Topologie algébrique

Yves Félix, Daniel Tanré

Topologie algébrique

DUNOD

Illustration de couverture :
© Christopher Ursitti - Fotolia.com

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084658-0

Table des matières

Avant-Propos

Savez-vous,

– que, sur la Terre, il existe toujours deux lieux antipodaux ayant même température et même altitude ?

– que si l'on essaie de recouvrir le globe terrestre par 3 fermés, on ne peut éviter que l'un d'entre eux contienne deux points antipodaux ?

– que la plupart des jeux admettent une position d'équilibre dans laquelle aucun des joueurs n'a intérêt à changer sa stratégie ?

– que l'on ne peut peigner une boule de billard chevelue sans éviter un “tourbillon” ?

– qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers en dimension 3 ?

– que si l'on veut recouvrir complètement une chambre à air par des rustines en forme de triangles, il faudra au moins 7 sommets ?

Avec la diversité d'un tel inventaire, on peut imaginer que les preuves font intervenir plusieurs domaines mathématiques mais il n'en est rien. Ces propriétés se démontrent facilement avec les méthodes de ce qui est appelée la Topologie Algébrique et nous le faisons dans ce livre. Appelée parfois la science du caoutchouc, la Topologie Algébrique identifie des objets que l'on peut déformer continûment (sans rupture) de l'un vers l'autre. Bien sûr, avec de telles méthodes, la taille n'importe plus. On ne peut cependant pas identifier tout et c'est souvent le fait que deux objets ne sont pas déformables l'un sur l'autre qui constitue l'information importante. Par exemple, on peut déformer un triangle sur un disque mais, comme on le verra assez vite, on ne peut déformer un pneu sur un globe. Plus formellement, il s'agit d'une identification d'objets par ce que l'on appelle une relation d'équivalence. Comme lorsque l'on considère le modulo 2 d'un nombre entier, et que l'on identifie ainsi tous les nombres pairs entre eux et tous les nombres impairs entre eux, ne voyant plus que deux éléments. Il ne subsiste ainsi qu'une information partielle pour chaque nombre, cette dernière s'avérant plus facile d'utilisation et quelquefois suffisante pour résoudre un problème particulier.

Cette démarche d'identification s'applique aussi bien aux ensembles qu'aux nombres. Par exemple, on peut identifier deux ensembles X et Y s'il existe une bijection entre eux. Lorsque ces ensembles sont munis d'une structure additionnelle, l'identification requiert l'existence d'une bijection compatible avec la structure étudiée :

- pour des espaces topologiques, on impose l'existence d'un homéomorphisme,
- pour des variétés différentiables (plus simplement pour des ouverts de $\mathbb{R}^n$), l'identification est la notion de difféomorphisme.

La structure additionnelle modifie profondément les classes d'isomorphismes. Par exemple,

- on peut montrer que les *ensembles* $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont en bijection, pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$,
- si l'on considère deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, reliés par un difféomorphisme $f: U \to V$, alors l'approximation linéaire, $df: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, est un isomorphisme linéaire, donc on a obligatoirement $n = p$.

Avec l'une des structures, on identifie tous les espaces $\mathbb{R}^n$ entre eux, avec l'autre on en identifie aucun. Qu'en est-il pour les *espaces topologiques* $\mathbb{R}^n$? Peut-on avoir $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ avec $n \neq p$? Abordons cette question par des exemples simples :

- pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, la réponse est non : si $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une application continue, on choisit un point quelconque $a \in \mathbb{R}$ et on considère la restriction $\varphi_a: \mathbb{R}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}^2\backslash\{\varphi(a)\}$ de φ. Si φ est un homéomorphisme, il en est de même pour φ_a, ce qui est impossible car $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^2\backslash\{\varphi(a)\}$ l'est.
- pour $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ un raisonnement identique ne fonctionne pas car $\mathbb{R}^2\backslash\{a\}$ et $\mathbb{R}^3\backslash\{\varphi(a)\}$ sont tous les deux connexes. On pourrait envisager d'étudier l'image de $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ où Δ est une droite mais l'image d'une droite par une application continue n'est généralement pas une droite et on perd la possibilité d'argumenter comme ci-dessus.

