : Equations différentielles non homogènes	185
17.1 Principe général de résolution	185
17.2 Second membre constant	186
17.3 Second membre sinusoïdal	186
17.3.1 Première méthode	186
17.3.2 Deuxième méthode	187
17.4 Principe de superposition	187
17.5 Solution permanente et solution transitoire	188
Exercices	189
Chapitre 18 : Autres équations différentielles	191
18.1 Equations à variables séparables	191
18.2 Méthode de variation de la constante	192
18.3 Changement de fonction inconnue	194
18.4 Changement de variable	196
18.5 Problème de Cauchy	197
Exercices	198
Chapitre 19 : Développements limités	201
19.1 Exemple et définition	201
19.2 Formule de Taylor-Young	202
19.3 Développements limités et approximations	204
19.4 Opérations sur les développements limités	204
19.4.1 Substitutions élémentaires	204
19.4.2 Addition de développements limités	205
19.4.3 Multiplication de deux développements limités	206
19.4.4 Intégration des développements limités	206
19.4.5 Substitutions non élémentaires	207
19.5 Généralisations	208
19.5.1 Développement limité au voisinage de a	208
19.5.2 Développements asymptotiques	209
Exercices	210

Module 3	Mathématiques discrètes	213
Chapitre 20	Nombres entiers et arithmétique	215
20.1	Entiers naturels et récurrence	215
20.2	Entiers relatifs et division euclidienne	217
20.2.1	Multiples et diviseurs	217
20.2.2	Division euclidienne dans \mathbb{Z}	219
20.3	Théorème de Bézout et conséquences	221
20.4	Nombres premiers	223
20.5	Congruences	225
	Exercices	227
Chapitre 21	Analyse combinatoire	231
21.1	Coefficients binomiaux et triangle de Pascal	231
21.2	Formule du binôme de Newton	234
21.3	Formule de Leibniz	236
21.4	Arrangements, permutations, combinaisons	237
	Exercices	239
Chapitre 22	Suites classiques	243
22.1	Suites arithmétiques	243
22.2	Suites géométriques	245
22.3	Récurrentes linéaires du second ordre	247
22.4	Sommes et produits de termes consécutifs	250
22.4.1	Formules sommatoires	250
22.4.2	Sommes télescopiques	252
22.4.3	Opérations sur les sommes discrètes	253
22.4.4	Produits de termes consécutifs	254
22.5	Sommes et produits d'égalités	255
22.6	Suites et sommes doubles	257
	Exercices	258
Chapitre 23	Suites convergentes	263
23.1	Qu'est-ce qu'une suite convergente?	263
23.1.1	Exemples de suites de nombres réels convergentes	263
23.1.2	Définition mathématique d'une suite convergente	266
23.1.3	Suites divergentes	267
23.2	Convergence d'une suite géométrique	268
23.3	Théorème des suites monotones	269
23.4	Théorème des suites adjacentes	272
23.5	Suites extraites	273
	Exercices	273

Module 4 Algèbre	277
Chapitre 24 : Langage de la logique et des ensembles	279
24.1 Langage de la logique	279
24.1.1 Proposition logique	279
24.1.2 Conjonction, disjonction, négation	280
24.1.3 Implication et équivalence	280
24.1.4 Raisonnements par contraposition et par l'absurde	282
24.1.5 Quantificateurs	282
24.2 Ensembles et algèbre de Boole	283
24.2.1 Notion d'ensemble	283
24.2.2 Inclusion	283
24.2.3 Intersection et réunion	284
24.2.4 Produit cartésien	285
24.2.5 Relations d'ordre et d'équivalence	285
24.3 Cardinal d'un ensemble fini	287
24.4 Application d'un ensemble dans un autre	288
24.4.1 Applications et fonctions	288
24.4.2 Composition des applications	289
24.4.3 Image d'un ensemble par une application	290
24.5 Injections, surjections et bijections	290
24.5.1 Injections et surjections	290
24.5.2 Bijections	291
Exercices	293
Chapitre 25 : Equations et polynômes	295
25.1 Equations	295
25.1.1 Racines n -ièmes d'un nombre complexe	295
25.1.2 Racines carrées d'un nombre complexe	297
25.1.3 Equation du second degré dans \mathbb{C}	297
25.2 Polynômes	298
25.2.1 Division euclidienne des polynômes	298
25.2.2 Racines d'un polynôme et factorisation	301
25.2.3 Racines simples et racines multiples	302
25.2.4 Théorème de d'Alembert	303
25.2.5 Relations entre coefficients et racines	304
25.2.6 Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$	305
25.3 Compléments	306
25.3.1 Algorithme de Horner	306
25.3.2 Dérivée formelle d'un polynôme	307
25.3.3 Formules de Leibniz et Taylor	309
Exercices	310
Chapitre 26 : Fractions rationnelles	313
26.1 Décomposition en éléments simples	313
26.2 Calcul de la partie entière	316

