Toute l'analyse de la Licence

Jean-Pierre Escofier

Toute l'analyse de la Licence

2e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Guillem@Adobe Stock.com

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-081169-4

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 7 • Fonctions dérivables

Chapitre 8 • Suites récurrentes

Chapitre 9 • Logarithme et exponentielle

Chapitre 16 • Séries entières

Chapitre 17 • Séries de Fourier

Avant-propos

En mémoire de Jos Pennec (1944-2011), Pascal Quinton (1952-2013). et de Michel Viallard (1940-2019).

Pour J., C., C. et É., J.

Ce livre a été rédigé pour être vraiment accessible aux étudiants et étudiantes de licence de mathématiques. Il est aussi destiné aux étudiants et étudiantes de CAPES ou d'agrégation de mathématiques. Enfin, j'ai aussi pensé en l'écrivant aux enseignants et enseignantes de mathématiques actuels du secondaire et à tous ceux et celles qui ont fait un jour des mathématiques et ont envie de les revoir avec un éclairage historique qui permette de mieux les intégrer dans leurs connaissances.

Le livre a son plan, ses exigences propres et il comporte des passages nettement plus difficiles que d'autres. Les mathématiques ne sont pas faites que de généralités faciles, même si nos devanciers ont travaillé pour nous rendre les choses plus simples et mieux organisées. Les lecteurs et lectrices sauront reconnaître les passages et les exercices plus difficiles et les laisser de côté, pour une seconde lecture peut-être.

Le sujet de ce livre, la partie des mathématiques appelée « analyse », a commencé à être vraiment exploré au XVII^{e} siècle. Son objet est d'abord l'étude des fonctions numériques (les fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels ou l'ensemble des nombres complexes et à valeur dans ces ensembles). Une grande partie de l'analyse est consacrée aux méthodes pour trouver des fonctions vérifiant des propriétés données comme être solution d'équations fonctionnelles, d'équations différentielles (ED) ou d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Pour développer l'analyse, il faut commencer par construire rigoureusement les réels, ce qu'une approche géométrique héritée des Grecs ne permettait pas. Il faut définir et étudier les fonctions continues, les fonctions dérivables, construire des intégrales. Comme les ED et EDP ne se résolvent que très rarement avec les fonctions dont on dispose, il faut aussi développer des méthodes d'analyse numérique, savoir approcher une fonction, utiliser des inégalités, construire des suites et des séries…

Dans ce livre, vous trouverez des résultats du XIX^{e} siècle, du début du XX^{e} siècle et parfois plus récents, qui sont à la base des résultats actuels. Ils sont décrits dans le langage mis au point autour des années 1950.

Les exercices du livre poursuivent différents objectifs : les uns sont des applications immédiates du cours, avec des calculs faciles ; ils sont destinés à l'entraînement, à la mémorisation, à la compréhension des notions exposées. D'autres sont plus difficiles, voire beaucoup plus difficiles. Ceux-là sont destinés à vous faire voir différents aspects des applications et des prolongements des chapitres. Tous (sauf exception) sont corrigés en détail.

Le mathématicien est un aventurier, explorant des domaines de la pensée. Il aime raconter ses découvertes, mais son public est en général un peu restreint. L'auteur de manuels ne doit pas seulement présenter à ses lecteurs les techniques pour arriver à ces beaux résultats, pour leur permettre de comprendre et d'apprendre les mathématiques de la licence. Il doit aussi leur montrer comment toutes ces choses si ingénieuses et si belles se sont construites dans le temps, par quels chemins. Pour ma part, j'aime aussi connaître quelques histoires autour des mathématiciens qui ont fait ces découvertes. J'ai donc donné un certain nombre de repères historiques, tout en cherchant à ne pas reprendre ceux de mon petit livre *Petites histoires des mathématiques* (chez le même éditeur). J'espère que cela aidera un certain nombre d'entre vous pour comprendre, apprendre et aimer les mathématiques et *y* trouver de grandes sources de plaisir.

Les applications des mathématiques ont explosé ces dernières années. Les modèles mathématiques, par exemple, prennent de plus en plus d'importance en médecine, en biologie, en météorologie, etc. Ce n'est pas le sujet de ce livre de le raconter, mais j'espère vous préparer à le comprendre.

Jean-Pierre Escofier,
Betton-Rennes-Valette-La Brée, 2011-2013 ; Betton, mai 2020.

Remerciements

Je remercie Françoise Guimier pour avoir tout relu avec beaucoup de soin et Michel Viallard pour ses relectures et ses conseils sur les premiers états du texte. Leurs corrections et suggestions font que ce livre est aussi le leur. Merci également à Nicolas Macé et Michel Saez. Tout ce qui ne va pas, bien sûr, c'est de moi.

Mes remerciements vont aussi aux éditions Dunod, à Anne Bourguignon, Clémence Mocquet, Benjamin Peylet, Laetitia Hérin et Vanessa Beunèche pour leur confiance, leur écoute et leur gentillesse.

Je me suis permis de faire des renvois à mes livres précédents ; vous pouvez très bien les sauter (même s'ils apportent quelque chose à mes yeux).

