

**TOUT EN
FICHES**

L'ESSENTIEL DE

**MÉCANIQUE DES
FLUIDES**

**TOUT EN
FICHES**

Pascal Bigot

Professeur en BTS au lycée
Marie Curie (Nogent-sur-Oise)

Richard Mauduit

Professeur en BTS au lycée
Robert Schuman (Le Havre)

Eric Wenner

Professeur en BTS au lycée
Robert Schuman (Le Havre)

L'ESSENTIEL DE

**MÉCANIQUE DES
FLUIDES**

BTS

DUNOD

Graphisme de couverture : Pierre-André Gualino
Illustrations de couverture : shutterstock_12802474

Cet ouvrage existe en deux versions dans les collections
L'Essentiel BTS et l'Essentiel Licence / IUT

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique

s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2011, 2015, 2021

11, rue Paul Bert 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-081815-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

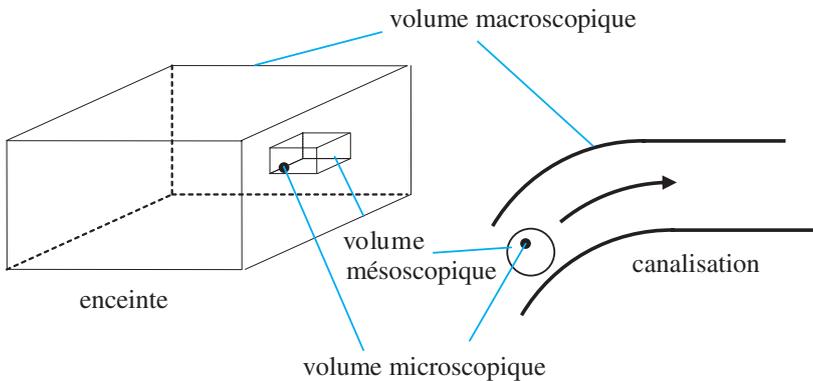
Table des matières

Fiche 1	Généralités sur les fluides – pression	1
Fiche 2	Fluides gazeux	8
Fiche 3	Relation fondamentale de la statique des fluides	17
Fiche 4	Pression atmosphérique	26
Fiche 5	Mesures de pressions	33
Fiche 6	Forces de pression : poussée sur une paroi	43
Fiche 7	Forces de pression : poussée d'Archimède	51
Fiche 8	Tension superficielle et tensiométrie	60
Fiche 9	Écoulement des fluides parfaits	69
Fiche 10	Mesures de débits	76
Fiche 11	Mesures de vitesses	85
Fiche 12	Viscosité et viscosimétrie	95
Fiche 13	Rhéologie	104
Fiche 14	Calculs de perte de charge	112
Fiche 15	Les pompes	122
Fiche 16	Les turbines hydrauliques	135
Fiche 17	Le théorème de Bernoulli généralisé	144
Fiche 18	Travail de synthèse	155
Fiche 19	Dynamique des fluides compressibles	163
Fiche 20	Théorème d'Hugoniot	172

1. Les fluides

■ Grandeurs mésoscopiques

En mécanique des fluides, les grandeurs définies le sont pour des volumes mésoscopiques (encore appelés éléments de fluides), *intermédiaires entre le volume microscopique et le volume macroscopique*.



Une grandeur définie sur un volume microscopique ne concerne que trop peu de particules et n'est donc pas continue.

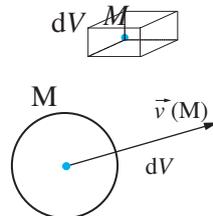
Une grandeur définie sur un volume macroscopique ne permet pas de rendre compte des variations de cette grandeur à l'intérieur de ce volume.

EXEMPLES DE GRANDEURS DÉFINIES AU NIVEAU MÉSCOSCOPIQUE

$$\text{Masse volumique (en } M) = \frac{dm}{dV}$$

avec dm = masse de l'ensemble des particules dans le volume dV .

$\vec{v}(M)$ = moyenne des vecteurs vitesses des particules contenues dans le volume dV .