Restons donc avec les espaces privés d'un point. Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}^2\backslash\{a\}$ et un point $y_0 \in \mathbb{R}^3\backslash\{\varphi(a)\}$. Par définition, un lacet d'origine x_0 est un chemin continu de source et but le point x_0. Considérons un tel lacet entourant le point a. En tirant sur les extrémités du lacet, il est impossible de ramener toute la boucle sur le point x_0 sans passer par le point a, tout en restant dans le plan $\mathbb{R}^2$. Par contre, dans $\mathbb{R}^3$ il est possible de ramener cette boucle en x_0 tout en évitant le point $\varphi(a)$. Dans les chapitres 1 et 3, nous formalisons cette idée et donnons une démonstration précise du fait que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^3$. Pour cela, nous sommes amenés à introduire deux notions :

- la déformation continue d'applications continues,
- les lacets d'origine un point.

L'ensemble des lacets, étudiés à déformation continue près, constitue un groupe appelé *groupe fondamental ou groupe de Poincaré* (1895) et noté $\pi_1(X)$. Il est le premier objet d'intérêt de ce cours qui s'articule ainsi.

Le *Chapitre 1* est essentiellement consacré à la preuve que le groupe fondamental du cercle est égal au groupe additif des entiers, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. De ce résultat, nous pouvons déjà déduire plusieurs conséquences :

- une preuve courte du *théorème de D'Alembert* ;
- le *théorème de Brouwer :* toute application continue du disque de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même a un point fixe ;
- le *théorème de Borsuk-Ulam :* pour toute application continue f de la sphère S^2 dans le plan $\mathbb{R}^2$, il existe un point $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$. De façon plus imagée : il existe toujours sur la Terre deux points antipodaux ayant même altitude et même température ;
- le *théorème de Lusternik-Schnirelmann :* si la sphère S^2 est recouverte par 3 ensembles fermés, alors l'un d'entre eux contient des points antipodaux ;
- le *théorème de la dimension :* un ouvert de $\mathbb{R}^2$ n'est jamais homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour $n \neq 2$.

Le *Chapitre 2* est un chapitre de Topologie Générale. Partant des résultats connus des années antérieures, nous introduisons la notion de topologie quotient et d'action de groupe sur un espace topologique. Le but est d'enrichir notre herbier d'espaces et d'obtenir les outils nécessaires à leur étude. Dans ce chapitre, est introduite aussi la notion de surface, définie intuitivement comme un objet à deux dimensions. Nous présentons leur classification en montrant que les surfaces orientables compactes et sans bord sont, à homéomorphisme près, la sphère S^2, le tore T, le tore à 2 trous T_2, etc. À ce moment du cours, nous ne pouvons pas montrer que deux quelconques de ces objets ne sont pas homéomorphes. Pour cela, nous avons besoin de savoir calculer leur groupe fondamental. C'est le théorème de Seifert et Van Kampen introduit au *Chapitre 3* qui nous permet de le faire. Ce Chapitre 3 comporte quelques difficultés d'ordre algébrique, comme la définition d'un groupe par générateurs et relations, mais, une fois celles-ci levées, nous pouvons déterminer le groupe fondamental des surfaces et terminer leur classification commencée au chapitre précédent.

Le calcul de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ mené au Chapitre 1 s'est effectué à partir des propriétés de l'application exponentielle de $\mathbb{R}$ dans S^1. Dans le *Chapitre 4,* nous synthétisons ces propriétés pour en tirer la notion de *revêtement.* Un revêtement est une application continue, $p\colon E \to B$, telle que tout point de B admet un voisinage V vérifiant la propriété suivante : en imaginant V sous la forme d'une assiette, l'image réciproque de V est une pile d'assiettes identiques à V. L'espace B est appelé la base, E l'espace total et l'ensemble des points de E envoyés par p sur un point $x \in B$ donné, la fibre au-dessus de x. Une particularité remarquable des revêtements est que la propriété topologique d'existence du relèvement d'une application est équivalente à une propriété algébrique :

plus précisément, si on se donne un revêtement p et une application continue φ, comme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X, \end{tikzcd}$$

il existe une application continue $\tilde{\varphi}$ telle que $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ si, et seulement si, on a $\varphi_* \pi_1(Y) \subset p_* \pi_1(\tilde{X})$, où φ_* et p_* sont les applications induites par φ et p entre les groupes fondamentaux. Nous démontrons l'existence de nombreux exemples de revêtements à partir de l'action d'un groupe G sur un espace topologique E. Une question naturelle est alors de savoir si tous les revêtements s'obtiennent de cette façon et, une nouvelle fois, nous avons un problème topologique dont la réponse est une caractérisation algébrique, à savoir :

un revêtement $p \colon E \to X$ s'obtient comme quotient de E sous l'action d'un groupe si, et seulement si, $p_* \pi_1(E)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(X)$. Un tel revêtement est dit galoisien.

