

**TOUT EN  
FICHES**

**L'ESSENTIEL DE**

**MÉCANIQUE DES  
FLUIDES**



**TOUT EN  
FICHES**

**Pascal Bigot**

Professeur en BTS au lycée  
Marie Curie (Nogent-sur-Oise)

**Richard Mauduit**

Professeur en BTS au lycée  
Robert Schuman (Le Havre)

**Eric Wenner**

Professeur en BTS au lycée  
Robert Schuman (Le Havre)

L'ESSENTIEL DE

**MÉCANIQUE DES  
FLUIDES**

**BTS**

**DUNOD**

Graphisme de couverture : Pierre-André Gualino  
Illustrations de couverture : shutterstock\_12802474

Cet ouvrage existe en deux versions dans les collections  
L'Essentiel BTS et l'Essentiel Licence / IUT

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique

s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2011, 2015, 2021

11, rue Paul Bert 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-081815-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

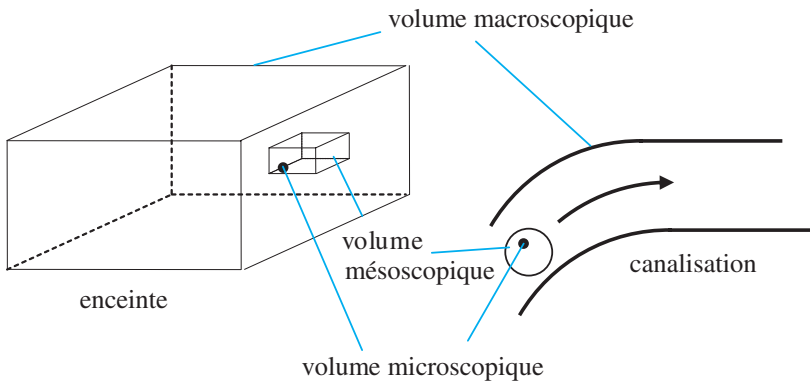
<b>Fiche 1</b>	Généralités sur les fluides – pression	1
<b>Fiche 2</b>	Fluides gazeux	8
<b>Fiche 3</b>	Relation fondamentale de la statique des fluides	17
<b>Fiche 4</b>	Pression atmosphérique	26
<b>Fiche 5</b>	Mesures de pressions	33
<b>Fiche 6</b>	Forces de pression : poussée sur une paroi	43
<b>Fiche 7</b>	Forces de pression : poussée d'Archimède	51
<b>Fiche 8</b>	Tension superficielle et tensiométrie	60
<b>Fiche 9</b>	Écoulement des fluides parfaits	69
<b>Fiche 10</b>	Mesures de débits	76
<b>Fiche 11</b>	Mesures de vitesses	85
<b>Fiche 12</b>	Viscosité et viscosimétrie	95
<b>Fiche 13</b>	Rhéologie	104
<b>Fiche 14</b>	Calculs de perte de charge	112
<b>Fiche 15</b>	Les pompes	122
<b>Fiche 16</b>	Les turbines hydrauliques	135
<b>Fiche 17</b>	Le théorème de Bernoulli généralisé	144
<b>Fiche 18</b>	Travail de synthèse	155
<b>Fiche 19</b>	Dynamique des fluides compressibles	163
<b>Fiche 20</b>	Théorème d'Hugoniot	172



## 1. Les fluides

### ■ Grandeurs mésoscopiques

En mécanique des fluides, les grandeurs définies le sont pour des volumes mésoscopiques (encore appelés éléments de fluides), *intermédiaires entre le volume microscopique et le volume macroscopique*.



Une grandeur définie sur un volume microscopique ne concerne que trop peu de particules et n'est donc pas continue.

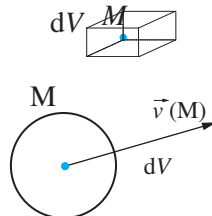
Une grandeur définie sur un volume macroscopique ne permet pas de rendre compte des variations de cette grandeur à l'intérieur de ce volume.

### EXEMPLES DE GRANDEURS DÉFINIES AU NIVEAU MÉSCOPIQUE

$$\text{Masse volumique (en } M) = \frac{dm}{dV}$$

avec  $dm$  = masse de l'ensemble des particules dans le volume  $dV$ .

$\vec{v}(M)$  = moyenne des vecteurs vitesses des particules contenues dans le volume  $dV$ .



