

# Table des matières

<b>I</b>	<b>« Les fondamentaux »</b>	
	<b>Récapitulatifs approfondis de 1<sup>re</sup> année</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Structures algébriques et relations binaires</b>	<b>3</b>
1.1	Exposés préliminaires . . . . .	3
1.1.1	Utilisations des structures algébriques . . . . .	3
1.1.2	Relations binaires, loi de composition . . . . .	4
1.1.3	Les entiers naturels et la récurrence . . . . .	6
1.1.4	Ecriture d'un entier dans une base de numération $b$ . . . . .	8
1.1.5	Des entiers aux complexes . . . . .	8
1.2	Définitions des structures fondamentales . . . . .	9
1.2.1	Groupes, anneaux, corps . . . . .	9
1.2.2	Espaces vectoriels, algèbres . . . . .	11
1.3	A propos des sous-corps de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$ . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Les nombres complexes</b>	<b>15</b>
2.1	Le corps des complexes . . . . .	15
2.1.1	Une algèbre commutative . . . . .	15
2.1.2	Conjugaison, module et argument . . . . .	15
2.1.3	Racines carrées et équations du second degré . . . . .	16
2.1.4	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité . . . . .	17
2.2	Développer une vision géométrique . . . . .	19
2.2.1	Encadrement . . . . .	19
2.2.2	Racine carrée . . . . .	19
2.3	Précisions à propos de l'argument . . . . .	20
2.4	Nombres complexes et géométrie plane . . . . .	21
2.4.1	Passerelles entre nombres complexes et géométrie . . . . .	22
2.4.2	Configurations particulières . . . . .	23
2.4.3	Quelques transformations . . . . .	24
2.4.4	Similitudes planes et nombres complexes . . . . .	25
2.5	En lien avec d'autres chapitres . . . . .	27
2.5.1	Exponentielle d'un complexe . . . . .	27
2.5.2	Représentation matricielle des complexes . . . . .	28
2.5.3	Le théorème de relèvement $C^1$ (Hors-programme MP) . . . . .	29
2.5.4	Les quaternions (Hors programme MP) . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Etudes sur les groupes</b>	<b>31</b>
3.1	Généralités sur les groupes . . . . .	31
3.1.1	Groupe produit . . . . .	31
3.1.2	Sous-groupe engendré par une partie . . . . .	31
3.1.3	Morphisme et isomorphisme de groupes . . . . .	32
3.1.4	Groupes monogènes, groupes cycliques . . . . .	34
3.1.5	Ordre d'un élément dans un groupe . . . . .	37
3.2	Le groupe symétrique . . . . .	38
3.2.1	Permutations . . . . .	38
3.2.2	Cycles . . . . .	39
3.2.3	Générateurs du groupe symétrique . . . . .	39
3.2.4	Signature d'une permutation . . . . .	41
3.3	Exemples de groupes et de morphismes . . . . .	44
3.3.1	Les translations sont des bijections . . . . .	44
3.3.2	Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ . . . . .	44
3.3.3	Groupes de matrices . . . . .	45
3.3.4	Exemple d'un groupe d'éléments involutifs . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Anneaux et arithmétique de <math>\mathbb{Z}</math></b>	<b>49</b>
4.1	Résultats fondamentaux dans les anneaux . . . . .	49
4.1.1	Calculs dans un anneau . . . . .	49
4.1.2	Prototypes . . . . .	49
4.2	Morphisme algébrique . . . . .	50
4.2.1	Morphisme (ou homomorphisme) . . . . .	50
4.2.2	Caractéristique d'un anneau . . . . .	52
4.2.3	Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs . . . . .	52
4.2.4	Produit fini d'anneaux . . . . .	52
4.2.5	Divisibilité dans un anneau intègre . . . . .	53
4.3	Résultats classiques d'arithmétique de $\mathbb{Z}$ . . . . .	53
4.3.1	Considérations initiales d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	53
4.3.2	Idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . . .	57
4.3.3	Éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . . .	57
4.3.4	Théorème de <i>Fermat</i> . . . . .	60
4.3.5	Théorème de <i>Wilson</i> . . . . .	60
4.3.6	Théorème des restes chinois . . . . .	61
4.3.7	Indicatrice d' <i>Euler</i> . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Polynômes</b>	<b>67</b>
5.1	Rappels de première année . . . . .	67
5.1.1	Division et divisibilité : résultats de 1 <sup>ère</sup> année . . . . .	68
5.1.2	Relations coefficients-racines . . . . .	70
5.2	Fractions rationnelles . . . . .	71
5.2.1	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	71
5.2.2	Techniques de calcul . . . . .	72
5.3	Compléments sur les polynômes . . . . .	74
5.3.1	Les polynômes de <i>Lagrange</i> . . . . .	74
5.3.2	Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	75
5.3.3	P.P.C.M. et P.G.C.D. de $p$ polynômes . . . . .	76
5.3.4	Hors programme : théorème de <i>Lucas</i> et calcul de $\zeta(2)$ . . . . .	80
5.4	Formulaire initial d'Algèbre . . . . .	82

<b>6</b>	<b>Fondements de l'algèbre linéaire</b>	<b>83</b>
6.1	Introduction, base, dimension . . . . .	83
6.1.1	Utilisation de l'algèbre linéaire . . . . .	83
6.1.2	Famille génératrice, liée ou libre . . . . .	84
6.1.3	Dimension finie . . . . .	86
6.2	Sous-espaces vectoriels et applications linéaires . . . . .	87
6.2.1	Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	87
6.2.2	Applications linéaires : morphismes d'espaces vectoriels . . . . .	89
6.2.3	Projecteurs, involutions et nilpotents . . . . .	92
6.3	Les matrices . . . . .	96
6.3.1	Premières opérations . . . . .	96
6.3.2	Matrices particulières . . . . .	97
6.3.3	Matrices et applications linéaires . . . . .	98
6.3.4	Trace et rang d'une matrice . . . . .	100
6.3.5	Rang et matrices extraites . . . . .	102
6.3.6	Matrices de rang 1 . . . . .	103
6.3.7	Calcul matriciel par blocs . . . . .	104
6.3.8	Méthode de <i>Gauss</i> . . . . .	104
6.4	Point de vue vectoriel, point de vue matriciel . . . . .	106
6.5	Les polynômes de Lagrange . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Formes multilinéaires, déterminants</b>	<b>109</b>
7.1	Formes multilinéaires . . . . .	109
7.1.1	Application $n$ -linéaire . . . . .	109
7.1.2	Développements en dimension finie . . . . .	111
7.2	Les déterminants . . . . .	111
7.2.1	Déterminant de $n$ vecteurs relativement à une base . . . . .	111
7.2.2	Aire, volume et déterminant . . . . .	113
7.2.3	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	116
7.2.4	Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	118
7.2.5	Orientation d'un espace vectoriel réel . . . . .	118
7.2.6	Calcul des déterminants . . . . .	119
7.2.7	Déterminant et rang d'une matrice . . . . .	122
7.2.8	Remarques algébriques et topologiques . . . . .	122
7.2.9	Déterminant de <i>Vandermonde</i> . . . . .	123
7.2.10	Polynôme caractéristique d'une matrice . . . . .	123
7.3	Exercices . . . . .	124
<b>8</b>	<b>Systèmes linéaires et dualité</b>	<b>127</b>
8.1	Systèmes linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues . . . . .	127
8.1.1	Décomposition d'un vecteur dans un système de vecteurs . . . . .	127
8.1.2	Antécédent d'un vecteur par une application linéaire . . . . .	128
8.1.3	Intersection d'hyperplans affines . . . . .	129
8.1.4	Système linéaire et interprétations . . . . .	129
8.1.5	Cas de <i>Cramer</i> . . . . .	130
8.1.6	Cas général . . . . .	131
8.1.7	Résolution par calcul . . . . .	131
8.2	Système d'équations, dualité . . . . .	132
8.2.1	Exemple d'un plan de $\mathbb{R}^4$ . . . . .	132
8.2.2	Forme linéaire et hyperplan . . . . .	133