■ Différence solide/fluide

Dans un solide, les particules sont rigidement liées les unes aux autres, contrairement à un fluide : *fluides = liquides et gaz*.

■ Différence liquide/gaz

Au niveau macroscopique, contrairement à un liquide, un gaz occupe toujours l'ensemble du volume qui lui est proposé.

Au niveau microscopique, contrairement à un gaz, les particules d'un liquide sont très proches.

D'autre part, liquides et gaz diffèrent par l'ordre de grandeur :

- de leur masse volumique (en moyenne 1 000 fois supérieure pour un liquide) ;
- de leur aptitude à subir une variation de volume à température constante (en moyenne 100 000 fois supérieure pour un gaz).

■ Grandeurs usuelles

- **Pression P en un point** : voir partie 2.
- **Température T** : grandeur qui traduit le degré d'agitation des particules.
- **Volume V** : partie de l'espace occupée.
- **Masse volumique ρ (« rho »)** : $\rho = \frac{m}{V}$ avec m = masse de fluide occupant le volume V .
- **Densité d** : $d = \frac{m}{m_R}$ avec m = masse de fluide occupant le volume V et m_R = masse d'un corps R de référence occupant le même volume V .

Le corps de référence est l'eau pour les liquides et l'air pour les gaz.

On a aussi : $d = \frac{\rho}{\rho_R}$ avec ρ_R = masse volumique du corps R .

■ Fluides incompressibles et compressibles

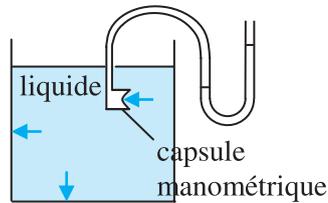
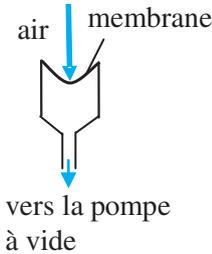
Un fluide incompressible est tel que sa masse volumique reste la même en tout point : *les liquides peuvent être considérés comme incompressibles*.

Un fluide compressible est tel que sa masse volumique peut varier d'un point à l'autre : *les gaz peuvent être considérés comme compressibles*.

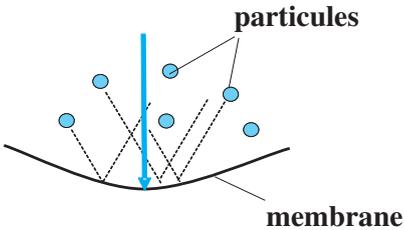
2. Pression en un point d'un fluide au repos

Forces pressantes

Les molécules d'un *fluide quelconque, au repos*, sont en mouvement incessant (par exemple, quelques gouttes de colorant ajoutées dans un verre d'eau finissent par diffuser dans la totalité du liquide) et exercent donc des forces pressantes en tout point du fluide.



Interprétation microscopique :

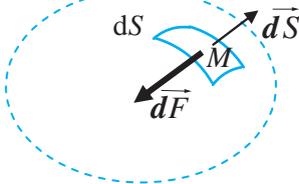


La force de pression résultante est principalement due aux chocs des particules

Par raison de symétrie, une force de pression est localement normale à l'élément de surface sur lequel elle s'exerce (la viscosité n'intervenant pas pour un fluide au repos).

Pression absolue en un point

(surface S)



La pression p_M au point M est définie

telle que : $d\vec{F} = -p_M \cdot d\vec{S}$

on a alors : $p_M = \frac{dF}{dS}$

Unité S.I. : le Pascal (Pa)

Si on isole dans un fluide un volume V fictif délimité par une surface S fermée, les particules extérieures à V exercent sur une surface élémentaire dS (centrée sur le point M) de S la force pressante $d\vec{F}$ normale (pour un fluide au repos) à dS .

$$\text{« pression »} = \text{« } \frac{\text{force}}{\text{surface}} \text{ »} ; \text{ « force »} = \text{« pression } \times \text{ surface »}$$