Dans un revêtement, deux groupes interagissent, le groupe fondamental $\pi_1(B, x)$, qui permute les éléments de la fibre au-dessus de x, et le groupe des automorphismes du revêtement, qui permute les assiettes dans les piles. Nous étudions en détail cette interaction, en distinguant le cas galoisien, d'un abord assez facile, du cas général, qui fait l'objet de la Section 4.6. Terminons la présentation de ce chapitre clé, en mentionnant que le groupe fondamental sert également à classifier les revêtements, cf. Théorème 4.18, et que la dernière section explicite la classification des revêtements dont le groupe fondamental de la base est finiment présenté, avec l'exemple du nœud de trèfle complètement détaillé lorsque la pile comporte 3 assiettes.

Après ce tour d'horizon du groupe fondamental et de ses implications dans divers problèmes, nous revenons aux applications du calcul de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ présentées dans le Chapitre 1. Pour y éliminer les restrictions de dimension, il nous faut utiliser des structures de dimensions supérieures, comme les triangles ou les tétraèdres. C'est ce que nous faisons avec *l'homologie* qui constitue la deuxième partie de ce livre. En fait, nous avons, non pas un groupe, mais une famille de groupes abéliens, constitués de sommes formelles de points, de chemins, de triangles dans lesquelles on identifie les points qui sont les extrémités d'un chemin, les sommes de chemins qui sont le bord d'un triangle, les sommes de triangles qui sont les faces d'un tétraèdre, etc. Ces groupes se révèlent plus faciles à déterminer que le groupe fondamental et aussi plus faciles à utiliser mais, au départ, ils présentent le paradoxe d'être plus difficiles à introduire car ils nécessitent la formalisation de ces sommes d'objets géométriques. Ce sont les *complexes de chaînes* étudiés au *Chapitre 5*. Nous y développons les techniques nécessaires, en particulier les suites exactes, à la base de la plupart des résultats, et présentons deux complexes de chaînes, le complexe des chaînes simpliciales d'un complexe simplicial et celui des chaînes singulières d'un espace topologique. Les divers complexes étudiés sont définis sur des familles de R-modules, où R est un anneau commutatif. La possibilité de changer l'anneau de référence s'avère très utile et l'anneau $\mathbb{Z}$ y joue un rôle central, permettant de retrouver tous les autres, à travers le théorème des coefficients universels, présenté dans la dernière section.

Au *Chapitre 6*, nous reprenons l'étude de l'homologie singulière introduite au chapitre précédent. Le premier résultat important est le Théorème d'excision ; avec lui, on peut calculer l'homologie d'un espace en en "excisant" une partie, ce qui s'avère très efficace, comme le montre le calcul des groupes d'homologie des sphères. Un deuxième résultat très pratique est l'existence d'une suite exacte longue, dite de Mayer-Vietoris, qui tire profit de l'existence d'un recouvrement par deux ouverts. Ce chapitre comporte également l'identification des homologies simpliciale et singulière associées à un complexe simplicial, et l'introduction d'un nouveau complexe de chaînes issu de la structure cellulaire de certains espaces. Nous montrons également comment une application "transfert" permet de connecter les homologies de l'espace total et de la base d'un revêtement et l'utilisons pour l'homologie, à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, des espaces projectifs réels. Une fois ces prémices mises en place, nous pouvons reprendre les théorèmes du Chapitre 1 et les étendre à une dimension quelconque. Parmi les applications non topologiques de ces résultats, mentionnons les liens étroits entre les équilibres de la théorie des jeux et le théorème du point fixe de Brouwer ; ce sont les équilibres de Nash présentés dans la Section 6.7.