8.2.3	Base duale en dimension finie . . . . .	135
8.3	Exemples de résolutions de systèmes . . . . .	137
8.4	Exemples de bases duales et anté-duales . . . . .	140
<b>9</b>	<b>Formes bilinéaires et produits scalaires</b>	<b>143</b>
9.1	Formes bilinéaires symétriques . . . . .	143
9.1.1	Symétrique et non dégénérée . . . . .	143
9.1.2	En dimension finie . . . . .	143
9.2	Forme quadratique associée . . . . .	146
9.2.1	Forme polaire . . . . .	146
9.2.2	Forme positive et définie positive . . . . .	146
9.3	L'inégalité fondamentale de <i>Cauchy-Schwarz</i> . . . . .	148
9.4	Produit scalaire sur $E$ . . . . .	149
9.4.1	Définitions : Préhilbertien et Euclidien . . . . .	149
9.4.2	Norme associée à un produit scalaire . . . . .	150
9.4.3	Identité du parallélogramme . . . . .	150
9.4.4	Ecart angulaire . . . . .	151
9.5	Etude de la suite des polynômes de <i>Tchebychev</i> . . . . .	151
<b>10</b>	<b>Suites numériques, topologie de <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>153</b>
10.1	Construction de $\mathbb{R}$ . . . . .	153
10.1.1	Un corps totalement ordonné . . . . .	153
10.1.2	Le corps des réels . . . . .	154
10.2	Convergence d'une suite de réels . . . . .	154
10.2.1	Définition . . . . .	154
10.2.2	Convergence . . . . .	155
10.2.3	Suite extraite . . . . .	155
10.3	Quelques premiers outils . . . . .	156
10.3.1	Une condition nécessaire de convergence . . . . .	156
10.3.2	Opérations sur les suites . . . . .	156
10.3.3	Théorème d'encadrement . . . . .	157
10.3.4	Suites arithmétiques . . . . .	157
10.3.5	Suites géométriques . . . . .	158
10.4	Topologie de $\mathbb{R}$ . . . . .	158
10.4.1	Sous-ensembles remarquables . . . . .	158
10.4.2	Topologie séquentielle de $\mathbb{R}$ . . . . .	159
10.4.3	Comparaisons . . . . .	162
10.5	Compléments techniques . . . . .	163
10.5.1	Théorème de <i>Césaro</i> . . . . .	163
10.5.2	Utilisation de développements asymptotiques . . . . .	164
10.6	Suites de complexes . . . . .	165
10.6.1	Séparer parties réelles et imaginaires . . . . .	165
10.6.2	Utiliser module et argument . . . . .	165
<b>11</b>	<b>Suites numériques récurrentes</b>	<b>167</b>
11.1	Approximations et systèmes dynamiques . . . . .	167
11.1.1	Comportement d'une suite récurrente . . . . .	167
11.1.2	Un premier exemple : les suites arithmético-géométriques . . . . .	168
11.2	Suites récurrentes réelles, avec $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	169
11.2.1	Généralités . . . . .	169

11.2.2	Deux situations favorables . . . . .	171
11.2.3	Des études plus délicates : utilisation de la compacité . . . . .	173
11.3	Réurrences linéaires d'ordre $p \geq 2$ . . . . .	173
11.3.1	Réurrence linéaire d'ordre 2 . . . . .	173
11.3.2	Réurrence linéaire d'ordre $p \geq 2$ . . . . .	175
11.4	Convergence hypergéométrique . . . . .	176
11.5	Suites homographiques . . . . .	178
11.6	Suites récurrentes complexes, avec $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	179
11.6.1	Un exemple : approximation d'une racine carrée . . . . .	179
11.6.2	Théorème du point fixe . . . . .	180
11.6.3	Quelques résultats sur les ensembles de Julia . . . . .	181
<b>12</b>	<b>Les fonctions de <math>\mathbb{R}</math> dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>183</b>
12.1	Quelques généralités . . . . .	183
12.1.1	Analyse fonctionnelle . . . . .	183
12.1.2	Parité, périodicité . . . . .	183
12.2	Autour de la continuité . . . . .	184
12.2.1	Valeur intermédiaire . . . . .	184
12.2.2	Uniforme continuité . . . . .	186
12.2.3	Fonction monotone . . . . .	187
12.2.4	Fonction réciproque . . . . .	187
12.3	Autour de la dérivabilité . . . . .	188
12.3.1	Fonction dérivable ou différentiable en $a$ . . . . .	188
12.3.2	Dérivation des fonctions composées . . . . .	188
12.3.3	Dérivée d'une fonction réciproque . . . . .	189
12.3.4	Formule de <i>Leibniz</i> . . . . .	190
12.4	Théorèmes de <i>Rolle</i> et des accroissements finis . . . . .	190
12.4.1	Théorème de <i>Rolle</i> . . . . .	190
12.4.2	Théorème des accroissements finis . . . . .	191
12.4.3	Limite de la dérivée . . . . .	193
12.4.4	Variations des fonctions . . . . .	194
12.5	Intégration sur un segment . . . . .	195
12.5.1	Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	195
12.5.2	Construction suivant <i>Riemann</i> . . . . .	196
12.5.3	Propriétés usuelles . . . . .	197
12.5.4	Sommes de <i>Riemann</i> de $f$ continue sur un segment . . . . .	199
12.5.5	Primitive . . . . .	203
12.5.6	Intégrale fonction de sa borne supérieure . . . . .	204
12.5.7	Théorème fondamental de l'analyse . . . . .	205
12.5.8	Intégration par parties . . . . .	205
12.5.9	Changement de variable . . . . .	207
12.6	Diverses applications . . . . .	207
12.6.1	Dérivées et intégrales . . . . .	207
12.6.2	Irrationnalité de $\pi$ . . . . .	210
12.6.3	Calcul de $\zeta(2)$ et intégrale de <i>Dirichlet</i> . . . . .	211

<b>13 Formules de Taylor et développements limités</b>	<b>213</b>
13.1 Comparaisons des fonctions à valeurs réelles	213
13.1.1 Domination, négligeabilité et équivalence	213
13.1.2 Notations utiles pour les développements limités	215
13.2 Polynôme et formules de <i>Taylor</i>	215
13.2.1 Polynôme de <i>Taylor</i> de $f$	215
13.2.2 Formules de <i>Taylor</i>	216
13.3 Développements limités	218
13.3.1 Existence et unicité	218
13.3.2 Opérations sur les D.L. des fonctions à valeurs réelles	220
13.3.3 Primitivation des D.L.	221
13.3.4 Remarques fondamentales	222
13.3.5 Clarté et précision	222
<b>14 Fonctions usuelles</b>	<b>225</b>
14.1 Les fonctions logarithme et exponentielle	225
14.1.1 Fonction logarithme népérien	225
14.1.2 Fonction exponentielle de base $e$	226
14.1.3 Logarithme et exponentielle de base $a$	227
14.2 Les fonctions puissances	227
14.2.1 Les puissances entières et leurs réciproques	227
14.2.2 Cas général	227
14.3 Caractérisations fonctionnelles	228
14.3.1 Caractérisation des applications linéaires	228
14.3.2 D'autres caractérisations fonctionnelles	229
14.4 Les fonctions trigonométriques	230
14.4.1 Fonctions sinus, cosinus et leurs réciproques	230
14.4.2 Graphes	230
14.4.3 Fonctions tangente et arctangente	231
14.5 Les fonctions hyperboliques	231
14.5.1 Fonctions sh, ch et th	231
14.5.2 Fonctions hyperboliques réciproques	232
14.6 Quelques exemples de référence	233
14.6.1 Fonction dérivable, mais non $C^1$	233
14.6.2 Asymptote horizontale ou tangente horizontale	234
14.6.3 Exemples à propos des fonctions usuelles	235
<b>15 Méthodes de calcul d'intégrales et de primitives</b>	<b>239</b>
15.1 Rappels de la théorie pour le calcul	239
15.1.1 Calcul à l'aide d'une primitive	239
15.1.2 Intégration par parties	240
15.1.3 Changement de variable	240
15.2 Les fractions rationnelles	240
15.2.1 Intégration d'un élément simple de première espèce	240
15.2.2 Intégration d'un élément simple de deuxième espèce	241
15.3 Fractions rationnelles en sinus et cosinus	242
15.3.1 Polynôme en sinus et cosinus	243
15.3.2 Fraction rationnelle en sinus et cosinus	243
15.3.3 Tests de <i>Bioche</i>	243
15.4 Fractions rationnelles en exp, sh ou ch	244