Autres unités utilisées

- le bar : 1 bar = 10^5 Pa
- l’atmosphère (atm) : 1 atm = $1,013 \cdot 10^5$ Pa = 1,013 bar
- le millimètre de mercure (mm de Hg) 760 mm de Hg = 1 atm
- le mètre colonne d’eau (m CE) 10 m CE = 1 bar

■ Pression relative (ou effective) en un point

La pression relative $p_{\text{rel}}(M)$ en un point M est telle que :

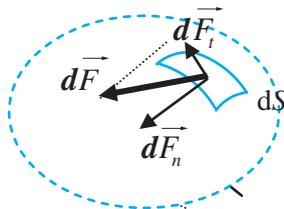
$$p_{\text{rel}}(M) = p_M - p_{\text{atm}}$$

avec p_{atm} = pression atmosphérique (elle peut varier !).

La présence d’atmosphère fait qu’elle contribue à la pression exercée ; la pression relative correspond donc à la pression exercée par le fluide seul.

■ Cas d’un fluide en mouvement

Dans ce cas, la force pressante $d\vec{F}$ n’est plus forcément normale à dS , en particulier si le fluide est visqueux.

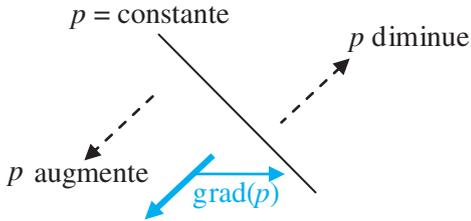


$$d\vec{F} = d\vec{F}_n \text{ (composante normale)} + d\vec{F}_t \text{ (composante tangentielle)}$$

La pression en M est telle que : $p_M = \frac{dF_n}{dS}$

Gradient de pression

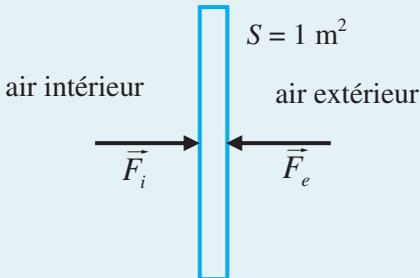
C'est le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{u}_x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{u}_y + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{u}_z$



(en coordonnées cartésiennes) ; il permet d'indiquer localement comment varie la pression. Ce vecteur est perpendiculaire à une surface isobare.

EXERCICE 1 Force pressante exercée par l'air atmosphérique

Calculez la force exercée de part et d'autre sur 1 m^2 de vitre ; on supposera que la pression atmosphérique est la même de chaque côté et égale à 1 bar.

Solution

$$F_e = F_i = p_{\text{atm}} \cdot S = 10^5 \times 1 = 10^5 \text{ N}$$

C'est environ le poids d'une masse de 10^4 kg (10 tonnes).

Tout se passe comme si un éléphant tenait verticalement sur chaque côté de la vitre.

$$S = 1 \text{ m}^2$$

EXERCICE 2 Pression au fond d'un réacteur

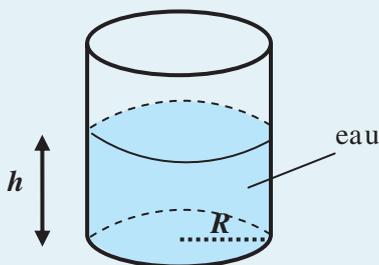
Un réacteur cylindrique à fond plat, de rayon $R = 20 \text{ cm}$ et de hauteur $H = 50 \text{ cm}$, contient 35 L d'eau.

1. Calculez la hauteur h d'eau dans le réacteur.

2. Calculez la force exercée par l'eau sur le fond du réacteur.
3. Calculez la pression relative, en Pascal puis en mmCE, exercée par l'eau sur le fond du réacteur (trouvez deux méthodes).