Pour m'écrire : jean-pierre.escofier@univ-rennes1.fr

PRÉREQUIS À NE PAS OUBLIER

1

Les rappels qui suivent sont à la base de l'enseignement des mathématiques en licence ; tout(e) étudiant(e) devrait les connaître (ou savoir les retrouver rapidement) sans avoir recours à aucune note ni aucune calculatrice. Si vous ne les connaissez pas bien, retravaillez-les !

1.1 ALPHABET GREC

Les mathématicien(ne)s ont besoin, pour bien distinguer les différents objets qu'ils manipulent de notations variées. Des notations bien choisies, en harmonie avec ce qu'elles doivent représenter et avec les traditions, permettent des économies de pensée considérables.

L'alphabet latin, même en ajoutant aux majuscules et minuscules des primes ou des indices (f_n'', etc.), ne suffit pas. L'alphabet grec donne de nouvelles possibilités pour les lettres qui ne s'écrivent pas comme en français ; je rappelle l'écriture des minuscules (avec les majuscules correspondantes si elles se distinguent des nôtres) qui peuvent servir :

alpha : α, bêta : β, gamma : γ et Γ, delta : δ et Δ, epsilon : ϵ, zêta : ζ, êta : η, théta : θ et Θ, kappa : κ, lambda : λ et Λ, mu : μ, nu : ν, ksi : ξ et Ξ, pi : π et Π (avec une variante ϖ), rho : ρ, sigma : σ et Σ, tau : τ, phi : φ et ϕ, khi : χ, psi : ψ et Ψ, oméga : ω et Ω.

1.2 FORMULES D'ALGÈBRE

Les formules qui suivent valent pour des calculs où tout se passe comme pour les nombres réels (les éléments commutent, etc.).

1.2.1 Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

1.2.2 Sur les notations $\sum$ et $\prod$

Les notations $\sum$ et $\prod$ sont souvent utilisées pour écrire de manière ramassée des sommes et des produits. Étant donnés $n \geqslant 1$ éléments x_1, …, x_n (réels, complexes…) leur somme s'écrit $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ou :

$$\textstyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k\ , \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\ , \quad \sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$$

et leur produit $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ ou :

$$\textstyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n} x_k\ , \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k \ \text{ ou } \prod_{1\leqslant k\leqslant n} x_k.$$

On lit au choix : somme ou sigma des x_k, produit ou pi des x_k, de 1 à n ou de $k = 1$ à $k = n$. L'indice k est *muet* et peut être changé en une autre lettre comme $i, j, l, m, p, q, \ldots$ sans changer la somme ou le produit des termes. Pour $n = 1,2,3$, les notations $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ et $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ ont un petit désavantage, puisqu'elles supposent au moins quatre termes et doivent être interprétées.

Ces sommes et produits sont en fait définis par récurrence pour $n \geqslant 1$: la somme de $n + 1$ éléments $x_1, \ldots, x_{n+1}$ est définie comme la somme des n premiers et du $n + 1$-ième ; on a la relation :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} x_k = \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k\right) + x_{n+1}\ ;$$

de même pour la définition du produit de $n + 1$ éléments, donnée, pour $n \geqslant 1$, par :

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant n+1} x_k = \left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} x_k\right) \times x_{n+1}.$$

La somme et le produit de la famille vide sont 0 et 1 par convention.

L'emploi de pointillés ou des signes $\sum$ et $\prod$ nécessite donc des raisonnements par récurrence, souvent évidents. On peut effectuer des changements d'indices, par exemple : $\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(l + 1)^2 = \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} k^2$ en posant $k = l + 1$.

L'adoption de ces notations est assez récente (au XX^e siècle, alors qu'Euler avait proposé le signe $\sum$ en 1755) ; on utilisait avant un langage moins précis, mais que tout le monde comprenait ; on pouvait parler, par exemple, de la famille des éléments $a, b, c, \ldots, l$ et de leur somme $a + b + c + \ldots + l$.

1.2.3 Somme de termes successifs d'une suite arithmétique

La suite arithmétique de raison r et de premier terme a est la suite $(a + kr)_{k\geqslant 0}$ (pour la notation, voir 5.1.1). La formule à connaître par cœur est la somme des entiers de 1 à n :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en déduit, par exemple, la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(a+kr)$ avec $k=0,1,\ldots,n$:

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(a+kr)=(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}r.$$

Attention, la première formule commence au rang $k=1$, la seconde au rang $k=0$.

1.2.4 Somme de termes successifs d'une suite géométrique

La suite géométrique de raison q et de premier terme a est la suite $(aq^k)_{k\geqslant 0}$ (pour la notation, voir 5.1.1). La formule à connaître est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (q^n) de raison $q\neq 1$:

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}q^k=1+q+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Si $q=1$, $\sum_{0\leqslant k\leqslant n}q^k=n+1$.

1.2.5 Formule du binôme

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+b^n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}C_n^ka^{n-k}b^k$$

avec $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

La **factorielle** de n (on dit souvent : n factoriel) est définie par récurrence par $0!=1$ et $(n+1)!=n!\times(n+1)$. C'est le produit des n premiers entiers. Les premières valeurs de $n!$, pour $n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 8$, sont 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5 040, 40 320.