15.5	Intégrales de $f$ faisant intervenir un radical . . . . .	244
15.5.1	Intégrales du type $\int_p^q R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ . . . . .	244
15.5.2	Intégrales du type $\int_p^q R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ . . . . .	245
15.6	Tableau récapitulatif . . . . .	246
15.7	Exemples de calcul de diverses intégrales . . . . .	246
15.8	Quelques développements classiques . . . . .	250
15.8.1	Intégrales de <i>Wallis</i> . . . . .	250
15.8.2	Premier théorème de la moyenne . . . . .	251
15.8.3	Comportement des sommes de <i>Riemann</i> . . . . .	252
15.8.4	Formule des trapèzes . . . . .	253
<b>16</b>	<b>Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2</b>	<b>257</b>
16.1	Etude des EDL scalaires du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	257
16.1.1	Solutions d'une équation différentielle . . . . .	257
16.1.2	Equation normalisée . . . . .	257
16.1.3	Rappels de résultats utiles . . . . .	258
16.1.4	Résolution d'une équation sous forme normalisée . . . . .	259
16.1.5	Plan d'étude d'une équation différentielle linéaire . . . . .	261
16.2	Exemples de résolutions d'EDL1 . . . . .	261
16.2.1	Résolution de l'équation $(F) : t \cdot x' - 2 \cdot x + t = 0$ . . . . .	261
16.2.2	Résolution de l'équation $(F) : t^2 \cdot x' + (1 - 2t) \cdot x - t^2 = 0$ . . . . .	262
16.2.3	Résolution de l'équation $(F) : \cos(t) \cdot x' + \sin(t) \cdot x - 1 = 0$ . . . . .	263
16.3	Développements hors programme . . . . .	264
16.3.1	Changement de fonction inconnue . . . . .	264
16.3.2	Equations de <i>Bernoulli</i> et <i>Riccati</i> . . . . .	265
16.4	Equations linéaires scalaires d'ordre 2 . . . . .	266
16.4.1	Introduction aux équations d'ordre 2 . . . . .	266
16.4.2	Equations à coefficients constants . . . . .	267
<b>II</b>	<b>« Au cœur du programme »</b>	
	<b>L'essentiel en 2<sup>e</sup> année</b>	<b>269</b>
<b>17</b>	<b>Dénombrément et dénombrabilité</b>	<b>271</b>
17.1	Dénombrément . . . . .	271
17.1.1	Introduction . . . . .	271
17.1.2	Nombre d'applications . . . . .	271
17.1.3	Nombre de sous-ensembles . . . . .	272
17.1.4	Propriétés usuelles . . . . .	273
17.1.5	Applications classiques . . . . .	275
17.1.6	Récapitulatif des dénombrements . . . . .	276
17.1.7	Exemples . . . . .	276
17.2	Développement décimal d'un réel . . . . .	278
17.2.1	Une suite géométrique . . . . .	278
17.2.2	Existence et unicité . . . . .	278
17.3	Ensembles dénombrables, au plus dénombrables . . . . .	280
17.3.1	Rappels sur les ensembles finis . . . . .	280
17.3.2	Dénombrabilité . . . . .	281

17.3.3	Ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ . . . . .	282
17.3.4	Opérations . . . . .	283
17.3.5	Ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ . . . . .	283
17.3.6	Quelques développements . . . . .	284
<b>18</b>	<b>Espaces, distances et continuité</b> . . . . .	<b>285</b>
18.1	Mise en place des notions fondamentales . . . . .	285
18.1.1	Le problème de Guillaume Tell . . . . .	285
18.1.2	Normes et distances . . . . .	286
18.1.3	Boules, voisinages et ouverts . . . . .	287
18.1.4	Norme associée à un produit scalaire . . . . .	290
18.1.5	Suites, convergence, valeurs d'adhérence . . . . .	291
18.1.6	Densité . . . . .	293
18.1.7	Distance à un sous-ensemble . . . . .	293
18.1.8	Normes équivalentes . . . . .	294
18.1.9	Topologie induite, ouverts relatifs à $A$ . . . . .	295
18.2	Compacité, partie compacte . . . . .	296
18.3	Limites et fonctions continues . . . . .	297
18.3.1	Limite en un point, en restant dans une partie . . . . .	297
18.3.2	Caractérisation séquentielle de limite . . . . .	298
18.3.3	Continuité en un point, sur un ensemble . . . . .	298
18.3.4	Opérations algébriques et continuité . . . . .	300
18.4	Fonctions lipschitziennes, fonctions uniformément continues . . . . .	302
18.4.1	Fonctions lipschitziennes . . . . .	302
18.4.2	Fonctions uniformément continues . . . . .	303
18.4.3	Fonctions continues sur un compact . . . . .	303
18.5	Espace produit de $p$ espaces vectoriels normés . . . . .	304
18.5.1	Norme produit . . . . .	304
18.5.2	Suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace produit $E = \prod_{1 \leq k \leq p} E_k$ . . . . .	304
18.5.3	Produit de compacts . . . . .	305
18.5.4	Théorème de <i>Bolzano-Weierstrass</i> . . . . .	305
18.6	Espaces de dimension finie . . . . .	306
18.6.1	Equivalence des normes . . . . .	306
18.6.2	Compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie . . . . .	307
18.6.3	Continuité pour $F$ de dimension finie . . . . .	307
18.7	Segment, étoilé, convexe, connexe par arcs . . . . .	308
18.7.1	Segments dans un espace vectoriel . . . . .	308
18.7.2	Arc et connexe par arcs . . . . .	309
18.7.3	Fonction continue sur un connexe par arcs . . . . .	310
18.8	Quelques exemples développés . . . . .	311
18.8.1	Normes . . . . .	311
18.8.2	Ouverts, fermés, compacts . . . . .	313
18.8.3	Normes $N_p$ sur $\mathbb{K}^n$ . . . . .	314
18.8.4	Topologie dans les ensembles de matrices . . . . .	315



<b>19 Opérations algébriques et continuité</b>	<b>317</b>
19.1 Continuité des applications linéaires . . . . .	317
19.1.1 Continuité et caractère lipschitzien, pour $f$ linéaire . . . . .	317
19.1.2 Pour $E$ de dimension finie . . . . .	318
19.1.3 La meilleure constante de <i>Lipschitz</i> possible . . . . .	319
19.1.4 Hors programme : norme subordonnée . . . . .	320
19.2 Continuité des applications multilinéaires . . . . .	321
19.2.1 Cas d'une application bilinéaire . . . . .	321
19.2.2 Cas d'une application multilinéaire . . . . .	321
19.3 Continuité des opérations algébriques . . . . .	322
<b>20 Barycentres et fonctions convexes</b>	<b>323</b>
20.1 Notions affines dans un espace vectoriel . . . . .	323
20.1.1 Sous-espace affine d'un espace vectoriel . . . . .	323
20.1.2 Parallélisme, intersection et inclusion . . . . .	324
20.1.3 Repère affine cartésien . . . . .	324
20.1.4 Changement de repère, représentation matricielle . . . . .	325
20.2 Barycentres . . . . .	325
20.2.1 Définition . . . . .	325
20.2.2 Caractérisations des notions affines . . . . .	325
20.2.3 Associativité des barycentres . . . . .	326
20.2.4 Convexe et enveloppe convexe . . . . .	328
20.3 Fonction convexe . . . . .	328
20.3.1 Fonction convexe, fonction concave . . . . .	328
20.3.2 Conséquences géométriques . . . . .	329
20.3.3 Inégalité de convexité . . . . .	330
20.3.4 Convexité des fonctions dérivables . . . . .	331
20.3.5 Des inégalités conséquences de la convexité . . . . .	331
<b>21 Fonctions vectorielles</b>	<b>333</b>
21.1 Dérivation . . . . .	333
21.1.1 Vecteur dérivé . . . . .	333
21.1.2 Fonctions de classe $C^k$ sur $I$ , $k \in \mathbb{N}$ . . . . .	337
21.1.3 Fonctions de classe $C^k$ par morceaux . . . . .	338
21.2 Intégration sur un segment . . . . .	338
21.2.1 Définition de l'intégrale et premières propriétés . . . . .	338
21.2.2 Sommes de <i>Riemann</i> . . . . .	341
21.3 Dérivation et intégration . . . . .	341
21.3.1 Primitives . . . . .	341
21.3.2 Relations entre primitives . . . . .	343
21.3.3 Prolongement de la dérivée . . . . .	345
21.3.4 Formules de <i>Taylor</i> . . . . .	346
21.4 Comparaisons des fonctions vectorielles . . . . .	347
21.4.1 Domination, négligeabilité et équivalence . . . . .	347
21.4.2 Développements limités . . . . .	348
21.4.3 Dérivation du déterminant (Hors programme MP) . . . . .	349