26.3	Cas des pôles réels	316
26.3.1	Pôles réels simples	316
26.3.2	Pôles réels doubles	317
26.4	Eléments simples de deuxième espèce	318
26.5	Primitives des fractions rationnelles	319
26.5.1	Un exemple élémentaire	319
26.5.2	Primitives des éléments simples de deuxième espèce	320
	Exercices	321
Chapitre 27 : Groupes, anneaux et corps		323
27.1	Groupes	323
27.2	Sous-groupes	325
27.3	Permutations et groupe symétrique	326
27.3.1	Définition et exemples	326
27.3.2	Groupe symétrique	327
27.4	Anneaux	329
27.4.1	Définition et exemples	329
27.4.2	Sous-anneaux	331
27.5	Corps	331
	Exercices	332
Chapitre 28 : Théorie des déterminants		337
28.1	Définition d'un déterminant	337
28.2	Calcul pratique des déterminants	339
28.2.1	Interversion de lignes ou de colonnes	339
28.2.2	Développement d'un déterminant	340
28.2.3	Linéarité des déterminants	341
28.3	Déterminant de Vandermonde	342
28.4	Formules de Cramer	344
	Exercices	346
Module 5 Compléments d'analyse		349
Chapitre 29 : Limites et équivalents		351
29.1	Limites et formes indéterminées	351
29.2	Comparaison locale de deux fonctions	353
29.2.1	Équivalents et limites	353
29.2.2	Opérations sur les équivalents	355
29.2.3	Suites équivalentes	357
29.3	Deux techniques de calcul de limites	357
29.3.1	Changement de variable	357
29.3.2	Théorème d'encadrement	357
29.4	Définition mathématique d'une limite	358
	Exercices	360

Chapitre 30 : Continuité et dérivabilité	363
30.1 Partie entière et valeur absolue	363
30.1.1 Partie entière d'un nombre réel	363
30.1.2 Valeur absolue	364
30.2 Généralités sur les fonctions continues	365
30.2.1 Définition et exemples	365
30.2.2 Opérations sur les fonctions continues	366
30.2.3 Prolongement par continuité	366
30.3 Fonctions continues sur un intervalle	367
30.4 Généralités sur les fonctions dérivables	370
30.4.1 Dérivabilité à gauche et à droite	370
30.4.2 Fonctions de classe C^n	371
30.5 Fonctions dérivables sur un intervalle	372
30.5.1 Dérivée en un extremum	372
30.5.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	373
30.5.3 Inégalités des accroissements finis	374
30.6 Continuité uniforme	376
30.7 Nombres réels et continuité	377
Exercices	378
Chapitre 31 : Compléments de calcul intégral	381
31.1 Fonctions continues par morceaux	381
31.2 Majoration des intégrales	383
31.3 Intégrale fonction de sa borne du haut	386
31.4 Formule de Taylor avec reste intégral	388
31.5 Intégrales de Wallis	390
31.6 Théorie de l'intégrale de Riemann	392
Exercices	399
Chapitre 32 : Séries	403
32.1 Définition et exemples	403
32.2 Critère grossier de divergence	406
32.3 Séries à termes positifs	406
32.4 Absolue convergence	410
32.5 Théorème des séries alternées	412
32.6 Séries et bases de numération	412
32.7 Séries doubles	414
Exercices	418
Chapitre 33 : Fonctions de deux variables	423
33.1 Représentation graphique, limites et continuité	423
33.2 Dérivées partielles et différentiabilité	426
33.3 Gradient en un point	428
33.4 Extremums des fonctions de deux variables	431
33.4.1 Plan tangent et points critiques	431
33.4.2 Extremums d'une fonction de deux variables	432