Je préfère la notation C_n^k, pour *combinaisons* (dont l'initiale donne le C) de k éléments parmi n éléments, plutôt que $\binom{k}{n}$ qui doit se lire *k parmi n* sans que la notation vous y aide. Pour le calcul des coefficients, on peut aussi utiliser le triangle bien connu dit de Pascal [1], basé sur la formule :

$$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}.$$

1. Les Arabes le connaissaient vers l'an 1000, les Chinois en 1261 et il apparaît dans le *General Trattato* de Tartaglia en 1556 (les Italiens disent d'ailleurs : triangle de Tartaglia). Mais Pascal fait une étude approfondie du triangle et c'est là qu'il rédige le premier (peut-être) raisonnement par récurrence.

1.2.6 L'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Rappelons que la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ vient de la réécriture de l'équation sous la forme dite *canonique* :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$. On a les trois cas :
- $\Delta < 0$: l'équation n'a aucune racine réelle ;
- $\Delta = 0$: l'équation a une racine réelle dite double $x_1 = -b/2a$ et s'écrit $a(x - x_1)^2 = 0$;
- $\Delta > 0$: l'équation a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc :

$$x_1 + x_2 = -b/a,\ \ x_1 x_2 = c/a,$$

des relations qui viennent aussi de ce que l'équation s'écrit :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \text{ soit } a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = 0.$$

Réciproquement, deux nombres réels de somme S et de produit P sont les racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

1.3 Rappels de trigonométrie

1.3.1 Définition géométrique des fonctions sinus, cosinus et tangente

Les fonctions trigonométriques sont définies à partir des points du cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et de centre O d'un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$; on note A le point (1,0) (voir figure 1.1).

Soient a un réel et M le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}) = a$ (a est en radians). On projette M en H sur $(x'x)$, en K sur $(y'y)$. On pose $\overline{OH} = \cos a$, $\overline{OK} = \sin a$. Si $a \neq \pi/2 \bmod \pi$, la perpendiculaire en A à l'axe $x'Ox$ coupe (OM) en T et on pose $\tan a = \overline{AT}$.

On définit ainsi, via la géométrie, des fonctions **sinus**, sin : $\mathbb{R} \to [-1,1]$, **cosinus**, cos : $\mathbb{R} \to [-1,1]$ et **tangente**, tan : $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.

On définit aussi la **cotangente** comme l'inverse de la tangente :

$$\text{cotan} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \text{cotan}\, x = \frac{1}{\tan x}.$$

La construction des fonctions trigonométriques dans les classes de lycée est basée sur la géométrie. Cela ne gênait personne, il y a 100 ans. Mais aujourd'hui, toute l'analyse est basée sur la construction des nombres réels que nous présenterons au chapitre 3. Les outils pour construire rigoureusement les fonctions trigonométriques ne seront mis au point qu'en 11.10 et 16.9. En attendant, nous utiliserons les fonctions trigonométriques et leurs propriétés telles que nous les connaissons.

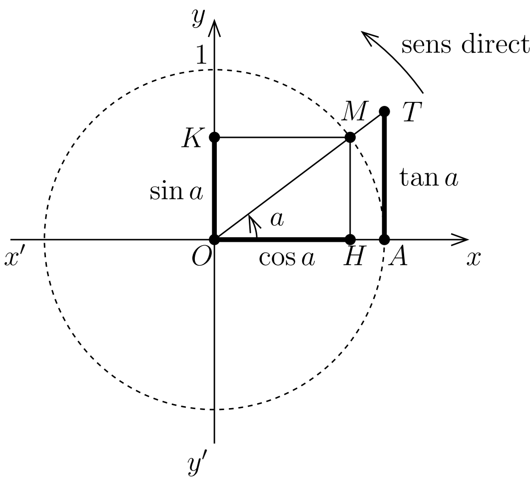

Figure 1.1 Définition géométrique du sinus, du cosinus et de la tangente.

1.3.2 Valeurs des fonctions trigonométriques

Le tableau de valeurs des fonctions trigonométriques pour cinq angles compris entre 0 et $\pi/2$ est à connaître (sans calculatrice !).

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	

1.3.3 Formules de trigonométrie

Les formules qui suivent n'ont parfois pas de sens pour certaines valeurs de la variable : par exemple, si $\tan x$ apparaît, il faut supposer $x \neq \pi/2 \bmod \pi$, etc.

Premières formules.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Il faut savoir retrouver, en traçant un cercle trigonométrique dans un coin de son brouillon ou en réfléchissant un peu :

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x,\ \tan(-x) = -\tan(x),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1/\tan x,$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x & \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x & \cos(\pi + x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

Formules d'addition. Les formules pour $a - b$ se déduisent de celles pour $a + b$ en changeant b en $-b$:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a, \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}. \end{aligned}$$

Formules donnant les produits. Par addition ou soustraction des formules précédentes, on obtient :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]\ ;$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]\ ;$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

Formules donnant les sommes et les différences. En prenant les formules précédentes à l'envers avec $a = (p+q)/2$ et $b = (q-p)/2$:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{q-p}{2}\ ;$$

$$\cos p - \cos q = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{q-p}{2}\ ;$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\ ;$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}.$$

Formules de duplication.