<b>22 Arcs paramétrés</b>	<b>351</b>
22.1 Arc paramétré, courbe . . . . .	351
22.1.1 Introduction . . . . .	351
22.1.2 Arc paramétré . . . . .	351
22.2 Tangente en un point . . . . .	353
22.2.1 Droite tangente . . . . .	353
22.2.2 En un point à paramètre régulier . . . . .	354
22.3 Courbes planes : $n = 2$ . . . . .	354
22.3.1 Tangente . . . . .	354
22.3.2 Normale . . . . .	355
22.4 Exemples classiques d'arcs plans . . . . .	355
22.5 D'autres exemples . . . . .	360
<b>23 Compléments d'algèbre linéaire pour la réduction</b>	<b>361</b>
23.1 Les enjeux de la réduction des endomorphismes . . . . .	361
23.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme . . . . .	363
23.2.1 Définitions des éléments propres . . . . .	363
23.2.2 Somme directe des sous-espaces propres . . . . .	365
23.2.3 Chercher des vecteurs propres . . . . .	366
23.2.4 Pour une matrice carrée . . . . .	367
23.3 Stabilité et endomorphisme induit . . . . .	368
23.3.1 Endomorphisme induit sur un sous-espace stable . . . . .	368
23.3.2 Commutant d'un endomorphisme . . . . .	369
23.3.3 Caractérisation matricielle de la stabilité . . . . .	369
23.3.4 Recherche des droites et des hyperplans stables par $f$ . . . . .	370
23.3.5 Sous-espaces stables dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel . . . . .	371
23.4 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice . . . . .	372
23.4.1 Introduction . . . . .	372
23.4.2 Les algèbres $\mathbb{K}[f]$ et $\mathbb{K}[M]$ . . . . .	372
23.4.3 Effet sur les valeurs propres . . . . .	373
23.5 Polynômes annulateurs, polynôme minimal . . . . .	374
23.5.1 L'idéal des polynômes annulateurs d'un endomorphisme . . . . .	374
23.5.2 L'idéal des polynômes annulateurs d'une matrice . . . . .	376
23.5.3 Polynôme annulateur et valeurs propres . . . . .	377
23.6 Théorème de décomposition des noyaux . . . . .	379
23.6.1 Rappels sur les projecteurs et symétries . . . . .	379
23.6.2 En somme directe . . . . .	380
23.6.3 Applications . . . . .	380
23.7 Quelques exemples . . . . .	381
<b>24 Réduction des matrices et des endomorphismes</b>	<b>383</b>
24.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables . . . . .	383
24.2 Endomorphismes et matrices trigonalisables . . . . .	384
24.3 Polynôme caractéristique . . . . .	385
24.3.1 Définitions . . . . .	385
24.3.2 Calcul du polynôme caractéristique . . . . .	385
24.3.3 Ordre de multiplicité d'une valeur propre . . . . .	386
24.3.4 Polynôme caractéristique et endomorphisme induit . . . . .	387
24.4 Théorème de <i>Cayley-Hamilton</i> . . . . .	388
24.5 Les critères usuels de diagonalisabilité . . . . .	390

24.5.1	Diagonalisation des endomorphismes . . . . .	390
24.5.2	Endomorphisme induit par $f$ , polynôme en $f$ . . . . .	392
24.5.3	Diagonalisation des matrices . . . . .	393
24.6	Les critères usuels de trigonalisabilité . . . . .	395
24.6.1	Trigonalisation des endomorphismes . . . . .	395
24.6.2	Trigonalisation des matrices . . . . .	396
24.7	Endomorphismes et matrices nilpotents . . . . .	397
24.7.1	Généralités . . . . .	397
24.7.2	Trigonalisation spécifique d'un endomorphisme nilpotent . . . . .	398
24.8	Endomorphismes à polynôme annulateur scindé . . . . .	398
24.8.1	Polynôme annulateur scindé . . . . .	398
24.8.2	Sous-espaces caractéristiques . . . . .	399
24.8.3	Décomposition de $E$ en sous-espaces stables par $u$ . . . . .	399
<b>25</b>	<b>Prolongements sur la réduction</b> . . . . .	<b>403</b>
25.1	Décomposition spectrale, cas diagonalisable . . . . .	403
25.1.1	Point de vue matriciel . . . . .	403
25.1.2	Point de vue de l'endomorphisme . . . . .	404
25.2	Puissances d'une matrice . . . . .	404
25.2.1	Evolution d'une population . . . . .	404
25.2.2	Divers procédés de calcul de $A^m$ . . . . .	405
25.2.3	Applications à un exemple . . . . .	406
25.3	Diagonalisation simultanée . . . . .	406
25.4	Polynômes caractéristiques de $AB$ et $BA$ . . . . .	408
<b>26</b>	<b>Espaces préhilbertiens</b> . . . . .	<b>409</b>
26.1	Structure préhilbertienne . . . . .	409
26.1.1	Produit scalaire et espace préhilbertien . . . . .	409
26.1.2	Orthogonalité et normalisation . . . . .	413
26.2	Bases orthonormales : existence et construction . . . . .	413
26.2.1	De l'utilité des bases orthonormales . . . . .	413
26.2.2	Le procédé de <i>Gram-Schmidt</i> . . . . .	414
26.2.3	Deux réalisations du procédé de <i>Gram-Schmidt</i> . . . . .	415
26.2.4	Applications du théorème de <i>Gram-Schmidt</i> . . . . .	416
26.2.5	Point d'attention : la dimension finie . . . . .	418
26.3	Matrices orthogonales . . . . .	419
26.3.1	Propriété matricielle . . . . .	419
26.3.2	Groupe orthogonal . . . . .	419
26.3.3	Produit mixte, produit vectoriel . . . . .	420
26.4	Le théorème de projection orthogonale . . . . .	421
26.4.1	Orthogonal par rapport à $\phi$ d'un sous-ensemble de $E$ . . . . .	421
26.4.2	Existence et unicité de la projection orthogonale . . . . .	422
26.4.3	Conséquences structurelles . . . . .	422
26.4.4	Applications . . . . .	423
26.5	Suite orthonormale totale de vecteurs . . . . .	428
26.6	Représentation d'une forme linéaire, gradient . . . . .	429
26.7	Endomorphismes remarquables d'un euclidien . . . . .	429
26.8	Détermination d'un minimum par projection . . . . .	430