### ■ Différence solide/fluide

Dans un solide, les particules sont rigidement liées les unes aux autres, contrairement à un fluide : *fluides = liquides et gaz*.

### ■ Différence liquide/gaz

Au niveau macroscopique, contrairement à un liquide, un gaz occupe toujours l'ensemble du volume qui lui est proposé.

Au niveau microscopique, contrairement à un gaz, les particules d'un liquide sont très proches.

D'autre part, liquides et gaz diffèrent par l'ordre de grandeur :

- de leur masse volumique (en moyenne 1 000 fois supérieure pour un liquide) ;
- de leur aptitude à subir une variation de volume à température constante (en moyenne 100 000 fois supérieure pour un gaz).

### ■ Grandeurs usuelles

- **Pression  $P$  en un point** : voir partie 2.
- **Température  $T$**  : grandeur qui traduit le degré d'agitation des particules.
- **Volume  $V$**  : partie de l'espace occupée.
- **Masse volumique  $\rho$  (« rho »)** :  $\rho = \frac{m}{V}$  avec  $m$  = masse de fluide occupant le volume  $V$ .
- **Densité  $d$**  :  $d = \frac{m}{m_R}$  avec  $m$  = masse de fluide occupant le volume  $V$  et  $m_R$  = masse d'un corps  $R$  de référence occupant le même volume  $V$ .

Le corps de référence est l'eau pour les liquides et l'air pour les gaz.

On a aussi :  $d = \frac{\rho}{\rho_R}$  avec  $\rho_R$  = masse volumique du corps  $R$ .

### ■ Fluides incompressibles et compressibles

Un fluide incompressible est tel que sa masse volumique reste la même en tout point : *les liquides peuvent être considérés comme incompressibles*.

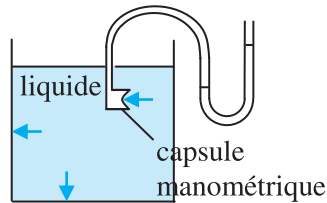
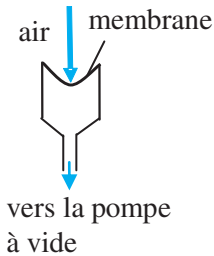
Un fluide compressible est tel que sa masse volumique peut varier d'un point à l'autre : *les gaz peuvent être considérés comme compressibles*.



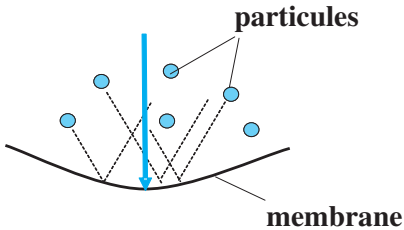
## 2. Pression en un point d'un fluide au repos

### Forces pressantes

Les molécules d'un *fluide quelconque, au repos*, sont en mouvement incessant (par exemple, quelques gouttes de colorant ajoutées dans un verre d'eau finissent par diffuser dans la totalité du liquide) et exercent donc des forces pressantes en tout point du fluide.



*Interprétation microscopique :*

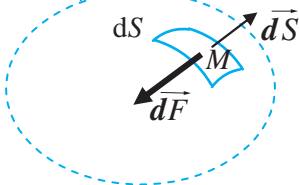


La force de pression résultante est principalement due aux chocs des particules

Par raison de symétrie, une force de pression est localement normale à l'élément de surface sur lequel elle s'exerce (la viscosité n'intervenant pas pour un fluide au repos).

### Pression absolue en un point

(surface  $S$ )



La pression  $p_M$  au point  $M$  est définie

telle que :  $d\vec{F} = -p_M \cdot d\vec{S}$

on a alors :  $p_M = \frac{dF}{dS}$

**Unité S.I. : le Pascal (Pa)**

Si on isole dans un fluide un volume  $V$  fictif délimité par une surface  $S$  fermée, les particules extérieures à  $V$  exercent sur une surface élémentaire  $dS$  (centrée sur le point  $M$ ) de  $S$  la force pressante  $d\vec{F}$  normale (pour un fluide au repos) à  $dS$ .

$$\text{« pression »} = \text{« } \frac{\text{force}}{\text{surface}} \text{ »} ; \text{ « force »} = \text{« pression } \times \text{ surface »}$$

