

Table des matières

I. Probabilités et indépendance

1. Introduction	1
2. Ensemble des éventualités	2
2.1. Préliminaires	2
2.2. Relation entre le langage ordinaire et le langage ensembliste	4
2.3. Probabilité d'un événement	5
3. Trois types d'espaces probabilisés	7
3.1. Espace probabilisé fini	7
3.2. Espace probabilisé dénombrable	9
3.3. Espace probabilisé non dénombrable	10
4. Propriétés élémentaires	12
4.1. Passage au complémentaire	12
4.2. Réunion croissante et intersection décroissante	13
4.3. Inégalité de Boole	14
4.4. Formule de Poincaré	14
5. Probabilités conditionnelles	17
5.1. Un petit paradoxe	17
5.2. Définition	18
5.3. Formule des probabilités totales	21
5.4. Formule de Bayes	22
6. Indépendance	24
7. Quelques problèmes classiques	27
7.1. Trois cartes, une rouge et deux noires	27
7.2. Trois bancs à deux places	30
7.3. Partage avant la fin de la partie	31
7.4. L'aiguille de Buffon	34

8. Suites d'événements indépendants	36
8.1. Réunion d'événements indépendants	36
8.1.1. Cas d'une réunion finie	36
8.1.2. Cas d'une réunion infinie	37
8.1.3. Lemme de la série divergente	38
8.2. Lemme de Borel-Cantelli	39
9. Exercices	40

II. Mesures

1. Introduction	43
2. Algèbres de parties et tribus	44
2.1. Définitions	44
2.2. Tribu engendrée	46
3. Mesures	48
3.1. Définition d'une mesure	48
3.2. Opérations sur les mesures	51
3.3. Mesures discrètes	52
4. Construction de mesures	53
5. Mesure de Lebesgue	54
5.1. Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}	54
5.2. Propriétés	54
5.3. Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	54
6. Mesures et fonctions de répartition sur \mathbb{R}	55
6.1. Fonction de répartition d'une mesure finie	55
6.2. Mesure de Stieltjes	57
6.3. Correspondance	58
6.4. Mesures discrètes et diffuses sur \mathbb{R}	59
6.5. Décomposition d'une mesure finie sur \mathbb{R}	60
7. Le jeu de pile ou face	62
7.1. Mesure de probabilité sur un espace de suites	62
7.2. Le jeu de pile ou face	63
7.3. Développement dyadique	64
8. Appendice	66
8.1. Définition d'une mesure par prolongement	66
8.2. Unicité du prolongement	66
9. Exercices	68

III. Variables aléatoires réelles

1. Introduction	73
2. Loi d'une variable aléatoire	74
3. Fonction de répartition d'une VA	77
4. Principales lois de probabilité	82
5. Loi conditionnelle	89
6. Simulation d'une VA de loi donnée	90
6.1. Fonction d'une variable aléatoire	91
6.2. Exemple de simulation d'une variable aléatoire X	92
6.3. Inverse de Lévy d'une fonction de répartition	93
6.4. La simulation par inverse de Lévy	95
7. Image d'une densité de probabilité	96
8. Exercices	97

IV. Intégrale et moments

1. Introduction	101
2. L'intégrale des fonctions mesurables	102
3. Moments d'une variable aléatoire réelle	107
3.1. Valeur moyenne ou espérance	107
3.2. Variance	112
4. Espérance conditionnelle par rapport à un événement	113
5. Inégalités classiques	115
5.1. Inégalités de Markov et Tchebychev	115
5.2. Inégalité de Jensen	116
5.3. Inégalité de Cramér-Rao	117
6. Formule de Taylor généralisée	118
7. Appendice	122
7.1. Fonctions mesurables	123
7.2. L'intégrale des fonctions mesurables	124
7.3. Permutation des signes \lim , \sum et \int	127
7.4. Intégrales dépendant d'un paramètre	128
7.5. Espaces $L^1(E)$ et $L^2(E)$	129
7.5.1. L'espace $L^1(E)$	129
7.5.2. L'espace $L^2(E)$	130
7.6. Intégrale par rapport à une mesure discrète	132
7.7. Mesures à densité	134
7.8. Le Théorème de transfert	135
7.9. Changement de variable dans \mathbb{R}^n	137
8. Exercices	140

V. Variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n

1. Introduction	145
2. Mesure produit	146
3. Couple de deux variables aléatoires	149
4. Indépendance de deux variables aléatoires	155
4.1. Indépendance dans le cas discret	155
4.2. Indépendance dans le cas à densité	159
5. Convolution et régularisation	163
6. Changement de variables	169
7. Moyenne et matrice de covariance	170
8. Régression linéaire	173
9. Espérance et loi conditionnelle	174
9.1. L'espérance conditionnelle	174
9.1.1. Cas où X est discrète	178
9.1.2. Cas où le couple (X, Y) possède une densité	179
9.2. Loi conditionnelle	180
9.2.1. Cas où X est discrète	183
9.2.2. Cas où le couple (X, Y) possède une densité.	184
10. Généralisation à la dimension n	187
10.1. Loi conjointe	187
10.2. Moyenne et variance	187
10.3. Indépendance	189
10.4. Régression linéaire	196
10.5. Espérance conditionnelle	197
10.6. Tribu engendrée par une VA	197
10.7. Lois conjointes et Inégalité de Bell	198
10.7.1. Retour sur la loi conjointe de deux VA	198
10.7.2. Loi conjointe de trois VA	200
10.7.3. Inégalité de Bell	202
11. Appendice	203
11.1. Produit de deux mesures de probabilité	203
11.2. Mesure produit sur l'espace des suites	205
12. Exercices	207