<b>27</b>	<b>Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien</b>	<b>431</b>
27.1	Endomorphismes symétriques . . . . .	431
27.1.1	Définition générale . . . . .	431
27.1.2	Caractérisation matricielle . . . . .	432
27.2	Les projecteurs orthogonaux . . . . .	433
27.2.1	Ils sont symétriques . . . . .	433
27.2.2	Matriciellement . . . . .	433
27.3	Réduction des endomorphismes symétriques . . . . .	434
27.3.1	Spectre d'une matrice symétrique et réelle . . . . .	434
27.3.2	Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable . . . . .	435
27.3.3	Diagonalisabilité . . . . .	435
27.3.4	Réduction d'une matrice symétrique et réelle . . . . .	436
27.4	Applications, exemples et exercices . . . . .	437
27.4.1	Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif . . . . .	437
27.4.2	Exercices plus délicats . . . . .	437
<b>28</b>	<b>Isométries vectorielles d'un espace euclidien</b>	<b>439</b>
28.1	Isométrie vectorielle, endomorphisme orthogonal . . . . .	439
28.1.1	Conserver les longueurs . . . . .	439
28.1.2	Le groupe orthogonal . . . . .	440
28.2	Réduction des isométries vectorielles . . . . .	442
28.2.1	Les isométries diagonalisables . . . . .	442
28.2.2	Réduction d'une isométrie d'un euclidien . . . . .	443
28.3	Etudes de $O(1)$ et $O(2)$ . . . . .	445
28.3.1	Cas de $O(1)$ . . . . .	445
28.3.2	Cas de $O(2)$ . . . . .	445
28.4	Etude de $O(3)$ . . . . .	446
28.4.1	Résultats structurels sur $O(3)$ . . . . .	446
28.4.2	Récapitulatif pour $O(3)$ . . . . .	447
28.4.3	Cas des rotations de $\mathbb{R}^3$ euclidien . . . . .	448
28.4.4	Exemples d'études dans $O(3)$ , puis $O(4)$ . . . . .	449
<b>29</b>	<b>Intégration sur un intervalle</b>	<b>455</b>
29.1	Sur un intervalle $[a, \infty[$ . . . . .	455
29.1.1	Convergence et intégrale sur $[a, \infty[$ . . . . .	455
29.1.2	Intégrabilité et convergence sur $[a, \infty[$ . . . . .	457
29.2	Fonctions positives sur $[a, \infty[$ . . . . .	458
29.2.1	Caractérisations de la convergence . . . . .	458
29.2.2	Fonctions de références, dites de <i>Riemann</i> , sur $[a, \infty[$ . . . . .	459
29.2.3	Comparaisons entre fonctions positives sur $[a, \infty[$ . . . . .	460
29.2.4	Théorèmes de comparaison sur $[a, \infty[$ . . . . .	461
29.2.5	Intégrabilité et limite en $\infty$ . . . . .	462
29.3	Intégrale sur un intervalle quelconque . . . . .	463
29.3.1	Adaptations sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ , avec $a$ et $b$ réels . . . . .	463
29.3.2	Fonctions de références, sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ . . . . .	464
29.3.3	Adaptations sur $I = ]a, b[$ , où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . . . . .	465
29.4	Méthodes de calculs d'intégrales . . . . .	466
29.4.1	Décompositions . . . . .	466
29.4.2	Changement de variable sur $]a, b[$ . . . . .	467
29.4.3	Intégration par partie sur $]a, b[$ . . . . .	469

29.5	Intégration des relations de comparaison . . . . .	471
29.6	Quelques exemples supplémentaires . . . . .	472
29.6.1	Intégrale de <i>Dirichlet</i> . . . . .	472
<b>30</b>	<b>Séries numériques à termes réels ou complexes</b>	<b>477</b>
30.1	Suites et séries . . . . .	477
30.1.1	Les séries sont des suites . . . . .	477
30.1.2	Les suites sont des séries . . . . .	478
30.1.3	Convergence et intégrabilité . . . . .	478
30.2	Les séries incontournables . . . . .	479
30.2.1	Série géométrique . . . . .	479
30.2.2	Série harmonique . . . . .	479
30.2.3	Série exponentielle . . . . .	479
30.3	Les idées fondamentales . . . . .	480
30.3.1	Croissance pour une série de réels positifs . . . . .	480
30.3.2	Conséquences du théorème de majoration . . . . .	480
30.3.3	Comparaison avec le comportement d'une intégrale . . . . .	481
30.3.4	Condition nécessaire de convergence . . . . .	482
30.3.5	Séries de <i>Riemann</i> . . . . .	482
30.4	Quelques opérations sur les séries . . . . .	483
30.4.1	Quelques résultats immédiats . . . . .	483
30.4.2	Absolute convergence . . . . .	483
30.4.3	Séries de complexes . . . . .	484
30.5	Savoir-faire fondamentaux . . . . .	484
30.5.1	Séries alternées . . . . .	484
30.5.2	Développements asymptotiques . . . . .	486
30.5.3	Comparaison logarithmique, critère de <i>d'Alembert</i> . . . . .	486
30.6	Evaluation de la vitesse de convergence . . . . .	487
30.6.1	Vitesse de convergence ou de divergence . . . . .	487
30.6.2	Evaluation du comportement à l'aide d'intégrales . . . . .	487
30.6.3	Evaluation du comportement par équivalence . . . . .	491
30.6.4	Comportement de $n!$ quand $n \rightarrow \infty$ , formule de <i>Stirling</i> . . . . .	492
30.7	Plan d'étude et exemples . . . . .	493
<b>31</b>	<b>Familles sommables</b>	<b>499</b>
31.1	Cas des familles de réels positifs . . . . .	499
31.2	Cas des familles de réels et de complexes . . . . .	503
31.3	Cas de $I = \mathbb{N}$ , suites sommables . . . . .	505
31.4	Cas de $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , suites doubles . . . . .	506
31.4.1	Sommer une suite double . . . . .	506
31.4.2	Cas des suites doubles à termes réels positifs . . . . .	508
31.4.3	Cas des suites doubles à termes complexes . . . . .	509
31.4.4	Cas d'une suite double « produit » . . . . .	510
31.5	Produit de <i>Cauchy</i> de deux séries . . . . .	510
<b>32</b>	<b>Suites de fonctions</b>	<b>513</b>
32.1	Convergence simple d'une suite de fonctions . . . . .	513
32.2	Convergence uniforme d'une suite de fonctions . . . . .	515
32.2.1	Définitions . . . . .	515
32.2.2	Etudes de convergences uniformes sur $A$ . . . . .	515

32.2.3	Convergence uniforme et continuité . . . . .	517
32.2.4	Théorème de la double limite . . . . .	518
32.2.5	Convergence uniforme et intégration . . . . .	520
32.2.6	Convergence uniforme et dérivation . . . . .	520
32.2.7	Convergence uniforme et intégrabilité . . . . .	522
32.2.8	Cas délicats, sources de réflexion . . . . .	522
<b>33</b>	<b>Séries de fonctions</b>	<b>527</b>
33.1	Convergences simple et uniforme . . . . .	527
33.1.1	Définitions . . . . .	527
33.1.2	Théorèmes de continuité, primitivation et intégration . . . . .	528
33.1.3	Dériver la somme d'une série de fonctions . . . . .	529
33.2	Convergence normale d'une série de fonctions . . . . .	529
33.2.1	Définition et efficacité . . . . .	529
33.2.2	Récapitulatif . . . . .	530
33.2.3	Exemple d'une convergence uniforme, non normale . . . . .	530
33.3	Etude de la fonction zéta de <i>Riemann</i> . . . . .	531
33.4	Etude des séries trigonométriques . . . . .	532
33.4.1	Polynômes trigonométriques . . . . .	532
33.4.2	Quelques intégrales utiles . . . . .	533
33.4.3	Deux présentations . . . . .	533
33.4.4	Diverses qualités de convergence . . . . .	534
33.4.5	Quelques exemples . . . . .	535
<b>34</b>	<b>Approximations uniformes par des fonctions spécifiques</b>	<b>537</b>
34.1	Norme de la convergence uniforme . . . . .	537
34.1.1	Norme de la convergence uniforme . . . . .	537
34.1.2	Fonctions continues . . . . .	538
34.2	Quelques fonctions spécifiques . . . . .	538
34.2.1	Associées à une subdivision du segment $[a, b]$ . . . . .	538
34.2.2	Sur un intervalle . . . . .	541
34.3	Approximations par des fonctions en escalier . . . . .	541
34.3.1	Théorème d'approximation, fonctions en escalier . . . . .	542
34.3.2	Des développements hors programme . . . . .	542
34.4	Approximation par des polynômes . . . . .	544
<b>35</b>	<b>Séries entières de variable réelle ou complexe</b>	<b>547</b>
35.1	Des séries de fonctions monômes . . . . .	547
35.2	Propriétés fondamentales . . . . .	547
35.2.1	Un lemme d' <i>Abel</i> . . . . .	547
35.2.2	Disque de convergence . . . . .	548
35.2.3	Deux prototypes . . . . .	549
35.2.4	Continuité de la somme totale . . . . .	549
35.2.5	Intégration et primitivation sur $[0, x]$ . . . . .	550
35.2.6	La somme totale est $C^\infty$ sur $] -R, R[$ . . . . .	551
35.3	Détermination du rayon de convergence . . . . .	552
35.3.1	Avec le critère de <i>d'Alembert</i> . . . . .	552
35.3.2	Un cas fréquent, conséquence de ce critère . . . . .	553
35.3.3	Comparaisons de rayons de convergence . . . . .	553
35.3.4	Quelques exemples . . . . .	553