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a,$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,$$
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Formules en fonction de la tangente de l'arc moitié. En posant $t = \tan(a/2)$:

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Dérivées. Nous reverrons ce qui suit en 6.7.2 et 7.1.7. Les fonctions trigonométriques sont des fonctions continues, dérivables sur leur domaine de définition et leurs dérivées sont données par les formules :

$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

On peut aussi écrire les dérivées du sinus et du cosinus sous la forme $\sin' x = \sin(x + \pi/2)$, $\cos' x = \cos(x + \pi/2)$, ce qui donne facilement une expression des dérivées successives du sinus et du cosinus :

$$\sin^{(n)} x = \sin(x + n\pi/2) \qquad \cos^{(n)} x = \cos(x + n\pi/2).$$

Inégalités.

$$\sin x < x \text{ pour } x > 0\ ;$$
$$\sin x > 2x/\pi \text{ pour } 0 < x < \pi/2\ ;$$
$$\tan x > x \text{ pour } 0 < x < \pi/2.$$

Transformation de $A\cos\omega t + B\sin\omega t$. On a souvent besoin en physique de transformer l'expression de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, où A, B sont des réels non tous deux nuls. Comme $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ sont des éléments de $[-1,\ 1]$ dont les carrés ont pour somme 1, il existe un réel φ, qu'on peut prendre dans un intervalle de longueur 2π comme $[0, 2\pi[$, tel que :

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Alors, $f(t) = \sqrt{A^2+B^2}(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t)$, soit :

$$f(t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t - \varphi).$$

1.4 Relations d'équivalence et d'ordre

1.4.1 Relations sur un ensemble

Soit E un ensemble. Un sous-ensemble[2] $\mathcal{R}$ de $E \times E$ définit ce qu'on appelle une **relation** entre les éléments de E. On écrit $x\mathcal{R}y$ si $(x,y) \in \mathcal{R}$ et on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y.

Par exemple, si E est l'ensemble des élèves d'un lycée, on peut considérer la relation définie par les couples d'élèves qui sont dans une même classe.

1.4.2 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble. Une **partition** de E est la donnée d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles non vides de E telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tous i, j de E distincts et $E = \cup_{i\in I} E_i$.

Par exemple, les entiers multiples de 3, ceux de la forme $3k+1$ et ceux de la forme $3k+2$ forment une partition de $\mathbb{N}$ en trois parties.

1.4.3 Relations d'équivalence

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E est une **relation d'équivalence** si on a les trois propriétés suivantes :

1) **réflexivité** : pour tout élément x de E, on a $x\mathcal{R}x$;

2) **symétrie** : pour tous x, y de E, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$;

3) **transitivité** : pour tous x, y, z de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Les exemples de relation d'équivalence se rencontrent d'abord en algèbre ; la relation d'égalité est une relation d'équivalence sur tout ensemble. Sur $\mathbb{N}$ (ou aussi sur $\mathbb{Z}$) la relation d'égalité modulo n (au sens que $x\mathcal{R}y$ équivaut à n divise $x-y$),

2. On utilisera indifféremment les synonymes *partie* et *sous-ensemble*.

est une relation d'équivalence essentielle en théorie des nombres. La relation d'être dans une même classe de lycée est une relation d'équivalence.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, la **classe d'équivalence** de x est l'ensemble des éléments $y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$. Les classes d'équivalence de deux éléments sont disjointes ou confondues. Les différents classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble E.

Réciproquement, une partition d'un ensemble E définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E : on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y appartiennent à la même partie de la partition de E.

1.4.4 Relations d'ordre

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si on a les trois propriétés suivantes :

1) **réflexivité** : pour tout x de E, on a $x\mathcal{R}x$;
2) **antisymétrie** : pour tous x, y de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$;
3) **transitivité** : pour tous x, y, z de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Un exemple de relation d'ordre est la relation d'inclusion sur l'**ensemble** $\mathcal{P}(E)$ **des parties** d'un ensemble E : si A et B sont des parties de E, on a $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$.

Si A est une partie de E, la restriction de la relation $\mathcal{R}$ aux éléments de A définit une relation d'ordre sur A appelée **ordre induit** par $\mathcal{R}$ sur A.

La relation est dite d'**ordre total** si deux éléments distincts sont toujours comparables, c'est-à-dire si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$ pour tous x, y de E.

La relation d'ordre sur l'ensemble des parties d'un ensemble ayant au moins deux éléments n'est pas une relation d'ordre total.

L'exemple classique de relation d'ordre total est la relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Dans une partie totalement ordonnée :

1) le plus petit et le plus grand élément d'une famille de deux éléments existent toujours ; si $x \leqslant y$, on pose $\inf(x,y) = x$ et $\sup(x,y) = y$; inf est une abréviation de *infimum* et sup une abréviation de *supremum* ;
2) le plus petit et le plus grand élément d'une famille de n éléments $(x_1,\dots,x_n)$ existent toujours et se définissent par récurrence par les relations $\inf(x_1,\dots,x_{n+1}) = \inf(\inf(x_1,\dots,x_n),x_{n+1})$ et $\sup(x_1,\dots,x_{n+1}) = \sup(\sup(x_1,\dots,x_n),x_{n+1})$: on calcule l'inf ou le sup des n premiers éléments et on le compare au $n+1$-ième. On peut aussi dans ce cas parler de minimum et de maximum (voir 3.2.2).

1.5 Écriture des formules

La recherche de la rigueur en analyse a poussé les mathématiciens du XIX^e siècle à élaborer une écriture de plus en plus formalisée des mathématiques, impossible à expliquer en quelques mots [3].