Données : $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Solution



$$\begin{aligned} 1. \text{ Volume d'eau} &= V = (\pi \cdot R^2) \cdot h \\ 35 \cdot 10^{-3} &= \pi \cdot (0,2)^2 \cdot h \\ h &= 0,278 \text{ m} = \mathbf{27,8 \text{ cm}} \end{aligned}$$

2. Soit F_{eau} = valeur de la force exercée par l'eau $F_{\text{eau}} = m_{\text{eau}} \cdot g$ (poids de l'eau)
 $= \rho_{\text{eau}} \cdot V \cdot g = 10^3 \times 35 \times 10^{-3} \times 9,81 = \mathbf{343 \text{ N}}$

3. Première méthode

$$P_{\text{relative}} \text{ de l'eau} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} = 2730 \text{ Pa} (= 278 \text{ mmCE})$$

Deuxième méthode

Soit F_{air} = valeur de la force exercée par l'air

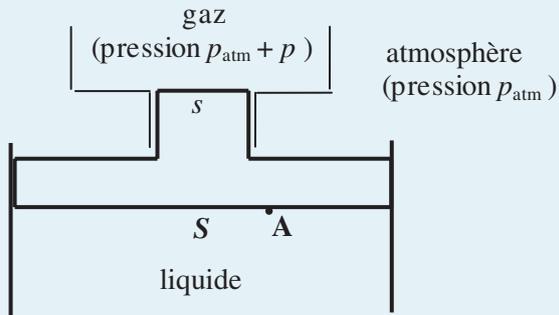
$$\text{pression de l'eau} = \frac{F_{\text{eau}} + F_{\text{air}}}{\pi \cdot R^2} = \frac{F_{\text{eau}} + (\pi \cdot R^2) \cdot p_{\text{atm}}}{\pi \cdot R^2} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} + p_{\text{atm}}$$

$$P_{\text{relative}} \text{ de l'eau} = \text{pression de l'eau} - p_{\text{atm}} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} = 2730 \text{ Pa}$$

EXERCICE 3 Pression exercée par un piston

On considère le dispositif suivant :

Le piston est caractérisé par des sections S et s , et une masse m ; déterminez l'expression de la pression au point A.



Solution

$$p_A = \frac{\text{force}}{\text{surface}}$$

La force F exercée sur la surface S de liquide est telle que :

$$F = p_{\text{atm}} \cdot (S - s) + (p_{\text{atm}} + p) \cdot s + m \cdot g$$

(force due à l'**atmosphère**) + (force due au **gaz**) + (force due au **piston**)

$$F = p_{\text{atm}} \cdot S + p \cdot s + m \cdot g$$

$$\text{donc } p_A = \frac{p_{\text{atm}} \cdot S + p \cdot s + m \cdot g}{S} = p_{\text{atm}} + \frac{p \cdot s + m \cdot g}{S}$$

1. Modèle du gaz parfait

Description

Soit une masse m de gaz à l'équilibre qui contient N molécules dans un volume V . Ce gaz est supposé parfait si les molécules en mouvement sont sans interactions entre elles (en dehors des chocs qu'elles subissent entre elles ou contre les parois du récipient qui accueille le gaz), ce qui suppose une densité moléculaire faible. Chaque molécule est assimilée à un point matériel ayant un mouvement de translation rectiligne entre deux chocs.

Équation d'état

On montre que la pression P du gaz parfait est reliée à sa température absolue T (en K) par la relation :

$$PV = N k T$$

où k est la constante de Boltzmann.

- Pour une mole de molécules, $N = N_A$ (nombre d'Avogadro) donc :

$$PV = (N_A k) T$$

$$N_A k = 6,022 \cdot 10^{23} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{J} \cdot \text{K}^{-1} = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On pose $R = N_A k$ que l'on appelle constante molaire des gaz parfaits.

- Pour n moles de molécules, $N = n N_A$ et la relation

$$PV = nRT$$

constitue l'équation d'état du gaz parfait dans laquelle les grandeurs P , V et T sont les variables d'état du gaz.

Unités S.I. : P en Pa ; V en m^3 ; T en K.

On utilise également deux autres formes pour exprimer l'équation d'état du gaz parfait. Puisque $n = \frac{m}{M}$ où M est la masse molaire du gaz, on a $PV = m \frac{R}{M} T$, c'est-à-dire :

$$PV = m r T$$

en posant $r = \frac{R}{M}$ la constante massique du gaz étudié supposé parfait.