35.4	Opérations algébriques sur les séries entières . . . . .	554
35.4.1	Combinaison linéaire . . . . .	554
35.4.2	Produit de deux séries entières . . . . .	555
35.5	Développements et sommations . . . . .	556
35.5.1	Introduction . . . . .	556
35.5.2	Développement . . . . .	556
35.5.3	Développements usuels . . . . .	558
35.5.4	Sommations de séries entières . . . . .	559
35.5.5	Questions de parité et imparité . . . . .	561
35.6	Applications aux équations différentielles . . . . .	561
35.6.1	Le prototype $(1+x)^\alpha$ . . . . .	561
35.6.2	Plan usuel . . . . .	563
35.6.3	Un autre exemple développé . . . . .	563
35.7	Compléments . . . . .	564
35.7.1	Théorème du zéro isolé . . . . .	564
35.7.2	Développements des fractions rationnelles . . . . .	565
35.8	L'exponentielle $z \mapsto \exp(z)$ , $z \in \mathbb{C}$ . . . . .	566
35.8.1	$\exp$ est un morphisme . . . . .	566
35.8.2	Propriétés de l'exponentielle . . . . .	566
35.8.3	Fonctions trigonométriques . . . . .	568
35.8.4	Résolutions d'équations . . . . .	568
35.9	Quelques illustrations et un problème . . . . .	570
35.9.1	Convergence des polynômes de <i>Taylor</i> de $\sin$ . . . . .	570
35.9.2	Des séries entières et des équations différentielles . . . . .	570
<b>36</b>	<b>Suites et séries d'intégrales</b> . . . . .	<b>573</b>
36.1	Suite d'intégrales . . . . .	573
36.1.1	Interversion de symboles . . . . .	573
36.1.2	Rappel : convergence uniforme sur un segment . . . . .	574
36.1.3	Convergence dominée sur un intervalle $I$ . . . . .	574
36.1.4	Exemples . . . . .	574
36.2	Série d'intégrales . . . . .	577
36.2.1	Intégration terme à terme . . . . .	577
36.2.2	Convergence uniforme sur un segment . . . . .	577
36.2.3	Intégration terme à terme sur un intervalle . . . . .	577
36.2.4	De multiples exemples . . . . .	578
36.2.5	D'autres possibilités que ces deux théorèmes . . . . .	581
<b>37</b>	<b>Intégrales à paramètres</b> . . . . .	<b>583</b>
37.1	Théorèmes sous domination . . . . .	583
37.1.1	Passage à la limite sous l'intégrale . . . . .	583
37.1.2	Théorèmes de continuité . . . . .	584
37.1.3	Théorème de dérivation de <i>Leibniz</i> . . . . .	585
37.1.4	Dérivations successives . . . . .	587
37.2	La fonction $\Gamma$ d' <i>Euler</i> . . . . .	589
37.3	Applications et exemples développés . . . . .	591

<b>38</b>	<b>Equations différentielles linéaires (vectorielles)</b>	<b>599</b>
38.1	Introduction aux EDL vectorielles du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	599
38.1.1	Equation, solutions et problème de <i>Cauchy</i> . . . . .	599
38.1.2	Présentation matricielle d'une EDL . . . . .	600
38.1.3	Utilisation d'une base et changement de base . . . . .	600
38.1.4	Equation homogène et superposition des solutions . . . . .	602
38.2	Théorème de <i>Cauchy</i> linéaire . . . . .	603
38.2.1	Mise sous forme intégrale du problème de <i>Cauchy</i> . . . . .	603
38.2.2	Construction et unicité d'une solution . . . . .	603
38.2.3	Dimension de $\text{Sol}(E)$ . . . . .	605
38.3	Les équations différentielles d'ordre $n$ , cas général . . . . .	605
38.3.1	Système différentiel associé . . . . .	605
38.3.2	Développements structurels . . . . .	606
38.4	Système fondamental de solutions d'un système . . . . .	606
38.4.1	Base de $\text{Sol}(s)$ . . . . .	606
38.4.2	Matrice fondamentale, solution générale de $(s)$ . . . . .	607
38.4.3	Méthode de <i>Lagrange</i> , de variations des constantes . . . . .	608
38.4.4	Système différentiels à coefficients constants . . . . .	609
38.5	Exemples de systèmes à coefficients non constants . . . . .	609
38.6	Equations linéaires scalaires d'ordre 2 . . . . .	612
38.6.1	Introduction aux équations d'ordre 2 . . . . .	612
38.6.2	Résultats fondamentaux . . . . .	612
38.6.3	Méthodes de résolution . . . . .	613
38.6.4	Premiers exemples d'EDL2 . . . . .	614
38.7	Visualisation des trajectoires des solutions . . . . .	617
38.8	EDL d'ordre $n \geq 2$ : premiers développements . . . . .	619
38.8.1	Une EDL3 et un système associé . . . . .	619
38.8.2	Changement de variable dans une EDL . . . . .	619
<b>39</b>	<b>Séries de vecteurs, de matrices</b>	<b>621</b>
39.1	Généralités . . . . .	621
39.1.1	Convergence et divergence . . . . .	621
39.1.2	Utilisation d'une base de $E$ . . . . .	622
39.1.3	Absolue convergence . . . . .	622
39.2	Série géométrique et série exponentielle . . . . .	623
39.2.1	Série géométrique . . . . .	623
39.2.2	Série exponentielle . . . . .	624
39.3	Normes sur les espaces de matrices . . . . .	625
39.3.1	Panorama de diverses normes . . . . .	625
39.3.2	Normes sous-multiplicatives . . . . .	626
39.3.3	Normes subordonnées ou induites . . . . .	627
39.4	Produit de <i>Cauchy</i> de deux séries . . . . .	628
39.5	Etude de l'exponentielle de matrices . . . . .	629
39.5.1	Séries entières et séries de matrices . . . . .	629
39.5.2	Calculs de l'exponentielle de certaines matrices . . . . .	629
39.5.3	Propriétés de l'exponentielle des matrices . . . . .	630
39.6	Quelques exemples développés . . . . .	633