### Autres unités utilisées

- le bar : 1 bar =  $10^5$  Pa
- l’atmosphère (atm) : 1 atm =  $1,013 \cdot 10^5$  Pa = 1,013 bar
- le millimètre de mercure (mm de Hg) 760 mm de Hg = 1 atm
- le mètre colonne d’eau (m CE) 10 m CE = 1 bar

### ■ Pression relative (ou effective) en un point

La pression relative  $p_{\text{rel}}(M)$  en un point  $M$  est telle que :

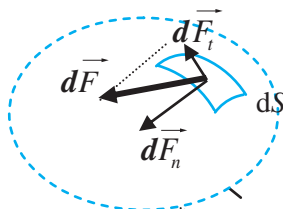
$$p_{\text{rel}}(M) = p_M - p_{\text{atm}}$$

avec  $p_{\text{atm}}$  = pression atmosphérique (elle peut varier !).

La présence d’atmosphère fait qu’elle contribue à la pression exercée ; la pression relative correspond donc à la pression exercée par le fluide seul.

### ■ Cas d’un fluide en mouvement

Dans ce cas, la force pressante  $d\vec{F}$  n’est plus forcément normale à  $dS$ , en particulier si le fluide est visqueux.

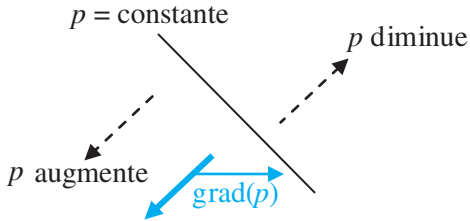


$$d\vec{F} = d\vec{F}_n \text{ (composante normale)} + d\vec{F}_t \text{ (composante tangentielle)}$$

La pression en  $M$  est telle que :  $p_M = \frac{dF_n}{dS}$

**Gradient de pression**

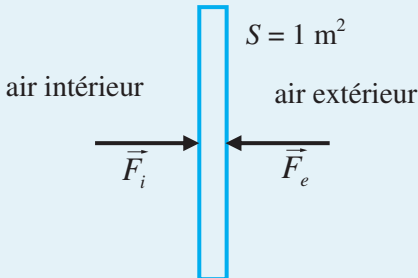
C'est le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{u}_x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{u}_y + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{u}_z$



(en coordonnées cartésiennes) ; il permet d'indiquer localement comment varie la pression. Ce vecteur est perpendiculaire à une surface isobare.

**EXERCICE 1 Force pressante exercée par l'air atmosphérique**

Calculez la force exercée de part et d'autre sur  $1 \text{ m}^2$  de vitre ; on supposera que la pression atmosphérique est la même de chaque côté et égale à 1 bar.

**Solution**

$$F_e = F_i = p_{\text{atm}} \cdot S = 10^5 \times 1 = 10^5 \text{ N}$$

C'est environ le poids d'une masse de  $10^4 \text{ kg}$  (10 tonnes).

Tout se passe comme si un éléphant tenait verticalement sur chaque côté de la vitre.

$$S = 1 \text{ m}^2$$

**EXERCICE 2 Pression au fond d'un réacteur**

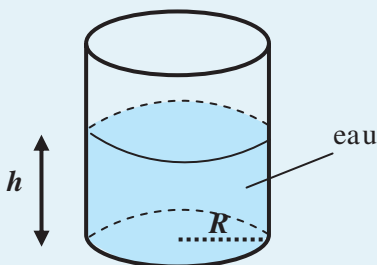
Un réacteur cylindrique à fond plat, de rayon  $R = 20 \text{ cm}$  et de hauteur  $H = 50 \text{ cm}$ , contient  $35 \text{ L}$  d'eau.

1. Calculez la hauteur  $h$  d'eau dans le réacteur.

2. Calculez la force exercée par l'eau sur le fond du réacteur.
3. Calculez la pression relative, en Pascal puis en mmCE, exercée par l'eau sur le fond du réacteur (trouvez deux méthodes).