Bien sûr, ce n'est pas sous cette forme qu'on peut penser dans sa tête les problèmes de mathématiques : il faut prendre du recul, entrelacer des notions complexes et faire jouer ses neurones pour les comprendre. Mais on peut avoir besoin de revenir au langage formalisé, par exemple pour écrire correctement la négation (le contraire), d'une propriété [4]. Voici un bagage minimum.

Une formule mathématique s'écrit avec des symboles logiques, les symboles de la théorie dans laquelle on travaille et des lettres désignant les variables.

Voici un exemple de formule vraie de la théorie des nombres réels :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \big((x \geqslant 0) \Rightarrow \exists y (y^2 = x)\big) \ ;$$

elle signifie que, pour tout x réel, si $x \geqslant 0$, il existe un réel y de carré x.

1.5.1 Calculs avec les formules

Dans cette section, j'utilise des crochets pour isoler les formules de ce qui est du langage courant.

Les formules mathématiques se construisent avec :

- ou, et, non, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, qui sont des **connecteurs logiques** ;
- $\exists$,$\forall$, qui sont des **quantificateurs**.

On écrit souvent $[P(x)]$ si la formule $[P]$ dépend de x.

À partir de la formule $[P]$ et de la formule $[Q]$, par exemple $|x - a| < \delta$, $f(x) \geqslant A$, on peut construire d'autres formules :

- $[P$ ou $Q]$;
- $[P$ et $Q]$;
- $[P \Rightarrow Q]$ (qui se lit P **implique** Q) ;
- $[P \Leftrightarrow Q]$ (qui se lit P **équivaut** à Q ou P est **équivalente** à Q) ;

3. Nous sommes tellement habitués à notre logique que nous ne pensons pas qu'il puisse en exister d'autres. Cependant, la logique dite intuitionniste de Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) propose une autre approche des démonstrations mathématiques où le principe du tiers exclus est rejeté et où les objets manipulés doivent être explicitement construits ; on parle de mathématiques constructives. Des textes d'Henri Lombardi, disponibles sur son site ou dans la revue *Repères-IREM*, peuvent en donner une idée.

4. La vérification de démonstrations mathématiques sur ordinateurs a fait récemment d'énormes progrès. On a pu obtenir la certification des preuves de théorèmes comme celles du théorème des quatre couleurs en 2004 et, fin 2012, d'un résultat sur les groupes datant de 1963 et ayant nécessité plus de 200 pages de démonstrations : un travail de 12 personnes pendant six ans, des calculs énormes, un exploit ! Pour la conjecture de Kepler sur les empilements de sphères, voir [ESC3].

- [non P] (la **négation** de P) ;
- $[(\forall x)(P(x))]$ (qui se lit : pour tout x, on a $P(x)$) ;
- $[(\exists x)(P(x))]$ (qui se lit : il existe un x tel que $P(x)$; plusieurs x distincts peuvent vérifier $P(x)$ quand la formule est vraie).

Certaines formules sont équivalentes, comme les suivantes :

- [non(non P)] est équivalente à $[P]$;
- [P et Q] est équivalente à [non((non P) ou (non Q))] ;
- $[P \Rightarrow Q]$ est équivalente à [Q ou (non P)] ;
- $[P \Rightarrow Q]$ est aussi équivalente à [non $Q \Rightarrow$ non P] appelée **contraposée** de $[P \Rightarrow Q]$.
- $[P \Leftrightarrow Q]$ est équivalente à [$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$] ;
- $[(\exists x)(P(x))]$ est équivalente à [non $((\forall x)($non $P(x)))$].
- $[(\forall x)(P(x))]$ est équivalente à [non $((\exists x)($non $P(x)))$].

Avec ces règles, on voit, par exemple, que :

- la négation de $[P \Rightarrow Q]$ est [(non Q) et P] ;
- la négation de $[(\forall x)(P(x))]$ est $[(\exists x)($non $(P(x)))]$;
- la négation de $[(\exists x)(P(x))]$ est $[(\forall x)($non $(P(x)))]$.

On peut dire ces deux dernières propriétés en langage courant :

➤ nier qu'une propriété soit vraie pour tout x équivaut à dire qu'il existe un x (un seul suffit) pour lequel la propriété n'est pas vraie ;

➤ nier qu'il existe un x vérifiant une propriété équivaut à dire qu'elle est fausse pour tout x.

On utilise les abréviations :

- $[(\forall x \in A)(P(x))]$ pour $[(\forall x)((x \in A) \Rightarrow P(x))]$;
- $[(\exists x \in A)(P(x))$ pour $[(\exists x)((x \in A)$ et $P(x))]$.

Leurs négations sont respectivement :

- $[(\exists x \in A)($non $P(x))]$;
- $[(\forall x \in A)($non $P(x))]$.

1.5.2 Sous-ensembles définis par des formules

Dans un ensemble E, une formule $[P(x)]$ permet de définir l'ensemble A des éléments x de E ayant la propriété $[P]$.

Si A est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[P]$ et B l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[Q]$:

- $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété [P ou Q], c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E vérifiant l'une ou l'autre de ces deux propriétés, éventuellement les deux (ce n'est pas le « *ou* » souvent exclusif du langage courant) ;

- $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[P$ et $Q]$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E vérifiant à la fois $[P]$ et $[Q]$;
- $E \setminus A$ (le complémentaire de A dans E) est l'ensemble des éléments de E ne vérifiant pas la propriété $[P]$ (c'est-à-dire vérifiant la propriété [non P]).