<b>40</b>	<b>Systèmes différentiels à coefficients constants</b>	<b>637</b>
40.1	Un chapitre de synthèse . . . . .	637
40.1.1	Rappels sur les systèmes différentiels et l'exponentielle . . . . .	637
40.1.2	La solution au problème de <i>Cauchy</i> . . . . .	638
40.1.3	D'autres démonstrations de propriétés déjà assurées . . . . .	639
40.2	Réduction de la matrice du système . . . . .	640
40.2.1	Changement de fonction inconnue . . . . .	640
40.2.2	Système sans second membre, $A$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$ . . . . .	640
40.2.3	Système avec second membre, $A$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$ . . . . .	642
40.2.4	Si $A$ trigonalisable dans $\mathbb{K}$ . . . . .	643
40.3	Comparaison de diverses méthodes . . . . .	644
<b>41</b>	<b>Fonctions différentiables, dérivées partielles</b>	<b>649</b>
41.1	Différentielles, fonctions différentiables . . . . .	649
41.2	Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles . . . . .	650
41.2.1	Dérivée selon un vecteur . . . . .	650
41.2.2	Dérivées partielles . . . . .	651
41.3	Selon les dimensions de $E$ et $F$ . . . . .	653
41.3.1	Fonction numérique à une variable : $n = p = 1$ . . . . .	653
41.3.2	Fonction vectorielle à une variable : $n = 1, p \geq 2$ . . . . .	653
41.3.3	Fonction numérique à plusieurs variables : $n \geq 2, p = 1$ . . . . .	653
41.3.4	Fonction vectorielle à plusieurs variables : $n \geq 2, p \geq 2$ . . . . .	654
41.3.5	Exemples de calcul de dérivées partielles . . . . .	655
41.4	Opérations sur les applications différentiables . . . . .	658
41.4.1	Combinaison linéaire, bilinéarité et produits . . . . .	658
41.4.2	Composition d'applications différentiables . . . . .	659
41.4.3	Dérivée le long d'un arc . . . . .	660
<b>42</b>	<b>Fonctions de classe <math>C^k</math>, <math>k \geq 1</math></b>	<b>661</b>
42.1	Fonctions de classe $C^1$ sur $U$ . . . . .	661
42.1.1	Utilisation des arcs . . . . .	663
42.1.2	Exemples . . . . .	664
42.2	Interprétations géométriques . . . . .	666
42.2.1	Surface et plan tangent . . . . .	666
42.2.2	Récapitulatif géométrique pour $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ . . . . .	667
42.3	Fonctions de classe $C^k$ sur $U$ , $k \geq 1$ . . . . .	668
42.4	Opérations sur les applications de classe $C^k$ . . . . .	670
42.4.1	Opérations algébriques sur les applications de classe $C^k$ . . . . .	670
42.4.2	Composition d'applications de classe $C^k$ . . . . .	670
<b>43</b>	<b>Applications du calcul différentiel</b>	<b>673</b>
43.1	Vecteurs tangents à une partie $X$ de $E$ . . . . .	673
43.1.1	Vecteurs tangents en un point $a$ . . . . .	673
43.1.2	Cas du graphe d'une fonction différentiable . . . . .	674
43.1.3	Cas d'une ligne de niveau d'une fonction $f$ . . . . .	674
43.1.4	Interprétation du gradient d'une fonction numérique . . . . .	675
43.1.5	Exemples plus inhabituels . . . . .	676
43.2	Recherche d'extremums d'une fonction numérique . . . . .	677
43.2.1	Les points critiques . . . . .	677
43.2.2	Extremum sur un ouvert ou sur un compact . . . . .	679

43.2.3	Applications à d'autres études . . . . .	680
43.3	Equations aux dérivées partielles . . . . .	681
43.3.1	Introduction aux équations aux dérivées partielles . . . . .	681
43.3.2	Les équations aux dérivées partielles de base . . . . .	682
43.3.3	Résolution par changement de variables . . . . .	683
43.3.4	Recherche de solutions particulières d'un certain type . . . . .	686
43.3.5	Séparation des variables . . . . .	687
<b>44</b>	<b>Espaces probabilisés</b>	<b>689</b>
44.1	Tribu sur un ensemble $\Omega$ , événement . . . . .	689
44.2	Probabilité - Espace probabilisé . . . . .	690
44.3	Probabilité conditionnelle . . . . .	692
44.3.1	Définition . . . . .	692
44.3.2	Exemples . . . . .	692
44.3.3	Formule des probabilités totales . . . . .	693
44.4	Exemples d'application . . . . .	694
44.5	Indépendance . . . . .	696
44.6	Exercices classiques de probabilité . . . . .	697
<b>45</b>	<b>Variables aléatoires discrètes</b>	<b>701</b>
45.1	Variable aléatoire discrète, loi de probabilité . . . . .	701
45.2	Les lois usuelles des variables aléatoires réelles . . . . .	702
45.3	Couple de variables aléatoires - Indépendance . . . . .	704
45.4	Fonctions des variables d'un couple de v. a. i. . . . .	706
45.5	Espérance . . . . .	707
45.6	Variance - Ecart type - Covariance . . . . .	711
45.6.1	Moments d'ordre $r$ . . . . .	711
45.6.2	Pour les lois classiques . . . . .	712
45.6.3	Pour une loi produit . . . . .	714
45.6.4	Covariance . . . . .	715
45.7	La loi des grands nombres . . . . .	716
45.8	Fonctions génératrices . . . . .	717
45.9	Divers exemples développés . . . . .	719
<b>III</b>	<b>« Des cerises sur le gâteau »</b>	
	<b>Des enrichissements hors programme MP</b>	<b>727</b>
<b>A</b>	<b>Les surprises et difficultés de la dimension infinie</b>	<b>729</b>
A.1	Algèbre linéaire . . . . .	729
A.1.1	Injectivité, surjectivité et bijectivité . . . . .	729
A.1.2	Valeurs propres et valeurs spectrales . . . . .	730
A.2	Espace préhilbertiens . . . . .	730
A.2.1	Représentation des formes linéaires . . . . .	730
A.2.2	Existence de l'adjoint . . . . .	731
A.2.3	Orthogonal d'un sous-espace de dimension infinie . . . . .	731
A.3	Topologie des espaces vectoriels normés . . . . .	732
A.3.1	Non-équivalence des normes . . . . .	732
A.3.2	Fermé-borné non compact . . . . .	733
A.3.3	Espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ , non complet . . . . .	733

A.3.4	Théorème de <i>Riesz</i> . . . . .	733
A.3.5	Applications linéaires et non continues . . . . .	734
<b>B</b>	<b>Espace complet et suite de <i>Cauchy</i></b> . . . . .	<b>735</b>
B.1	Suite de <i>Cauchy</i> et espace complet . . . . .	735
B.1.1	Suite de <i>Cauchy</i> . . . . .	735
B.1.2	Espace complet . . . . .	736
B.1.3	Partie complète . . . . .	737
B.2	Spécificités des espaces complets . . . . .	738
B.2.1	Critère de <i>Cauchy</i> et convergence absolue . . . . .	738
B.2.2	$\mathcal{B}(A, F)$ est complet . . . . .	738
B.2.3	Théorème du point fixe, pour $E$ complet . . . . .	739
B.2.4	Un espace de dimension infinie non complet . . . . .	740
<b>C</b>	<b>Espaces topologiques et parties compactes</b> . . . . .	<b>741</b>
C.1	Valeurs d'adhérence d'une suite . . . . .	741
C.2	Espaces topologiques . . . . .	742
C.3	Compacité . . . . .	743
C.3.1	Définition de compacité de <i>Bolzano-Weierstrass</i> . . . . .	743
C.3.2	Définition de compacité de <i>Borel-Lebesgue</i> . . . . .	744
<b>D</b>	<b>Développements sur les séries numériques, les séries entières</b> . . . . .	<b>745</b>
D.1	Etude des séries de <i>Bertrand</i> . . . . .	745
D.2	Règle de <i>Raabe-Duhamel</i> . . . . .	746
D.3	Transformation d' <i>Abel</i> . . . . .	747
D.4	Arrangement linéaire d'une série double . . . . .	749
D.5	Un théorème de <i>Tauber</i> sur les séries entières . . . . .	751
D.6	Deux théorèmes d' <i>Abel</i> pour les séries entières . . . . .	752
D.7	Séries de fonctions et familles sommables . . . . .	753
<b>E</b>	<b>Compléments et applications de la réduction</b> . . . . .	<b>755</b>
E.1	Théorème d' <i>Hadamard</i> , disques de <i>Gerschgorin</i> . . . . .	755
E.2	Racine $n^{\text{ième}}$ d'une matrice . . . . .	756
E.3	Polynôme et matrices compagnons . . . . .	757
E.4	Matrices de rang 1 diagonalisables . . . . .	758
E.5	Diagonalisation d'une matrice circulante . . . . .	759
E.6	Réduction de matrices définies par blocs . . . . .	760
E.7	Démonstrations du théorème de <i>Cayley-Hamilton</i> . . . . .	761
E.8	Commutant et décomposition de <i>Dunford</i> . . . . .	763
<b>F</b>	<b>Endomorphismes antisymétriques d'un euclidien</b> . . . . .	<b>765</b>
F.1	Cas général . . . . .	765
F.2	Cas de la dimension 3 . . . . .	766
<b>G</b>	<b>Polynômes orthogonaux</b> . . . . .	<b>767</b>
G.1	Des produits scalaires dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$ . . . . .	767
G.2	Propriétés communes . . . . .	769