Données :  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

### Solution



$$\begin{aligned} 1. \text{ Volume d'eau} &= V = (\pi \cdot R^2) \cdot h \\ 35 \cdot 10^{-3} &= \pi \cdot (0,2)^2 \cdot h \\ h &= 0,278 \text{ m} = \mathbf{27,8 \text{ cm}} \end{aligned}$$

$$2. \text{ Soit } F_{\text{eau}} = \text{valeur de la force exercée par l'eau } F_{\text{eau}} = m_{\text{eau}} \cdot g \text{ (poids de l'eau)} \\ = \rho_{\text{eau}} \cdot V \cdot g = 10^3 \times 35 \times 10^{-3} \times 9,81 = \mathbf{343 \text{ N}}$$

#### 3. Première méthode

$$P_{\text{relative}} \text{ de l'eau} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} = 2730 \text{ Pa} (= 278 \text{ mmCE})$$

#### Deuxième méthode

Soit  $F_{\text{air}}$  = valeur de la force exercée par l'air

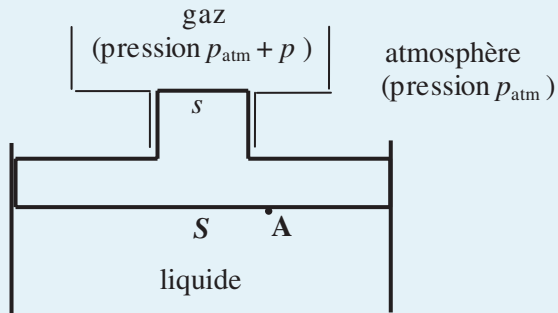
$$\text{pression de l'eau} = \frac{F_{\text{eau}} + F_{\text{air}}}{\pi \cdot R^2} = \frac{F_{\text{eau}} + (\pi \cdot R^2) \cdot p_{\text{atm}}}{\pi \cdot R^2} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} + p_{\text{atm}}$$

$$P_{\text{relative}} \text{ de l'eau} = \text{pression de l'eau} - p_{\text{atm}} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} = 2730 \text{ Pa}$$

### EXERCICE 3 Pression exercée par un piston

On considère le dispositif suivant :

Le piston est caractérisé par des sections  $S$  et  $s$ , et une masse  $m$  ; déterminez l'expression de la pression au point A.



### Solution

$$p_A = \frac{\text{force}}{\text{surface}}$$

La force  $F$  exercée sur la surface  $S$  de liquide est telle que :

$$F = p_{\text{atm}} \cdot (S - s) + (p_{\text{atm}} + p) \cdot s + m \cdot g$$

(force due à l'**atmosphère**) + (force due au **gaz**) + (force due au **piston**)

$$F = p_{\text{atm}} \cdot S + p \cdot s + m \cdot g$$

$$\text{donc } p_A = \frac{p_{\text{atm}} \cdot S + p \cdot s + m \cdot g}{S} = p_{\text{atm}} + \frac{p \cdot s + m \cdot g}{S}$$

## 1. Modèle du gaz parfait

### ■ Description

Soit une masse  $m$  de gaz à l'équilibre qui contient  $N$  molécules dans un volume  $V$ . Ce gaz est supposé parfait si les molécules en mouvement sont sans interactions entre elles (en dehors des chocs qu'elles subissent entre elles ou contre les parois du récipient qui accueille le gaz), ce qui suppose une densité moléculaire faible. Chaque molécule est assimilée à un point matériel ayant un mouvement de translation rectiligne entre deux chocs.

### ■ Équation d'état

On montre que la pression  $P$  du gaz parfait est reliée à sa température absolue  $T$  (en K) par la relation :

$$PV = N k T$$

où  $k$  est la constante de Boltzmann.

- Pour une mole de molécules,  $N = N_A$  (nombre d'Avogadro) donc :

$$PV = (N_A k) T$$

$$N_A k = 6,022 \cdot 10^{23} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{J} \cdot \text{K}^{-1} = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On pose  $R = N_A k$  que l'on appelle constante molaire des gaz parfaits.

- Pour  $n$  moles de molécules,  $N = n N_A$  et la relation

$$PV = nRT$$

constitue l'équation d'état du gaz parfait dans laquelle les grandeurs  $P$ ,  $V$  et  $T$  sont les variables d'état du gaz.

**Unités S.I.** :  $P$  en Pa ;  $V$  en  $\text{m}^3$  ;  $T$  en K.

On utilise également deux autres formes pour exprimer l'équation d'état du gaz parfait. Puisque  $n = \frac{m}{M}$  où  $M$  est la masse molaire du gaz, on a  $PV = m \frac{R}{M} T$ , c'est-à-dire :

$$PV = m r T$$

en posant  $r = \frac{R}{M}$  la constante massique du gaz étudié supposé parfait.