Ce petit résumé de logique nous servira pour écrire correctement la négation d'une propriété un peu compliquée. Par exemple, dire qu'un réel m majore un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ (voir 3.2) s'écrit :

$$[(\forall x \in A)(x \leqslant m)]$$

et dire que m ne majore pas A peut s'écrire :

$$[\text{non } ((\forall x \in A)(x \leqslant m))] \quad \text{ou} \quad [(\exists x \in A)(x > m)].$$

1.5.3 Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une formule $[P(n)]$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, autrement dit que l'ensemble A des entiers pour lesquels $[P(n)]$ est vraie est égal à $\mathbb{N}$, le raisonnement par récurrence est essentiel.

Un raisonnement par récurrence type comporte trois étapes :

1) la vérification de la base de la récurrence, c'est-à-dire que 0 vérifie la propriété $[P]$;
2) la vérification que, pour tout entier n, si $[P(n)]$ est vraie alors $[P(n+1)]$ est vraie ;
3) la conclusion : si les points 1 et 2 sont vrais, alors $[P(n)]$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

De petites variantes de ce raisonnement se rencontrent souvent, citons en deux :

➤ la base de la récurrence n'est pas pour 0, mais pour un entier N, autrement dit $[P(N)]$ est vraie ; le point 2 doit alors être modifié en vérifiant que, pour tout $n \geqslant N$, si $[P(n)]$ est vraie alors $[P(n+1)]$ est vraie ; la conclusion est que $[P]$ est vraie pour tout entier $n \geqslant N$;

➤ la base de la récurrence n'est pas 0, mais les deux entiers 0 et 1, autrement dit $[P(0)]$ et $[P(1)]$ sont vraies ; le point 2 doit alors être modifié en vérifiant que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $[P(n)]$ et $[P(n+1)]$ sont vraies alors $[P(n+2)]$ est vraie.

J'ai souvent vu les étudiant(e)s de première année écrire des absurdités en faisant un raisonnement par récurrence, signe qu'ils-elles n'en ont pas compris le principe ; alors, attention ! Les trois étapes précédentes sont incontournables.

1.6 Inégalité triangulaire

Quand on a fixé un repère cartésien dans le plan, la distance euclidienne de deux points $A = (a, b)$ et $A' = (a', b')$ est $AA' = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$. On la note AA' ou $d(A, A')$, où le d est lu *distance*.

Dans un triangle $AA'A''$ (voir figure 1.2) on a les inégalités suivantes.

1) **Première inégalité triangulaire** : la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés
$$d(A, A'') \leqslant d(A, A') + d(A', A'') \,;$$
2) **Seconde inégalité triangulaire** : la valeur absolue de la différence des longueurs de deux côtés est inférieure à la longueur du troisième côté :
$$|d(A,A') - d(A,A'')| \leqslant d(A',A'').$$

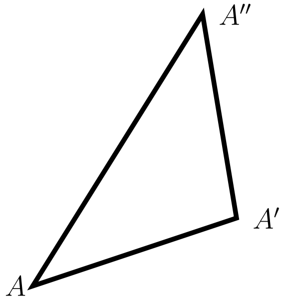

Figure 1.2 Inégalité triangulaire.

Exercices

1.1 Identités algébriques

1) Donner des factorisations de $a^n - b^n$ et de $a^n - 1$ vraies pour tout $n \geqslant 2$.

2) Donner des factorisations de $a^n + b^n$ et de $a^n + 1$ dans le cas n impair.

1.2 Identités algébriques

Pour tout entier $m \geqslant 0$, on pose $x^{[m]} = \dfrac{x^m}{m!}$. Vérifier que la formule du binôme s'écrit $(a+b)^{[n]} = \sum_{p+q=n} a^{[p]}b^{[q]}$ et se généralise en $(a_1 + \ldots + a_r)^{[n]} = \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} a_1^{[p_1]} \ldots a_r^{[p_r]}$.

1.3 Identités algébriques

Soient a, b, c trois nombres réels. Pour d entier, $d \geqslant 1$, on pose $p_d = a^d + b^d + c^d$. On suppose $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Montrer que deux des trois nombres a, b, c sont nuls. On pourra calculer $p_1 \times (p_2 - ab - bc - ca)$ et $p_1^2 - p_2$.

1.4 Calculs de sommes

Montrer que $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.5 Inégalité de Tchebytcheff sur les moyennes arithmétiques

Soient $n \geqslant 2$ un entier, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ des réels. Montrer l'inégalité sur les moyennes arithmétiques, dite de Tchebytcheff :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i\right) \times \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} b_j\right) \geqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i b_i\right)$$

(on pourra commencer par développer le membre de gauche et réunir les termes en chacun des a_i).

1.6 Quelques représentations graphiques

Cet exercice n'est pas corrigé. Il faudrait aussi revoir, si vous ne les connaissez pas bien, les représentations graphiques du sinus, du cosinus et de la tangente, avec les pentes des tangentes en 0, les maxima et minima.

Représenter graphiquement, sans faire d'étude complète avec tableau de variation, juste en plaçant les axes de symétrie ou asymptotes éventuels, les fonctions définies par les formules suivantes :

$x \mapsto 3x - 2$, $x \mapsto -2x + 5$, $x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$, $x \mapsto -x^2 + 4x$, $x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x+6}$, $x \mapsto \dfrac{-x+1}{x-3}$.