À ce stade, nous disposons d'un côté du groupe fondamental et de l'autre d'une famille de groupes d'homologie mais n'avons pas établi de liens entre eux. Dans le *Chapitre 7*, nous montrons que le premier groupe d'homologie est l'abélianisé du groupe fondamental et nous étendons la construction du groupe fondamental pour obtenir les groupes d'homotopie d'ordre supérieur, dont les éléments sont les classes d'homotopie relative d'applications continues pointées de S^n dans X. Ces groupes contiennent de nombreuses informations mais sont en général très difficiles à calculer. Dans ce Chapitre 7, nous mettons en place les éléments de base de la théorie et leurs interactions, groupes d'homotopie, fibrés localement triviaux, fibrations. Nous présentons ensuite, sans démonstration, quelques résultats fondamentaux, en renvoyant pour les preuves vers des ouvrages plus avancés. Nous terminons par deux thèmes, l'un extérieur à la Topologie montre comment la question de l'existence d'un choix social dans une société fait intervenir le type d'homotopie de l'espace des choix possibles. Le deuxième ouvre une fenêtre sur les espaces de configurations, à la lisière de la Topologie et de la Géométrie.

Ce livre peut être utilisé dans sa totalité pour un enseignement annuel de Topologie algébrique mais il s'adapte très bien à des enseignements semestriels en offrant plusieurs possibilités : un cours classique sur la théorie des revêtements, tel qu'il figure dans la plupart des premières années de Master, constitué des 4 premiers chapitres et de leurs exercices, ou un cours d'introduction à l'homologie, comprenant les deux premiers chapitres et les trois derniers. Il peut également être utilisé pour une présentation équilibrée de l'homologie et de l'homotopie, à partir des 6 premiers chapitres, en limitant le Chapitre 4 à ses premières sections.

La bibliographie est exceptionnellement longue car, en plusieurs endroits, dans le cours lui-même ou au détour d'un exercice, nous avons abordé un possible développement et avons offert au lecteur la possibilité de poursuivre dans cette voie, en consultant les références recommandées. Il est important de noter que certains articles du milieu du vingtième siècle ont apporté une solution non triviale à des problèmes ouverts et sont accessibles aux lecteurs de ce livre. Mentionnons en particulier,

- l'article de J.E. Connett [12] sur les applications périodiques du cercle, dont nous avons extrait les Exercices 4.4, 4.5 et 4.6,
- l'article de S. Kakutani [25] dont la preuve est proposée en exercice et qui a ouvert des développements comme [46],
- le célèbre résultat de J. Nash, [33], et la synthèse écrite par D. Gale, [19], avec l'exemple du jeu de Hex.

Quant aux divers livres figurant dans cette bibliographie, signalons ceux de E.H. Spanier [43], (un magnifique ouvrage de référence), de C. Godbillon, [20], (pour une présentation en français, avec une preuve du Théorème de Seifert et Van Kampen utilisant la théorie des revêtements, ainsi qu'une introduction à la cohomologie des variétés différentiables), de G.E. Bredon, [9], (avec une présentation très ouverte vers la géométrie des variétés) ou de A. Hatcher, [22], dont les chapitres 3 et 4 constituent une suite attrayante pour le lecteur désireux de poursuivre son apprentissage de la Topologie Algébrique. Nous n'avons pas présenté d'aspect historique des notions introduites, le livre de J. Dieudonné, [13], y suppléant de façon exhaustive.

Principales notations utilisées

$X \backslash A$	Complémentaire de A dans X
$\mathcal{S}_n$	Groupe symétrique à n lettres
c_x	Chemin constant sur x
$\overline{A}$	Adhérence de A
Int A	Intérieur de A
$\{1\}$ ou 0	Groupe trivial réduit à un élément
Im f	Image d'une application
Ker f	Noyau d'un homomorphisme
$f \simeq g$	Applications homotopes, 2
$f \simeq g, \quad \text{rel } A$	Applications homotopes relativement à A, 2
$[X, Y]$	Ensemble de classes d'homotopie, 2
$X \simeq Y$	Espaces de même type d'homotopie, 3
E^n	Boule de $\mathbb{R}^n$, 4
S^{n-1}	Sphère de dimension $n-1$, 4
$\alpha \simeq \beta \ \text{ rel } \{0, 1\}$	Lacets homotopes à extrémités fixées, 5
$\overline{\alpha}$	Chemin inverse du chemin α, 5
$\alpha.\beta$	Chemin composé, 5
$\pi_1(X, x_0)$	Groupe fondamental, 8
$\varphi_* = \pi_1(\varphi)$	Homomorphisme induit entre les groupes fondamentaux, 8
exp	Application exponentielle, 11
X/A	Espace quotient de X par A, 32
$X \vee X'$	Bouquet de deux espaces, 35
$X \cup_f e^n$	Attachement d'une cellule, 35
O(n), SO(n)	Groupes orthogonal et spécial orthogonal, 39
U(n) et SU(n)	Groupes unitaire et spécial unitaire, 39
$P_n(\mathbb{R})$	Espace projectif réel, 41
$P_n(\mathbb{C})$	Espace projectif complexe, 43
X/G	Espace des orbites, 39
G/H	Espace des classes à gauche, 39
$V_{k,n}(\mathbb{R})$	Variétés de Stiefel, 43
$\text{Vect}_k(\mathbb{R}^n)$	Variétés de Grassmann, 43
K_{lein}	Bouteille de Klein, 46
$M\#N$	Somme connexe, 48
T_g	Tore à g trous, 49
$G_1 * G_2$	Produit libre de deux groupes, 66