Enfin, la masse volumique du gaz est  $\rho = \frac{m}{V}$  donc on a également :

$$P = \rho r T$$

On considérera qu'un gaz réel se comportera comme un gaz parfait lorsque sa pression est faible (densité moléculaire  $\frac{N}{V}$  faible).

## 2. Lois de Joule

### ■ Première loi de Joule

L'unique forme d'énergie des  $N$  molécules contenues dans le volume  $V$  de gaz parfait est l'énergie cinétique de translation des molécules (les molécules d'un gaz parfait étant ponctuelles, elles ne peuvent avoir une énergie cinétique de rotation). On appelle énergie interne  $U$  du gaz parfait la somme des énergies cinétiques des  $N$  molécules.

L'énergie interne  $U$  d'un gaz parfait ne dépend que de sa température et au cours d'une transformation d'une quantité de gaz  $n$  (en mol) ou  $m$  (en kg) :

$$\Delta U = n C_V \Delta T = m c_V \Delta T$$

$C_V$  : capacité thermique molaire à volume constant en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

$c_V$  : capacité thermique massique à volume constant en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### ■ Deuxième loi de Joule

L'enthalpie  $H$  d'un gaz parfait ne dépend que de sa température et par définition :  $H = U + PV$

Au cours d'une transformation d'une quantité de gaz  $n$  (en mol) ou  $m$  (en kg) :

$$\Delta H = n C_p \Delta T = m c_p \Delta T$$

$C_p$  : capacité thermique molaire à pression constante en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

$c_p$  : capacité thermique massique à pression constante en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Puisque les deux capacités thermiques massiques sont telles que :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \text{ ou } \gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

On en déduit :

$$\Delta H = \gamma \Delta U$$

### 3. Relation de Mayer

La relation de Mayer pour un gaz parfait s'écrit :

$$C_P - C_V = R \quad \text{ou} \quad c_P - c_V = r$$

### 4. Les gaz réels

#### ■ Description

Soit une masse  $m$  de gaz réel à l'équilibre de  $N$  molécules contenues dans un réservoir de volume  $V$ . Il faut tenir compte :

- des interactions entre les molécules ;
- du volume propre occupé par les  $N$  molécules.

Du fait de ces interactions intermoléculaires, la pression d'un gaz réel est inférieure, toute chose égale par ailleurs, à celle du même gaz s'il était considéré comme parfait. De plus, les  $N$  molécules se déplacent dans un volume inférieur au volume  $V$  du réservoir puisque les molécules ont un volume propre. (Le volume à soustraire de  $V$  est appelé covolume et est supérieur au volume propre des molécules).

#### ■ Équations d'état des gaz réels

Les équations d'état suivantes (pour  $n$  moles) permettent de décrire dans des domaines de températures et de pression plus ou moins larges les gaz réels :

##### Équation d'état de Van der Waals

$$\left( P + n^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

$a$  et  $b$  constantes du gaz réel étudié.



**REMARQUE**

Lorsque le volume  $V$  est très grand (faible densité moléculaire), on a :

$$V \gg nb \text{ et } n^2 \frac{a}{V^2} \ll P$$

On retrouve alors l'équation d'état du gaz parfait :  $PV = nRT$ .

**Équation d'état de Clausius**

$$P(V - nb) = nRT$$

$b$  constante du gaz réel étudié.

**Équation d'état de Dieterici**

$$P(V - nb) = nRT e^{-\frac{na}{RTV}}$$

$a$  et  $b$  constantes du gaz réel étudié.

**EXERCICE 1 Gaz parfait**

1. Une certaine quantité de gaz supposé parfait occupe un volume  $V_1 = 1,0 \text{ L}$  à la température  $\theta_1 = -20 \text{ °C}$  sous la pression  $P_1 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . À quelle pression  $P_2$  faut-il comprimer ce gaz pour diminuer de moitié le volume lorsque la température est  $\theta_2 = 40 \text{ °C}$  ?
2. Calculez les variations d'énergie interne et d'enthalpie de cette quantité de gaz.
3. Cette quantité de gaz subit ensuite une détente adiabatique et réversible qui le ramène jusqu'à sa pression initiale  $P_1$ . Calculez la température  $\theta_3$  et le volume occupé  $V_3$  en fin de détente.

On admettra, que dans ce cas, la loi suivante est vérifiée :  $P \cdot V^\gamma = \text{cste}$ .