33.4.3	Méthode des moindres carrés	434
33.5	Changement de variable	436
33.5.1	Variables liées	436
33.5.2	Dérivation en chaîne	437
33.6	Equations aux dérivées partielles	439
33.7	Parties fermées bornées	441
	Exercices	442
Chapitre 34 : Introduction à l'analyse numérique		447
34.1	Analyse numérique et algorithmes	447
34.2	Méthodes de dichotomie et de Lagrange	448
34.2.1	Méthode de dichotomie	448
34.2.2	Méthode de Lagrange	450
34.3	Calcul numérique des intégrales	452
34.3.1	Méthode des rectangles	452
34.3.2	Méthode des trapèzes	453
34.3.3	Méthode de Simpson	454
34.4	Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta	455
34.4.1	Méthode d'Euler	455
34.4.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	456
34.5	Rapidité de convergence et approximation	457
	Exercices	459
Module 6 Calcul matriciel et algèbre linéaire		461
Chapitre 35 : Matrices		463
35.1	Premières notions sur les matrices	463
35.1.1	Définition des matrices	463
35.1.2	Addition et multiplication par un scalaire	464
35.1.3	Multiplication matricielle	464
35.1.4	Transposition	467
35.2	Interprétation matricielle des systèmes d'équations linéaires	468
35.3	Algèbre des matrices carrées	469
35.3.1	Introduction	469
35.3.2	Formule du binôme de Newton	470
35.3.3	Matrices carrées inversibles	471
35.3.4	Calcul de l'inverse par inversion de système	472
35.3.5	Déterminant et comatrice	474
	Exercices	476
Chapitre 36 : Méthode du pivot de Gauss		481
36.1	Etude d'un exemple	481
36.2	Relations de compatibilité	483
36.3	Inversion de matrice carrée	485
	Exercices	486

Chapitre 37 : Vecteurs	489
37.1 Espace vectoriel \mathbb{K}^n	489
37.1.1 Addition de deux vecteurs	490
37.1.2 Multiplication par un scalaire	490
37.2 Bases de \mathbb{K}^n	491
37.3 Changement de base	493
37.4 Sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n	495
Exercices	498
Chapitre 38 : Endomorphismes et matrices	501
38.1 Définition et exemples	501
38.2 Matrice d'un endomorphisme dans une base	503
38.3 Changement de base	505
38.4 Composée de deux endomorphismes	508
Exercices	509
Chapitre 39 : Fondements de l'algèbre linéaire	513
39.1 Espaces vectoriels	513
39.2 Sous-espaces vectoriels	515
39.2.1 Définition et caractérisation	515
39.2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels	517
39.3 Bases d'un espace vectoriel	518
39.3.1 Définition et exemples fondamentaux	518
39.3.2 Familles libres et familles génératrices	519
39.3.3 Bases et dimension	522
39.4 Rang d'une famille de vecteurs	523
39.5 Sommes de sous-espaces vectoriels	525
39.5.1 Définition et propriétés	525
39.5.2 Somme directe	527
39.5.3 Sous-espaces supplémentaires	528
39.6 Compléments théoriques	529
39.6.1 Théorème de la base incomplète	529
39.6.2 Sous-espaces en dimension finie	532
Exercices	533
Chapitre 40 : Applications linéaires	537
40.1 Introduction	537
40.2 Noyau d'une application linéaire	539
40.3 Matrice d'une application linéaire	541
40.3.1 Définition et exemples	541
40.3.2 Opérations sur les matrices	542
40.4 Image d'une application linéaire	544
40.5 Théorème du rang	545
40.6 Projecteurs et symétries	547
Exercices	549

Chapitre 41 : Espaces euclidiens	553
41.1 Produit scalaire et orthogonalité	553
41.1.1 Espaces préhilbertiens réels	553
41.1.2 Norme d'un vecteur	554
41.1.3 Orthogonalité	556
41.2 Espaces euclidiens	556
41.2.1 Bases orthonormales	556
41.2.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	558
41.2.3 Rotations de l'espace \mathbb{R}^3	559
41.2.4 Matrices orthogonales	560
41.3 Algorithme de Gram-Schmidt	562
Exercices	563
Module 7 Probabilités	567
Chapitre 42 : Fondements du calcul des probabilités	569
42.1 Epreuves et événements	569
42.2 Espaces probabilisés	571
42.2.1 Définition	571
42.2.2 Equiprobabilité	573
42.3 Probabilités conditionnelles	575
42.4 Indépendance	577
Exercices	578
Chapitre 43 : Variables aléatoires discrètes finies	583
43.1 Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?	583
43.2 Variables aléatoires discrètes finies	584
43.2.1 Loi de probabilité	584
43.2.2 Espérance, variance et écart-type	585
43.2.3 Fonctions de variables aléatoires	587
43.3 Modèles probabilistes discrets	588
43.3.1 Loi uniforme	588
43.3.2 Loi de Bernoulli	589
43.3.3 Loi binomiale	590
43.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	592
Exercices	593
Chapitre 44 : Couples de variables aléatoires	597
44.1 Couples de variables aléatoires	597
44.2 Sommes de variables aléatoires	600
44.3 Coefficient de corrélation linéaire	601
44.4 Variables aléatoires indépendantes	603
44.5 Loi des grands nombres	605
Exercices	607

Solutions des exercices	611
Exercices du module 1	611
Exercices du module 2	667
Exercices du module 3	705
Exercices du module 4	731
Exercices du module 5	760
Exercices du module 6	799
Exercices du module 7	841
Index	863