Enfin, la masse volumique du gaz est $\rho = \frac{m}{V}$ donc on a également :

$$P = \rho r T$$

On considérera qu'un gaz réel se comportera comme un gaz parfait lorsque sa pression est faible (densité moléculaire $\frac{N}{V}$ faible).

2. Lois de Joule

■ Première loi de Joule

L'unique forme d'énergie des N molécules contenues dans le volume V de gaz parfait est l'énergie cinétique de translation des molécules (les molécules d'un gaz parfait étant ponctuelles, elles ne peuvent avoir une énergie cinétique de rotation). On appelle énergie interne U du gaz parfait la somme des énergies cinétiques des N molécules.

L'énergie interne U d'un gaz parfait ne dépend que de sa température et au cours d'une transformation d'une quantité de gaz n (en mol) ou m (en kg) :

$$\Delta U = n C_V \Delta T = m c_V \Delta T$$

C_V : capacité thermique molaire à volume constant en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

c_V : capacité thermique massique à volume constant en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

■ Deuxième loi de Joule

L'enthalpie H d'un gaz parfait ne dépend que de sa température et par définition : $H = U + PV$

Au cours d'une transformation d'une quantité de gaz n (en mol) ou m (en kg) :

$$\Delta H = n C_p \Delta T = m c_p \Delta T$$

C_p : capacité thermique molaire à pression constante en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

c_p : capacité thermique massique à pression constante en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Puisque les deux capacités thermiques massiques sont telles que :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \text{ ou } \gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

On en déduit :

$$\Delta H = \gamma \Delta U$$

3. Relation de Mayer

La relation de Mayer pour un gaz parfait s'écrit :

$$C_P - C_V = R \quad \text{ou} \quad c_P - c_V = r$$

4. Les gaz réels

■ Description

Soit une masse m de gaz réel à l'équilibre de N molécules contenues dans un réservoir de volume V . Il faut tenir compte :

- des interactions entre les molécules ;
- du volume propre occupé par les N molécules.

Du fait de ces interactions intermoléculaires, la pression d'un gaz réel est inférieure, toute chose égale par ailleurs, à celle du même gaz s'il était considéré comme parfait. De plus, les N molécules se déplacent dans un volume inférieur au volume V du réservoir puisque les molécules ont un volume propre. (Le volume à soustraire de V est appelé covolume et est supérieur au volume propre des molécules).

■ Équations d'état des gaz réels

Les équations d'état suivantes (pour n moles) permettent de décrire dans des domaines de températures et de pression plus ou moins larges les gaz réels :

Équation d'état de Van der Waals

$$\left(P + n^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

a et b constantes du gaz réel étudié.

REMARQUE

Lorsque le volume V est très grand (faible densité moléculaire), on a :

$$V \gg nb \text{ et } n^2 \frac{a}{V^2} \ll P$$

On retrouve alors l'équation d'état du gaz parfait : $PV = nRT$.

Équation d'état de Clausius

$$P(V - nb) = nRT$$

b constante du gaz réel étudié.

Équation d'état de Dieterici

$$P(V - nb) = nRT e^{-\frac{na}{RTV}}$$

a et b constantes du gaz réel étudié.

EXERCICE 1 Gaz parfait

1. Une certaine quantité de gaz supposé parfait occupe un volume $V_1 = 1,0 \text{ L}$ à la température $\theta_1 = -20 \text{ °C}$ sous la pression $P_1 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. À quelle pression P_2 faut-il comprimer ce gaz pour diminuer de moitié le volume lorsque la température est $\theta_2 = 40 \text{ °C}$?
2. Calculez les variations d'énergie interne et d'enthalpie de cette quantité de gaz.
3. Cette quantité de gaz subit ensuite une détente adiabatique et réversible qui le ramène jusqu'à sa pression initiale P_1 . Calculez la température θ_3 et le volume occupé V_3 en fin de détente.

On admettra, que dans ce cas, la loi suivante est vérifiée : $P \cdot V^\gamma = \text{cste}$.