**Données :**

$$C_V = 20,8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ; \gamma = 1,4.$$

$$\text{Constante des gaz parfaits : } R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

**Solution**

1. L'équation d'état à laquelle satisfait la masse  $m$  de gaz parfait dans l'état 1 permet d'écrire :  $P_1 V_1 = m r T_1$

Dans l'état 2, l'équation d'état s'écrit :  $P_2 V_2 = m r T_2$  avec  $V_2 = \frac{V_1}{2}$

Le rapport membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{P_2 \left( \frac{V_1}{2} \right)}{P_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

On en déduit (avec  $T_1$  et  $T_2$  en kelvins) :  $P_2 = 2 \frac{T_2}{T_1} \times P_1 = 2,51 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2. La quantité  $n$ , exprimée en mol, du gaz est :

$$n = \frac{P_1 V_1}{R T_1} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

La première loi de Joule permet de calculer la variation d'énergie interne que subit la quantité  $n$  du gaz :

$$\Delta U = n C_V (T_2 - T_1) = 56,2 \text{ J}$$

La variation d'enthalpie  $\Delta H$  que subit le gaz est :

$$\Delta H = \gamma \Delta U = 78,7 \text{ J}$$

3. Au cours de la détente, on peut écrire :  $P_2 \cdot V_2^\gamma = P_3 \cdot V_3^\gamma$  avec  $P_3 = P_1$  et  $V_2 = \frac{V_1}{2}$  donc :

$$V_3 = V_2 \times \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0,96 \text{ L}$$

On en déduit la température  $T_3 = \frac{P_3 V_3}{n R} = 258,4 \text{ K}$  soit  $\theta_3 = -14,6 \text{ }^\circ\text{C}$ .

## EXERCICE 2 Coefficients thermoélastiques

Pour tous les fluides, on définit trois nombres positifs appelés coefficients thermoélastiques du fluide : le coefficient  $\alpha$  de dilatation isobare, le coefficient  $\beta$  d'augmentation de pression isochore et le coefficient  $X_T$  de compressibilité isotherme.

Déterminez  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $X_T$  dans le cas du gaz parfait.

Que vaut le quotient :  $\frac{\alpha}{\beta X_T}$  ?

**Solution**

Le coefficient de dilatation isobare a pour expression :  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

La dérivée  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$  de  $V$  par rapport à  $T$  (à pression  $P$  constante) est :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{nRT}{P} \right)_P = \frac{nR}{P} \text{ donc } \alpha = \frac{1}{V} \times \frac{nR}{P} = \frac{nR}{nRT}.$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

Le coefficient d'augmentation de pression isochore a pour expression :  $\beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ .

La dérivée  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$  de  $P$  par rapport à  $T$  (à volume  $V$  constant) est :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{nRT}{V} \right)_V = \frac{nR}{V} \text{ donc } \beta = \frac{1}{P} \times \frac{nR}{V} = \frac{nR}{nRT}$$

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Le coefficient de compressibilité isotherme a pour expression :  $X_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ .

La dérivée  $\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$  de  $V$  par rapport à  $P$  (à température  $T$  constante) est :

$$\frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{nRT}{P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2} \text{ donc } X_T = -\frac{1}{V} \times \left( -\frac{nRT}{P^2} \right) = \frac{nRT}{P \times (PV)} \text{ soit :}$$

$$X_T = \frac{1}{P}$$

On en déduit :

$$\frac{\alpha}{\beta X_T} = P$$

Le quotient  $\frac{\alpha}{\beta X_T}$  est donc égal à  $P$  la pression du gaz parfait. Cette relation reste vraie pour tout fluide homogène d'équation d'état  $f(P, V, T) = 0$ .

### EXERCICE 3 Équation d'état de Van der Waals

#### Données :

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Le gaz considéré est le dioxygène. Il obéit à l'équation d'état de Van der Waals qui s'écrit pour  $n = 1 \text{ mol}$  ( $V$  est donc le volume molaire) :