$\langle t_1, \dots, t_n \rangle$	Groupe libre à n générateurs, 67
G_{ab}	Abélianisé du groupe G, 68
$G_1 *_H G_2$	Somme amalgamée de groupes, 68
$C_{p,q}$	Nœud torique, 79
$A(p)$	Groupe des automorphismes d'un revêtement, 86
$\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}\, p^{-1}(x)$	Groupe des bijections équivariantes, 102
$N(H)$	Normalisateur d'un sous-groupe, 103
$Z_n(C_*, d)$	Module des cycles de degré n,123
$B_n(C_*, d)$	Module des bords de degré n, 123
$H_*(C_*, d)$	Homologie de (C_*, d), 123
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$	Enveloppe convexe des points $(a_1, \dots, a_n)$, 129
Δ^n	Simplexe standard, 130
$\partial\Delta^n$	Bord du simplexe standard, 131
$(C_*(K; R), d)$	Complexe des chaînes simpliciales de K, 132
$H_*(K; R)$	Homologie simpliciale du complexe simplicial K, 132
ε_n^i	i-ème face du simplexe standard, 134
$(S_*(X; R), d)$	Complexe des chaînes singulières de X, 135
$H_*(X; R)$	Homologie singulière de l'espace X, 135
$\widetilde{S}_*(X; R)$	Complexe singulier réduit, 138
$\widetilde{H}_*(X; R)$	Homologie réduite, 138
$\mathrm{Tor}(A, B)$	Tor de deux groupes abéliens, 145
$(sA)_*$	Suspension d'un complexe de chaînes, 151
$(Cf)_*$	Cône sur un morphisme de chaînes, 151
$S_*(X, A; R)$	Complexe des chaînes relatives, 160
$H_*(X, A; R)$	Homologie singulière relative, 160
$[X, A), (Y, B)]$	Ensemble de classes d'homotopie relative, 160
$S_q^{\mathcal{U}}(X; R)$	Complexe des chaînes $\mathcal{U}$-petites, 162
$\deg f$	Degré d'une application $f : S^n \to S^n$, 171
$T(S^n)$	Fibré tangent à la sphère, 173
$\mathrm{Cell}_*(X; R)$	Complexe des chaînes cellulaires, 177
$\chi(C_*; \Bbbk)$	Caractéristique d'Euler-Poincaré, 178
$C(X)$	Cône sur un espace X, 190
ΣX	Suspension d'un espace X, 190
$\pi_n(X, x_0)$	Groupe d'homotopie, 200
$\mathrm{Hur}_n(X)$	Homomorphisme de Hurewicz, 214
$\widetilde{\Sigma} X$	Suspension réduite, 215
$\mathrm{Sp}^n X$	Produit symétrique, 218
$F(X, n)$	Espace des configurations ordonnées, 219
$C(X, n)$	Espace des configurations non ordonnées, 220
Y^X	Topologie compacte ouverte, 224

Chapitre 1

Le groupe de Poincaré

Pour tous les mathématiciens, un carré est différent d'un disque, sauf pour un petit peuple appelé “Topologues" qui, grâce à la notion d'homotopie, ne considèrent les objets qu'à une déformation continue près. Dans ce chapitre, nous introduisons l'homotopie et le groupe fondamental dans le cadre général des espaces topologiques et en établissons les propriétés principales. Nous calculons ensuite le groupe fondamental des sphères S^n pour $n \geq 1$ et en déduisons de nombreuses applications concrètes.

Le cœur de ce chapitre est la détermination du groupe fondamental du cercle. Nous invitons le lecteur à en lire la preuve avec attention ; les principaux ingrédients de la théorie des revêtements y sont présents et nous serviront de guide dans le Chapitre 4.