Données :

$$C_V = 20,8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ; \gamma = 1,4.$$

$$\text{Constante des gaz parfaits : } R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Solution

1. L'équation d'état à laquelle satisfait la masse m de gaz parfait dans l'état 1 permet d'écrire : $P_1 V_1 = m r T_1$

Dans l'état 2, l'équation d'état s'écrit : $P_2 V_2 = m r T_2$ avec $V_2 = \frac{V_1}{2}$

Le rapport membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{P_2 \left(\frac{V_1}{2} \right)}{P_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

On en déduit (avec T_1 et T_2 en kelvins) : $P_2 = 2 \frac{T_2}{T_1} \times P_1 = 2,51 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2. La quantité n , exprimée en mol, du gaz est :

$$n = \frac{P_1 V_1}{R T_1} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

La première loi de Joule permet de calculer la variation d'énergie interne que subit la quantité n du gaz :

$$\Delta U = n C_V (T_2 - T_1) = 56,2 \text{ J}$$

La variation d'enthalpie ΔH que subit le gaz est :

$$\Delta H = \gamma \Delta U = 78,7 \text{ J}$$

3. Au cours de la détente, on peut écrire : $P_2 \cdot V_2^\gamma = P_3 \cdot V_3^\gamma$ avec $P_3 = P_1$ et $V_2 = \frac{V_1}{2}$ donc :

$$V_3 = V_2 \times \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0,96 \text{ L}$$

On en déduit la température $T_3 = \frac{P_3 V_3}{n R} = 258,4 \text{ K}$ soit $\theta_3 = -14,6 \text{ }^\circ\text{C}$.

EXERCICE 2 Coefficients thermoélastiques

Pour tous les fluides, on définit trois nombres positifs appelés coefficients thermoélastiques du fluide : le coefficient α de dilatation isobare, le coefficient β d'augmentation de pression isochore et le coefficient X_T de compressibilité isotherme.

Déterminez α , β et X_T dans le cas du gaz parfait.

Que vaut le quotient : $\frac{\alpha}{\beta X_T}$?

Solution

Le coefficient de dilatation isobare a pour expression : $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

La dérivée $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ de V par rapport à T (à pression P constante) est :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{P} \right)_P = \frac{nR}{P} \text{ donc } \alpha = \frac{1}{V} \times \frac{nR}{P} = \frac{nR}{nRT}.$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

Le coefficient d'augmentation de pression isochore a pour expression : $\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$.

La dérivée $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ de P par rapport à T (à volume V constant) est :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{V} \right)_V = \frac{nR}{V} \text{ donc } \beta = \frac{1}{P} \times \frac{nR}{V} = \frac{nR}{nRT}$$

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Le coefficient de compressibilité isotherme a pour expression : $X_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$.

La dérivée $\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ de V par rapport à P (à température T constante) est :

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{nRT}{P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2} \text{ donc } X_T = -\frac{1}{V} \times \left(-\frac{nRT}{P^2} \right) = \frac{nRT}{P \times (PV)} \text{ soit :}$$

$$X_T = \frac{1}{P}$$

On en déduit :

$$\frac{\alpha}{\beta X_T} = P$$

Le quotient $\frac{\alpha}{\beta X_T}$ est donc égal à P la pression du gaz parfait. Cette relation reste vraie pour tout fluide homogène d'équation d'état $f(P, V, T) = 0$.

EXERCICE 3 Équation d'état de Van der Waals

Données :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Le gaz considéré est le dioxygène. Il obéit à l'équation d'état de Van der Waals qui s'écrit pour $n = 1 \text{ mol}$ (V est donc le volume molaire) :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