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

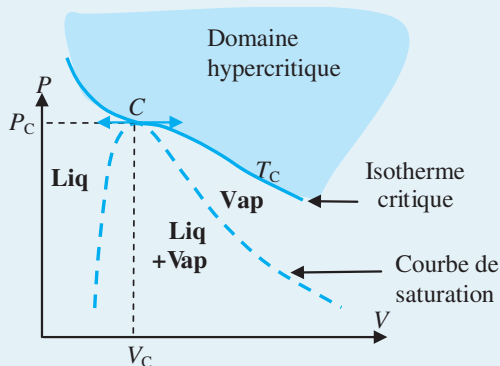
1. Calculez les coordonnées, notées  $P_c$ ,  $T_c$  et  $V_c$ , du point critique C en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $R$ .
2. Donnez l'expression de  $b$  en fonction de  $R$ ,  $P_c$  et  $T_c$ . Calculez  $b$  sachant que :  $P_c = 50,4.10^5 \text{ Pa}$  et  $T_c = 154,6 \text{ K}$ . En déduire l'expression de  $a$ .
3. On admet que le covolume  $b$  représente quatre fois le volume d'une mole de molécules de gaz, assimilées à des sphères de diamètre  $\sigma$ . Calculez  $\sigma$ .
4. Le facteur de compressibilité  $Z$  d'un gaz se définit par :  $Z = \frac{PV_m}{RT}$  où  $V_m$  est le volume molaire. Exprimez  $Z_c$  au point critique du gaz  $\text{O}_2$  considéré comme un gaz de Van der Waals. Concluez sur le modèle sachant que la valeur expérimentale est  $Z_c = 0,29$ .

#### Solution

Dans le diagramme de Clapeyron ( $P$ ,  $V$ ), l'isotherme critique présente un point d'inflexion avec une tangente horizontale. De plus, d'un point de vue physique, on ne pourra pas liquéfier un gaz dont la température est supérieure à la température critique.

À l'aide de l'équation d'état de Van der Waals, on peut écrire :

$$P_c = \frac{RT_c}{(V_c - b)} - \frac{a}{V_c^2} \quad (1)$$



Puisque l'isotherme critique est à tangente horizontale au point C, alors  $\left(\frac{dP}{dV}\right)_C = 0$  soit :

$$-\frac{RT_C}{(V_C - b)^2} + \frac{2a}{V_C^3} = 0 \quad (2)$$

Le point critique C étant un point d'inflexion alors  $\left(\frac{d^2P}{dV^2}\right)_C = 0$  soit :

$$\frac{RT_C}{(V_C - b)^3} - \frac{3a}{V_C^4} = 0 \quad (3)$$

À l'aide de (2) et (3), on obtient le volume molaire critique :  $V_C = 3b$

Puis en remplaçant dans (2), on trouve :  $T_C = \frac{8a}{27bR}$

À l'aide de (1), on obtient :  $P_C = \frac{a}{27b^2}$

2. Puisque  $\frac{a}{27b} = bP_C$ , on en déduit :  $T_C = \frac{8bP_C}{R}$  donc :

$$b = \frac{RT_C}{8P_C} \quad \text{et} \quad a = \frac{27R^2T_C^2}{64P_C}$$

Les calculs donnent :  $b = 3,18 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $a = 0,138 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$

3. En assimilant une molécule à une sphère de diamètre  $\sigma$  (diamètre de Van der Waals), son volume est  $v_0 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$ .

Le volume d'une mole de molécules est donc  $V = \mathcal{N}_A \times v_0$  et le covolume a pour expression :

$$b = 4 (\mathcal{N}_A \times v_0)$$

Donc :  $b = 4 \mathcal{N}_A \times \frac{4}{3}\pi\frac{\sigma^3}{8}$  soit :  $\sigma^3 = \frac{3b}{2\pi\mathcal{N}_A}$  ; on en déduit :

$$\sigma = \left(\frac{3b}{2\pi\mathcal{N}_A}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Le calcul donne, pour la valeur de  $b$  précédente :  $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m (0,29 nm)}$ .

4. Au point critique,  $Z_c = \frac{P_c V_c}{RT_c}$  ; puisque  $\frac{RT_c}{P_c} = 8b$  et  $V_c = 3b$ , on obtient  $Z_c = \frac{3}{8} = 0,375$  (valeur indépendante de la nature du gaz).

Pour le gaz  $O_2$ , l'écart relatif observé entre les valeurs expérimentale et modélisée

est  $\frac{0,375 - 0,29}{0,29} = 29,3 \%$ . Le modèle de Van der Waals ne semble pas particuliè-

rement adapté pour le gaz  $O_2$  à la pression critique.

Ce modèle récompensa néanmoins le physicien hollandais Johannes Diderik Van der Waals en 1910 du prix Nobel de physique pour ses travaux sur l'équation d'état des gaz et liquides.