<b>H</b>	<b>Approfondissements sur les équations différentielles</b>	<b>771</b>
H.1	Compléments sur les EDL2 . . . . .	771
H.1.1	Changement de variable, équations d' <i>Euler</i> . . . . .	771
H.1.2	Changement de fonction inconnue dans une EDL2 . . . . .	773
H.2	Equations et systèmes différentiels non linéaires . . . . .	776
H.2.1	Equations différentielles . . . . .	776
H.2.2	Système différentiel . . . . .	776
H.2.3	Interprétations . . . . .	776
H.3	Equations d'ordre 1 . . . . .	777
H.3.1	Existence et unicité locale . . . . .	777
H.3.2	Théorème de prolongement d'une solution . . . . .	778
H.3.3	Théorème de <i>Cauchy-Lipschitz</i> . . . . .	778
H.3.4	Comparaison linéaire-non linéaire . . . . .	779
H.3.5	Propriétés analytiques des solutions . . . . .	780
H.4	Equations à variables séparables . . . . .	781
H.4.1	Présentation . . . . .	781
H.4.2	Résolution dans le cas général . . . . .	783
H.4.3	Remarques fondamentales . . . . .	784
H.5	Equations autonomes . . . . .	784
H.6	Systèmes autonomes . . . . .	786
H.6.1	Invariance par translation . . . . .	786
H.6.2	Un plan d'étude des systèmes autonomes . . . . .	786
H.6.3	Notions sur les intégrales premières . . . . .	787
H.6.4	Equation autonome d'ordre 2 . . . . .	787
H.6.5	Le système de <i>Volterra</i> . . . . .	788
H.7	Etudes qualitatives . . . . .	789
H.7.1	Etude qualitative des solutions . . . . .	789
H.7.2	Symétries de l'ensemble des courbes intégrales . . . . .	789
H.8	Introduction à l'analyse numérique des ED . . . . .	791
H.8.1	Méthode d' <i>Euler</i> . . . . .	791
H.8.2	Méthode de <i>Runge-Kutta</i> d'ordre 4 . . . . .	792
<b>I</b>	<b>Transformées de <i>Laplace</i>, de <i>Fourier</i> et intégrales à paramètres</b>	<b>793</b>
I.1	Transformation de <i>Laplace</i> . . . . .	793
I.1.1	Définition et propriétés élémentaires . . . . .	793
I.1.2	Perspectives d'utilisation . . . . .	794
I.2	Transformation de <i>Fourier</i> . . . . .	796
I.2.1	Définition et propriétés élémentaires . . . . .	796
I.2.2	Transformée de <i>Fourier</i> d'un produit de convolution . . . . .	798
I.3	Continuité, dérivabilité : intégrales à paramètres . . . . .	800
I.3.1	Développements sur la continuité . . . . .	800
I.3.2	Complément sur la dérivabilité . . . . .	801
I.4	Intégration d'intégrale à paramètre . . . . .	801
I.5	D'autres exemples plus profonds . . . . .	805
<b>J</b>	<b>Systèmes de coordonnées</b>	<b>809</b>
J.1	Coordonnées polaires . . . . .	809
J.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	809
J.3	Coordonnées sphériques . . . . .	810

<b>K Courbes, arcs et surfaces</b>	<b>811</b>
K.1 Courbes de niveau : les fonctions implicites . . . . .	811
K.1.1 Fonctions implicites à deux ou trois variables . . . . .	811
K.1.2 Etudes locales de courbes ou surfaces . . . . .	813
K.1.3 Equation différentielle et fonction implicite . . . . .	815
K.2 Arcs paramétrés plans . . . . .	816
K.2.1 Rappels . . . . .	816
K.2.2 Allures en un point stationnaire . . . . .	817
K.2.3 Etude des branches infinies . . . . .	818
K.3 Un arc non rectifiable . . . . .	823
K.4 Introduction au plan osculateur . . . . .	824
K.5 Courbes planes ou portées par une surface . . . . .	825
K.6 Quelques jolies courbes . . . . .	827
<b>L Les intégrales multiples</b>	<b>831</b>
L.1 Questions de mesures . . . . .	831
L.1.1 Ensembles mesurables . . . . .	831
L.1.2 Intégrale double sur un compact mesurable . . . . .	832
L.1.3 Ensembles négligeables . . . . .	833
L.2 Intégrale double sur un produit de segments . . . . .	833
L.3 Intégrale double sur une partie élémentaire . . . . .	834
L.3.1 Inégrale sur une partie élémentaire . . . . .	834
L.3.2 Intégrale double et volume . . . . .	835
L.3.3 Intégrale sur une partie simple . . . . .	835
L.4 Propriétés et calculs des intégrales doubles . . . . .	835
L.4.1 Propriétés immédiates . . . . .	836
L.4.2 Changement de variables . . . . .	837
L.4.3 Théorème de <i>Green-Riemann</i> . . . . .	838
L.4.4 Application aux calculs d'aires . . . . .	839
L.4.5 Deux exemples plus longs à traiter . . . . .	839
L.5 Intégrales triples . . . . .	842
L.5.1 Dans l'espace de dimension 3 . . . . .	842
L.5.2 Calculs d'intégrales triples . . . . .	843
<b>M Développements en arithmétique et en algèbre</b>	<b>845</b>
M.1 Applications au codage et à la cryptographie . . . . .	845
M.1.1 Calculs arithmétiques . . . . .	845
M.1.2 Exemples d'applications : R.I.B., codes de <i>Hamming</i> . . . . .	846
M.2 Codage R.S.A. . . . .	847
M.3 Polynômes d'un élément d'une algèbre (unitaire) . . . . .	849
M.3.1 Sous-algèbre engendrée par un élément . . . . .	849
M.3.2 Polynômes annulateurs, polynôme minimal de $a$ . . . . .	849
M.3.3 Cas d'une algèbre intègre . . . . .	851
M.4 Corps finis . . . . .	852
<b>N Géométrie euclidienne</b>	<b>853</b>
N.1 Distances entre objets . . . . .	853
N.1.1 Projections orthogonales . . . . .	853
N.1.2 Distances à des sous-espaces affines . . . . .	854
N.2 Mesure des angles . . . . .	857

N.2.1	Dans un espace préhilbertien réel . . . . .	857
N.2.2	Dans le plan orienté . . . . .	857
N.2.3	Dans l'espace $\mathcal{E}_3$ . . . . .	858
N.3	Triangle dans le plan . . . . .	858
N.4	Cercle et sphère . . . . .	859
N.4.1	Cercle dans le plan . . . . .	859
N.4.2	Sphère dans l'espace . . . . .	861
N.4.3	Cercle dans l'espace . . . . .	862
N.4.4	Lignes de niveau dans le plan . . . . .	863
<b>O</b>	<b>Les coniques, point de vue focal</b>	<b>865</b>
O.1	Définition focale des coniques . . . . .	865
O.1.1	Foyer, directrice et excentricité . . . . .	865
O.1.2	Coniques à centre . . . . .	866
O.1.3	Parabole . . . . .	870
O.2	Diverses constructions géométriques . . . . .	870
O.3	Sections du cône de révolution . . . . .	872
O.4	Courbes planes du deuxième degré . . . . .	872
<b>Index</b>		<b>873</b>