VI. Fonctions caractéristiques

1. Introduction	209
2. La fonction caractéristique	210
2.1. Définitions et propriétés	210
2.2. Fonction caractéristique d'une VA à valeurs dans un réseau.	213
2.2.1. Cas où X est à valeurs dans $\alpha\mathbb{Z}$	213
2.2.2. Cas général	214
2.3. Fonction caractéristique d'une VA à densité	215
2.4. La fonction $\ln(\varphi_X)$ et les cumulants	217

3. Fonction génératrice d'une VA à valeurs dans \mathbb{N}	218
4. De la fonction caractéristique à la loi	222
4.1. Le Théorème d'inversion	222
4.2. Formules d'inversion	225
5. Généralisation à \mathbb{R}^n	230
5.1. Définitions et propriétés	230
5.2. Inversion	231
5.3. Fonction caractéristique et indépendance	232
5.4. Formule d'inversion	235
6. Exercices	236

VII. Variables gaussiennes

1. Introduction	239
2. Définitions et propriétés	239
3. Variables gaussiennes et indépendance	242
4. Réduction d'une variable gaussienne	246
5. Échantillons gaussiens	248
5.1. Moyenne et variance empiriques	249
5.2. Estimation de la moyenne d'une loi gaussienne de variance donnée	250
5.3. Estimation de la moyenne d'une loi gaussienne de variance inconnue	252
6. Exercices	257

VIII. Suites de variables aléatoires

1. Introduction	261
2. Convergence presque sûre	262
3. Convergence en probabilité	264
4. Convergence en loi	267
4.1. Définition et premières propriétés	267
4.2. Convergence des fonctions de répartition	271
4.3. Cas discret et à densité	274
4.4. Convergence fonctions caractéristiques	277
4.5. Généralisation à \mathbb{R}^m	281
5. Suites de VA indépendantes	282
5.1. Définition et existence	282
5.2. Simulation par la méthode du rejet	285
5.3. Propriétés asymptotiques	287
6. Appendice. Démonstration du Théorème de Lévy	290
7. Exercices	293

IX. Loïs des grands nombres

1. Introduction	295
2. Loi faible des grands nombres	295
2.1. Loi faible des grands nombres dans $L^2(\Omega)$	296
2.2. Loi faible dans $L^1(\Omega)$	299
3. Loi forte des grands nombres	300
4. Théorème central-limite	311
4.1. Théorème central-limite dans \mathbb{R}	311
4.2. Formule de Stirling généralisée	313
4.3. Estimation d'une probabilité	315
4.4. Une extension du théorème central limite	319
4.5. Convergence vers la loi de Poisson	322
4.6. Théorème central-limite dans \mathbb{R}^m	324
4.7. Développements d'Edgeworth	327
4.7.1. Le théorème central-limite pour les densités	328
4.7.2. Développement de Tchebychev-Hermite d'une densité	331
4.7.3. Développement d'Edgeworth d'une densité	333
5. Exercices	334

X. Introduction aux processus stochastiques

1. Introduction	339
2. Définitions	339
3. Marche aléatoire symétrique	342
3.1. Introduction	342
3.2. Passages par 0	343
3.3. Temps de passage	347
3.4. Grandes déviations	349
3.5. Probabilité de rester dans une bande donnée	351
4. Martingales discrètes	352
4.1. Jeu à mise variable	352
4.2. Martingales	354
4.3. Temps d'arrêt	355
5. Introduction heuristique au mouvement brownien	358
5.1. Définition	358
5.2. Mesure de Wiener	362
6. Processus de Poisson	365
6.1. Définitions	365
6.2. Lien avec la loi exponentielle	368
6.3. Autre caractérisation d'un processus de Poisson	368
7. Exercices	370

Solutions des exercices

1. Solutions des exercices du chapitre 1	377
2. Solutions des exercices du chapitre 2	384
3. Solutions des exercices du chapitre 3	390
4. Solutions des exercices du chapitre 4	395
5. Solutions des exercices du chapitre 5	403
6. Solutions des exercices du chapitre 6	410
7. Solutions des exercices du chapitre 7	415
8. Solutions des exercices du chapitre 8	423
9. Solutions des exercices du chapitre 9	428
10. Solutions des exercices du chapitre 10	435

Petit appendice mathématique

1. Notions ensemblistes	449
1.1. Parties d'un ensemble E	449
1.2. Produit d'ensembles	450
1.3. Applications de E dans F	450
1.4. Ensembles dénombrables	450
2. Dénombrément	452
2.1. Fonctions indicatrices	452
2.2. Formule du crible (ou principe d'inclusion-exclusion)	452
2.3. Combinatoire	453
3. Suites et séries	455
3.1. Suites	455
3.2. Séries	456
4. Fonctions d'une variable réelle	458
4.1. Usage des équivalents	458
4.2. Intégrale des fonctions continues	460
4.3. Suites et séries de fonctions	462
4.4. Séries entières	463
4.5. La fonction exponentielle et le Log	465
5. Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^n	467
5.1. Orthogonalité et transposition	468
5.2. Diagonalisation	469
6. Espaces normés	470
6.1. Norme et convergence	470
6.2. Espace de Hilbert	471
7. Calcul différentiel dans \mathbb{R}^n	471
7.1. Topologie de \mathbb{R}^n	471
7.2. Différentielle et jacobienne	472