

Table des matières

Avant-propos	i
I RESULTATS DE THEORIE DES ENSEMBLES	1
Chapitre 1 : CARDINAUX	5
I Le théorème de Cantor	5
II Le théorème de Cantor-Bernstein	8
III Il existe une infinité de cardinaux infinis	10
IV Opérations sur un nombre fini de cardinaux	11
V Somme et produit d'une infinité de cardinaux, Théorème de König	16
VI Les trois cardinaux infinis usuels	19
VII L'hypothèse du continu	24
VIII Exercices du Chapitre 1	26
Chapitre 2 : LES AXIOMES DE ZERMELO-FRAENKEL	27
I Le paradoxe de Russell	28
II Les axiomes de Z	29
III Définitions des notions de produit, d'application, etc. dans le cadre de Z	32
IV Les axiomes de ZF et de ZFC	34
V Exercices du Chapitre 2	36
Chapitre 3 : CARDINALITE DES ENSEMBLES USUELS	37
I Tableau récapitulatif	37
II Ensembles dénombrables	39
III Le continu	40
IV Le fonctionnel	44
V Exercices du Chapitre 3	48

Chapitre 4 : L'AXIOME DU CHOIX	51
I Qu'est ce que l'axiome du choix?	51
II Utilisation de l'axiome du choix en mathématiques	54
III Formes affaiblies de l'axiome de choix	56
IV Exercices du Chapitre 4	58
Chapitre 5 : L'EQUIVALENCE DU CHOIX, ZORN ET ZERMELO	59
I L'axiome de Zermelo	60
II L'axiome de Zorn	63
Chapitre 6 : ORDINAUX	67
I Présentation des ordinaux	67
II Opérations sur un nombre fini d'ordinaux.	70
III Exemples	72
IV Addition d'une infinité d'ordinaux	75
V Quelques propriétés fondamentales	76
VI La succession des ordinaux	81
VII Applications aux cardinaux	82
VIII La définition de von Neumann des ordinaux	83
Chapitre 7 : INDUCTION	91
I Principe	91
II Premiers exemples d'utilisation de l'induction	95
III La notation \aleph_p des cardinaux	96
IV Théorème (Hessenberg) : Pour tout cardinal infini C , $C^2 = C$.	99
V Le cardinal de l'ensemble des boréliens est Card(\mathbb{R})	101
VI Exercices du Chapitre 7	103
Chapitre 8 : LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI	105
I Présentation du paradoxe	106
II Le lemme de base	107
III Le paradoxe de Hausdorff	108
IV Propriétés préliminaires de la relation \approx	110
V Les paradoxes de Banach-Tarski	111
II LOGIQUE MATHÉMATIQUE	115
Chapitre 9 : FORMULES ET MODELES	121

I	Le calcul propositionnel	122
II	Le calcul des prédicats	127
III	La notion de modèle	139
IV	Le choix de règle de déduction	148
V	Exercices du Chapitre 9	153
Chapitre 10 : COMPLETEUDE		157
I	L'équivalence non contradiction / existence d'un modèle	157
II	Complétude et paradoxes de Skolem	165
III	Modèles non standard	170
IV	Conclusions pour le Chapitre 10	175
V	Exercices du Chapitre 10	176
Chapitre 11 : INCOMPLETEUDE		179
I	Le problème de la décision	179
II	Exemple de modélisation arithmétique de l'informatique	185
III	Théorème de l'incomplétude	191
IV	Autres exemples de limitations	199
V	Au-delà du récursif	208
VI	Exercices du Chapitre 11	213
Chapitre 12 : ARITHMETISATION ET CONSISTANCE		215
I	L'arithmétisation des Mathématiques	215
II	Le théorème d'incomplétude et ses généralisations	221
III	Le Deuxième Théorème d'Incomplétude de Gödel	229
IV	Exemples de problèmes de consistance	237
Chapitre 13 : AUTRES THEORIES DES ENSEMBLES & RESULTATS		241
I	NBG : la Théorie des ensembles de von Neumann-Bernays-Gödel	241
II	MK : la théorie des ensembles de Morse-Kelley	244
III	Cardinaux inaccessibles	245
IV	La méthode du forcing de Cohen	246
V	Généralisations du théorème de Gödel	246
VI	Les nombres Ω de Chaitin	246
VII	L'axiome de détermination projective(DP)	248

Appendices	249
A1 : Rappel de quelques définitions mathématiques élémentaires . . .	250
A2 : Symboles et abréviations	252
A3 : Dates de quelques-unes des principales découvertes en théorie des ensembles et en logique mathématique	253
A4 : Cantor et Dieu	256
A5 : Quelques énigmes	260
Solution des exercices	263
Solutions des énigmes	287
RÉFÉRENCES	291