1.1 HOMOTOPIE

Nous supposons le lecteur familier avec les notions basiques de topologie générale, cf. par exemple le livre de Hervé Queffelec [36]. Un bref rappel des notions principales est aussi présenté dans l'Appendice A. Pour éviter toute confusion, nous indiquons dès à présent que dans ce texte un espace compact est un espace topologique, non nécessairement séparé, dans lequel tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini. Cette définition est en effet celle qui est utilisée dans la plupart des ouvrages de Topologie Algébrique. Rappelons que si X et Y sont deux espaces topologiques, la *topologie produit* sur $X \times Y$ a pour ouverts les réunions d'ouverts du type $O_1 \times O_2$, avec O_1 ouvert de X et O_2 ouvert de Y. Les deux projections p_X et p_Y de $X \times Y$ sur X et sur Y sont alors des applications continues. D'autre part, une application $f : Z \to X \times Y$ est continue, si et seulement si, ses composantes $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ le sont. Rappelons aussi le Théorème de Tychonoff : si X et Y sont compacts, l'espace produit $X \times Y$ est un espace compact, cf. [36, Chapitre II. Section V] ou Exercice A.3. Ces préliminaires étant faits, nous introduisons maintenant le concept principal de ce cours.

Définition 1.1 *Deux applications continues, f et g, d'un espace X vers un espace Y, sont* homotopes *s'il existe une application continue $F\colon X \times [0,1] \to Y$, telle que $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = g(x)$. L'application F est appelée* homotopie de f vers g. *Dans la suite, cette relation d'homotopie est notée $f \simeq g$ ou $F\colon f \simeq g$, s'il y a nécessité d'expliciter l'homotopie de f vers g.*

Une homotopie F est donc une déformation continue de l'application f vers l'application g. Commençons par un exemple simple.

Exemple : *Toute application continue non surjective d'un espace X quelconque vers la sphère S^2 est homotope à une application constante de X vers S^2.*
Rappelons que la sphère S^2 est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ de norme 1. Soit $f\colon X \to S^2$ une application continue telle que le point $v_0 \in S^2$ ne se trouve pas dans l'image de f. On définit une application continue $F\colon X \times [0,1] \to S^2$ par

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) - tv_0}{\|(1-t)f(x) - tv_0\|}.$$

Le point v_0 n'étant pas atteint, l'origine de $\mathbb{R}^3$ n'appartient à aucun des segments d'extrémités $f(x)$ et $-v_0$. L'application F est donc bien définie et continue sur $X \times [0,1]$. Elle vérifie $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = -v_0$; c'est une homotopie entre f et l'application constante sur $-v_0$.

Plus généralement, nous imposons à l'homotopie des restrictions sur un sous-espace A de la source, le cas précédent correspondant à $A = \varnothing$.

Définition 1.2 *Deux applications continues f et g, d'un espace X vers un espace Y, égales sur une partie $A \subset X$, sont* homotopes relativement à A *s'il existe une homotopie F entre f et g telle que $F(a,t) = f(a) = g(a)$, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $a \in A$. Dans la suite, nous notons $f \simeq g$ rel A cette relation.*

Proposition 1.3 *Considérons deux espaces topologiques, X et Y, une partie A de X, et une application $\psi\colon A \to Y$. L'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues de X vers Y, coïncidant avec ψ sur A. L'ensemble quotient est noté $[X,Y]$ si $A = \varnothing$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier les trois propriétés d'une relation d'équivalence.

– *L'homotopie est réflexive,* l'application définie par $F(x,t) = f(x)$ étant une homotopie relative de f vers f.

– *L'homotopie est symétrique.* Si F est une homotopie relative de f vers g, l'application définie par $F'(x,t) = F(x, 1-t)$ est une homotopie relative de g vers f.

– *L'homotopie est transitive.* Considérons deux homotopies relatives, $F\colon f \simeq g$ et $G\colon g \simeq h$, et définissons une application H par

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Le Lemme 1.4 nous assure la continuité de l'application H. Des égalités $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$, $H(a,t) = F(a,t) = G(a,t) = f(a) = g(a)$, nous déduisons que H est une homotopie de f vers h relativement à A.