1.7 Trigonométrie

Résoudre les équations $\sin x = 1/2$, $\cos x = \sqrt{2}/2$, $\tan x = \sqrt{3}$.

1.8 Calcul de produit

Soit $x \in]0, \pi/2]$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$C_n(x) = 2^{n+1} \cos x \cos(x/2) \ldots \cos(x/2^n) = 2^{n+1} \prod_{0 \leqslant k \leqslant n} \cos(x/2^k).$$

Simplifier l'expression de $C_n(x)$; on pourra montrer que $C_n(x) \sin(x/2^n) = C_{n-1}(x) \sin(x/2^{n-1})$.

1.9 Encadrement de π, méthode d'Archimède

Dans un cercle de rayon 1, on inscrit un polygone régulier P_n de 3×2^n côtés, $n \geqslant 1$. On note p_n son périmètre ; on pose $s_n = \sin(\pi/(3 \times 2^n))$.

Montrer que $p_n = 3 \times 2^{n+1} s_n$ et que $s_{n+1}^2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - s_n^2}}{2}$. Calculer p_n et s_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Comparer p_n et 2π.

1.10 Trigonométrie

C'est Euler qui a proposé de définir les lignes trigonométriques dans un cercle de rayon 1. Avant lui, on les définissait dans des cercles de rayon R. Pour construire les tables de valeurs des fonctions sinus ou tangente, importantes pour la navigation, on prenait $R = 10^6$ ou $R = 10^7$, ce qui revenait à en donner 6 ou 7 chiffres exacts ; par exemple, le cosinus de 30 degrés était 8 660 254 (c'est-à-dire $10^7 \times (\sqrt{3}/2)$).
Écrire les formules d'addition pour les fonctions définies par $\text{Sin}(x) = R \sin x$, $\text{Tan}(x) = R \tan x$.

1.11 Une apparition étonnante et superbe !

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de $x \mapsto x^2$ dans un repère (O, x, y). Pour tous entiers $m, n \geqslant 2$, on note A_n le point (n, n^2) et B_m le point $(-m, m^2)$.

1) Soient, $m, n \geqslant 2$; calculer l'ordonnée de l'intersection de la droite $(A_n B_m)$ avec l'axe des y.

2) Les ordonnées calculées au 1) forment un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$. Comment caractériser les éléments de E et ceux de son complémentaire ?

1.12 Logique

Soient E un ensemble, $[P(x)]$ et $[Q(x)]$ deux propriétés, A (resp. : B) l'ensemble des x de E vérifiant $[P(x)]$ (resp. : $[Q(x)]$). Dans chacun des cas suivants, quel est l'ensemble des x de E vérifiant la propriété :

1) $[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$?

2) $[P(x) \Rightarrow Q(x)]$?

3) $[P(x) \Rightarrow \text{non}(Q(x))]$?

1.13 Logique

Vérifier les formules données en 1.5.1 pour les négations de $(\forall x \in A)(P(x))$, $(\exists x \in A)(P(x))$.

Solutions

1.1 1)

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) = (a-b)(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a^{n-1-k}b^k)$.
Avec $b = 1$, on a $a^n - 1 = (a-1)(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a^k)$.
2) Si n est impair et $n \geqslant 3$, on a $a^n + b^n = (a+b)\left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k\right)$ et $a^n + 1 = (a+1)\left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (-1)^k a^k\right)$.
Par exemple, $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$
et $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5 b + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 - ab^5 + b^6)$.
Si n est pair, on n'a pas de formules analogues.

1.2 La vérification consiste à diviser la formule du binôme par $n!$, la généralisation à raisonner par récurrence sur r.

1.3 On vérifie par le calcul l'identité :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

On a aussi : $p_1^2 = p_2 + 2(ab + bc + ca)$. Les hypothèses donnent $ab + bc + ca = 0$, puis $abc = 0$. Si $a = 0$, $ab + bc + ca = 0$ donne $bc = 0$, puis le résultat.

1.4 Raisonner par récurrence sur n. Vérifier d'abord que les formules sont vraies pour $n = 1$ (les deux membres des égalités sont égaux à 1). Puis supposer les égalités vraies pour un entier n et montrer qu'elles sont encore vraies pour l'entier $n + 1$. Ne pas oublier de conclure.
Par exemple, pour la deuxième, on suppose la formule vraie pour un entier n :
$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (c'est l'hypothèse de récurrence).
On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$.
On part de $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} k^3 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^3 + (n+1)^3$, qui est égal, d'après l'hypothèse de récurrence à $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$. En mettant $(n+1)^2$ en facteur, on trouve $\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$, ce qui est bien le membre de droite de la formule pour $n + 1$.
On conclut que la formule est vraie pour tout n.

1.5 Le cas $n = 2$ est facile, mais c'est le cas $n = 3$ qui peut donner une idée de la démarche à suivre. Pour $n \geqslant 2$, on multiplie par n^2 et on développe le membre de gauche en regroupant ce qui concerne chaque a_i : $a_i b_1 + a_i b_2 + \ldots + a_i b_i + \ldots + a_i b_n$; en retranchant $n a_i b_i$, on obtient :

$$a_i(b_1 - b_i) + \ldots + a_i(b_{i-1} - b_i) + a_i(b_{i+1} - b_i) + \ldots + a_i(b_n - b_i).$$

L'inégalité de Tchebytcheff revient à montrer que la somme de ces lignes est positive. On s'en assure en remarquant qu'en regroupant les termes du tableau formé par les lignes précédentes deux par deux : $a_i(b_j - b_i)$ et $a_j(b_i - b_j)$, on obtient des sommes $(a_i - a_j)(b_j - b_i)$, toutes positives.