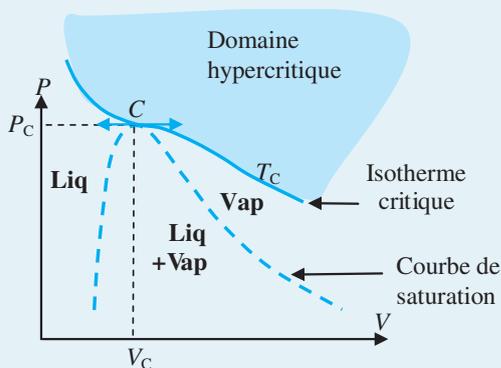
1. Calculez les coordonnées, notées P_c , T_c et V_c , du point critique C en fonction de a , b et R .
2. Donnez l'expression de b en fonction de R , P_c et T_c . Calculez b sachant que : $P_c = 50,4.10^5 \text{ Pa}$ et $T_c = 154,6 \text{ K}$. En déduire l'expression de a .
3. On admet que le covolume b représente quatre fois le volume d'une mole de molécules de gaz, assimilées à des sphères de diamètre σ . Calculez σ .
4. Le facteur de compressibilité Z d'un gaz se définit par : $Z = \frac{PV_m}{RT}$ où V_m est le volume molaire. Exprimez Z_c au point critique du gaz O_2 considéré comme un gaz de Van der Waals. Concluez sur le modèle sachant que la valeur expérimentale est $Z_c = 0,29$.

Solution

Dans le diagramme de Clapeyron (P , V), l'isotherme critique présente un point d'inflexion avec une tangente horizontale. De plus, d'un point de vue physique, on ne pourra pas liquéfier un gaz dont la température est supérieure à la température critique.

À l'aide de l'équation d'état de Van der Waals, on peut écrire :

$$P_c = \frac{RT_c}{(V_c - b)} - \frac{a}{V_c^2} \quad (1)$$



Puisque l'isotherme critique est à tangente horizontale au point C, alors $\left(\frac{dP}{dV}\right)_C = 0$ soit :

$$-\frac{RT_C}{(V_C - b)^2} + \frac{2a}{V_C^3} = 0 \quad (2)$$

Le point critique C étant un point d'inflexion alors $\left(\frac{d^2P}{dV^2}\right)_C = 0$ soit :

$$\frac{RT_C}{(V_C - b)^3} - \frac{3a}{V_C^4} = 0 \quad (3)$$

À l'aide de (2) et (3), on obtient le volume molaire critique : $V_C = 3b$

Puis en remplaçant dans (2), on trouve : $T_C = \frac{8a}{27bR}$

À l'aide de (1), on obtient : $P_C = \frac{a}{27b^2}$

2. Puisque $\frac{a}{27b} = bP_C$, on en déduit : $T_C = \frac{8bP_C}{R}$ donc :

$$b = \frac{RT_C}{8P_C} \quad \text{et} \quad a = \frac{27R^2T_C^2}{64P_C}$$

Les calculs donnent : $b = 3,18 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ et $a = 0,138 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$

3. En assimilant une molécule à une sphère de diamètre σ (diamètre de Van der Waals), son volume est $v_0 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$.

Le volume d'une mole de molécules est donc $V = N_A \times v_0$ et le covolume a pour expression :

$$b = 4 (N_A \times v_0)$$

Donc : $b = 4 N_A \times \frac{4}{3}\pi\frac{\sigma^3}{8}$ soit : $\sigma^3 = \frac{3b}{2\pi N_A}$; on en déduit :

$$\sigma = \left(\frac{3b}{2\pi N_A}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Le calcul donne, pour la valeur de b précédente : $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m (0,29 nm)}$.

4. Au point critique, $Z_c = \frac{P_c V_c}{RT_c}$; puisque $\frac{RT_c}{P_c} = 8b$ et $V_c = 3b$, on obtient $Z_c = \frac{3}{8} = 0,375$ (valeur indépendante de la nature du gaz).

Pour le gaz O_2 , l'écart relatif observé entre les valeurs expérimentale et modélisée

est $\frac{0,375 - 0,29}{0,29} = 29,3 \%$. Le modèle de Van der Waals ne semble pas particuliè-

rement adapté pour le gaz O_2 à la pression critique.

Ce modèle récompensa néanmoins le physicien hollandais Johannes Diderik Van der Waals en 1910 du prix Nobel de physique pour ses travaux sur l'équation d'état des gaz et liquides.