Lemme 1.4 *Considérons deux espaces topologiques, X et Y, F et F' deux fermés de X, $f\colon F \to Y$ et $f'\colon F' \to Y$ deux applications continues dont les restrictions à l'intersection $F \cap F'$ coïncident. Alors, l'application h, définie sur $F \cup F'$ par $h(x) = f(x)$ si $x \in F$, $h(x') = f'(x')$ si $x' \in F'$, est continue de $F \cup F'$ dans Y.*

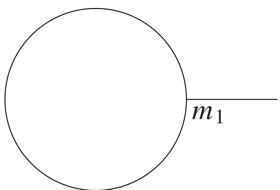
Démonstration. Il suffit de constater que l'image réciproque d'un fermé de Y par l'application h est un fermé de X.

Nous utilisons la relation d'homotopie pour identifier des espaces de la façon suivante.

Définition 1.5 *Deux espaces X et Y ont* même type d'homotopie *s'il existe deux applications continues $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to X$ telles que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Cette relation est notée $X \simeq Y$ et les applications f et g sont appelées* équivalences d'homotopie.

Par exemple, deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.

Exemple : Les deux sous-espaces suivants du plan $\mathbb{R}^2$, $X = S^1$ et $Y = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\})$, *ont même type d'homotopie et ne sont pas homéomorphes.*



Notons m_1 le point de coordonnées $(1,0)$. Il n'existe pas d'homéomorphisme $f\colon Y \to X$ car $X - \{f(m_1)\}$ est connexe alors que $Y - \{m_1\}$ ne l'est pas. Pour justifier le fait que ces espaces ont le même type d'homotopie, considérons l'injection canonique $\iota\colon X \to Y$ et l'application $g\colon Y \to X$ définie par $g(x) =$

x si $x \in S^1$ et $g(x) = m_1$ si $x \in [1,2] \times \{0\}$. On a $g \circ \iota = \mathrm{id}_X$ et $\iota \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ par l'homotopie $F\colon Y \times [0,1] \to Y$ définie par $F(x,t) = x$ si $x \in S^1$ et $F(x,t) = tx + (1-t)m_1$ si $x \in [1,2] \times \{0\}$.

Exemple : *Les espaces $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et S^1 ont même type d'homotopie.* Considérons l'inclusion canonique $\iota\colon S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et l'application $g\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to S^1$ définie par $g(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$. On a $g \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}$ et $\iota \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2\backslash\{0\}}$ par l'homotopie $F\colon (\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ définie par $F(x,t) = tx + (1-t)\dfrac{x}{\|x\|}$.

Définition 1.6 *La* boule de dimension *n est l'espace $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Son bord est la* sphère de dimension $n-1$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. *Dans le cas $n = 2$, on parle de disque E^2 et de cercle S^1.*

Rappelons que la projection stéréographique induit un homéomorphisme entre la sphère S^2 privée d'un point et le plan $\mathbb{R}^2$, cf. [36, Chapitre VI. Théorème II.9].

Définition 1.7 *Un espace X est* contractile *si l'application identité sur X est homotope à une application constante.*

Exemple : *Un sous-ensemble convexe, C, de $\mathbb{R}^n$ est contractile.* L'homotopie entre l'identité et l'application constante sur le point $x_0 \in C$ est l'application continue $F\colon C \times [0,1] \to C$ définie par $F(x,t) = (1-t)x_0 + tx$. La boule E^n et l'espace $\mathbb{R}^n$ sont donc contractiles pour $n \geq 1$.

Définition 1.8

1. *Une partie A d'un espace X est un* rétracte *de X s'il existe une application continue $r\colon X \to A$ telle que $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, où $\iota\colon A \to X$ est l'injection canonique. L'application r est appelée* rétraction.
2. *Une partie A de X est un* rétracte par déformation *s'il existe une rétraction r telle que $\iota \circ r$ soit homotope à l'identité sur X. Dans ce cas, les applications ι et r sont des équivalences d'homotopie.*

En particulier, un espace X est contractile si, et seulement si, il existe un point $x_0 \in X$ tel que $\{x_0\}$ soit un rétracte par déformation de X. Des exemples précédents et des exercices 1.2 et 1.5, nous déduisons $\{0\} \simeq E^n \simeq \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \simeq S^n \simeq S^n \times [0,1]$. La notion de groupe fondamental nous permettra de montrer qu'il n'existe pas d'équivalence d'homotopie entre $\mathbb{R}^n$ et S^1, pour tout $n \geq 1$, ainsi qu'entre S^1 et S^n pour tout $n > 1$.