1.7 Raisonnons à partir de la figure 1.3.
Si $OH = a \in [-1, 1]$, on voit qu'il existe deux angles (en général), α et $\pi - \alpha$, définis modulo 2π, de sinus a. Si $a = 1/2$, on a $\alpha = \pi/6$, par exemple ; on en déduit l'ensemble des solutions de $\sin x = 1/2$: ce sont les angles $\pi/6 + 2k\pi$ et $5\pi/6 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Si $OK = a \in [-1, 1]$, on voit qu'il existe deux angles (en général), α et $-\alpha$, définis modulo 2π, de cosinus a. Si $a = \sqrt{2}/2$, on a $\alpha = \pi/4$, par exemple ; on en déduit l'ensemble des solutions de $\cos x = \sqrt{2}/2$: ce sont les angles $\pm\pi/4 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Si $AT = a \in \mathbb{R}$, on voit qu'il existe deux angles, α et $\alpha + \pi$, définis modulo 2π, de tangente a ; l'ensemble des solutions est l'ensemble des angles égaux à α modulo π. Si $a = \sqrt{3}$, on a $\alpha = \pi/3$, par exemple ; on en déduit l'ensemble des solutions de $\tan x = \sqrt{3}$: ce sont les angles $\pi/3 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

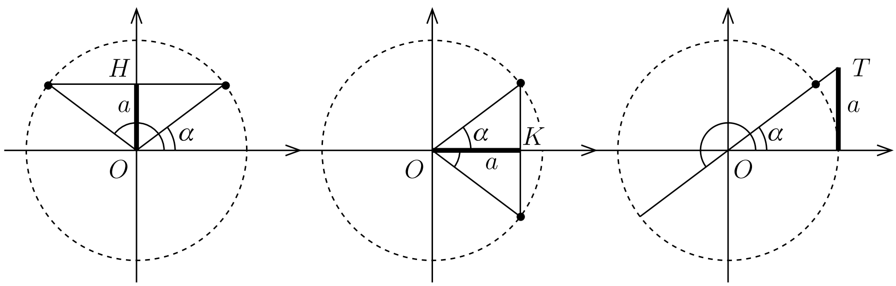

Figure 1.3 Figures pour la résolution des équations $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$.

1.8 On a $C_n(x)\sin(x/2^n) = 2C_{n-1}(x)\cos(x/2^n)\sin(x/2^n)$ $= C_{n-1}(x)\sin(x/2^{n-1})$. D'où, par récurrence, $C_n(x)\sin(x/2^n) = C_0(x)\sin x$. Comme $C_0(x)\sin x = 2\cos x \sin x = \sin 2x$ et comme $\sin(x/2^n) \neq 0$ (puisque $x \in]0, \pi/2]$), on a $C_n(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin(x/2^n)}$.

1.9 Comme la longueur d'un côté comme A_1A_2 (voir la figure 1.4 où la mesure de l'angle ne correspond pas à un cas précis) est $2s_n$, on a $p_n = 3 \times 2^{n+1}s_n$.
Pour $a \in [0, \pi/4]$, on a $\cos 2a \geqslant 0$. Comme $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$, on obtient

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2a}}{2}, \text{ d'où } s_{n+1}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - s_n^2}}{2}.$$

Les calculs deviennent vite un peu délicats.

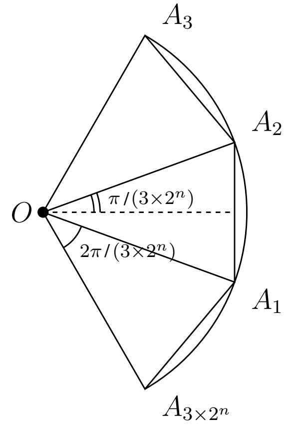

Figure 1.4 Côté d'un polygone régulier à 3×2^n côtés.

n	3×2^n	$\pi/(3 \times 2^n)$	s_n^2	p_n
1	6	$\pi/6$	$\frac{1}{4}$	6
2	12	$\pi/12$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$	6,2117
3	24	$\pi/24$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}$	6,2653
4	48	$\pi/48$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}}$	6,2787
5	96	$\pi/96$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}}}$	6,2821

On se rapproche (lentement) de la longueur de la circonférence :

$$2\pi = 6{,}283185\ldots.$$

Dans le *Traité de la mesure du cercle*, Archimède accomplit deux prouesses successives. La première est de montrer que c'est la même constante qui donne le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre et le rapport de la surface d'un cercle au carré de son rayon (le nombre π). La seconde est de calculer un excellent et célèbre encadrement de π : $3 + 10/71 < \pi < 22/7$, en couplant la méthode précédente avec des calculs analogues des périmètres de polygones réguliers de 3×2^n côtés circonscrits au cercle. L'histoire du calcul de π depuis cet exploit est riche et reflète des avancées des mathématiques.