

# Chapitre 1 : CARDINAUX

*Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son auteur.*

Gottfried LEIBNIZ

*La plus haute perfection de Dieu est la possibilité de créer un ensemble infini et son immense bonté le conduit à le créer.*

Georg CANTOR

*Nul ne doit pouvoir nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous. La notion d'infini est indispensable à notre pensée.*

David HILBERT

*La théorie des Ensembles est une théorie de l'infini : son objectif est d'explorer les diverses variétés d'infinités possibles (rien de moins, et rien de plus : les « Mathématiques modernes » furent un malentendu).*

Patrick DEHORNOY

## I Le théorème de Cantor

Le concept clé de la théorie des cardinaux est celui de **bijection**.

(On suppose ici le lecteur un peu familier avec cette notion de bijection. Si ce n'est pas le cas, un rappel des définitions élémentaires est présentée en Appendice 1.)

« Intuitivement », l'idée est la suivante : si l'on considère un ensemble de chaises et un ensemble de personnes, si chaque personne est assise sur une et une seule chaise, et si chaque chaise soutient une et une seule personne, alors

on est tenté de dire qu'il y a « autant » de personnes que de chaises. Et ceci pour des ensembles quelconques, donc même infinis.

Mathématiquement, on considère que l'on peut associer à tout ensemble une notion de cardinal telle que :

- (1) Pour tout ensembles  $A$  et  $B$ ,  
 $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) \Leftrightarrow$  Il existe une bijection de  $A$  vers  $B$ .

### Remarque

Il est d'ailleurs possible de définir rigoureusement une notion de cardinal vérifiant (1) à partir des axiomes usuels sur les ensembles. (Nous verrons une telle définition au Chapitre 6.)

Lorsqu'il existe une bijection entre  $A$  et  $B$ , on dit aussi que  $A$  et  $B$  sont « équipotents ». La relation d'équipotence est symétrique, réflexive et transitive (facile). (Dans le cas contraire, on n'aurait pas pu considérer de notion de cardinal vérifiant (1).)

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles.

Par définition,  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B) \Leftrightarrow$  Il existe une injection de  $A \rightarrow B$ .

$$\text{et } \text{Card}(A) < \text{Card}(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Card}(A) \leq \text{Card}(B) \\ \text{Card}(A) \neq \text{Card}(B) \end{cases}$$

Si il existe une injection  $i$  de  $A \rightarrow B$ , une bijection  $f$  de  $A \rightarrow A'$  et une bijection  $g$  de  $B \rightarrow B'$ , alors  $g \circ i \circ f^{-1}$  est une injection de  $A' \rightarrow B'$ . La définition précédente a donc un certain sens, dans la mesure où elle ne dépend pas du choix des ensembles  $A$  et  $B$  mais bien seulement de leur cardinal.

Le théorème de Cantor est le résultat suivant :

### Théorème (Cantor)

Pour tout ensemble  $E$ ,  $\text{Card}(E) < \text{Card}(\mathbf{P}(E))$ .

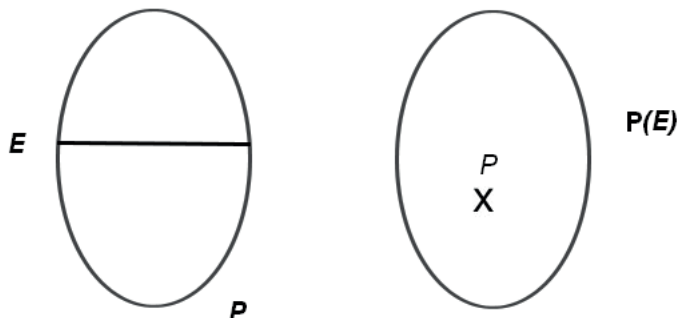
( $\mathbf{P}(E)$  désigne l'ensemble des parties de  $E$ .)

### Démonstration

Soit  $i$  l'application de  $E$  vers  $\mathbf{P}(E)$ , qui à tout  $x$  de  $E$  associe  $x$ .  $i$  est une injection. Donc  $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(\mathbf{P}(E))$ .

Supposons qu'il existe une **bijection  $f$  de  $E \rightarrow \mathbf{P}(E)$** .

Soit  $P = \{x \in E / x \notin f(x)\}$   
 ( $f(x)$  est une partie de  $E$  et  $x \in E$ ).



Puisque  $f$  est surjective,  $\exists p \in E / f(p) = P$ .

Par définition de  $P$ ,  $\forall x \in E, x \in P \Leftrightarrow x \notin f(x)$ .

Donc  $p \in P \Leftrightarrow p \notin f(p)$ , soit  $p \in P \Leftrightarrow p \notin P$ .

Ainsi, on ne peut avoir ni  $p \in P$  ni  $p \notin P$ , donc  $\text{Card}(E) \neq \text{Card}(P(E))$ .

### Conséquences

1. En prenant par exemple  $E = \mathbb{N}$  (ensemble des entiers naturels), on constate que  $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(P(\mathbb{N}))$ . Le théorème de Cantor est fondamental dans la mesure où il démontre l'existence de plusieurs « degrés d'infini ».
2. Le théorème de Cantor indique qu'il n'existe pas de plus grand cardinal. En effet,  $C$  étant un cardinal quelconque et  $A$  un ensemble de cardinal  $C$ , on a  $C < \text{Card}(P(A))$ .
3. A priori, on pourrait considérer l'ensemble  $U$  de tous les « objets mathématiques » :  $U = \{x / x = x\}$ .  $\text{Card}(U)$  devrait alors être le plus grand cardinal, en contradiction avec ce que l'on vient de voir.  
 On peut lever ce paradoxe en remarquant que l'on n'a jamais donné de définition de la notion d'ensemble pouvant s'appliquer à **tous** les cas imaginables.

Dans une théorie comme ZF, la proposition  $\exists U, \forall x, x \in U$  ne peut pas être démontré (si ZF est bien non contradictoire). Ce qui peut s'interpréter par le

fait que « l'ensemble de tous les ensembles étudiés » ne faisait pas partie des ensembles que l'on étudiait.

(Le paradoxe de Russell, que nous verrons au Chapitre 2, sera très voisin. D'ailleurs, si l'on prend  $E = U$  et  $f(x) = x$  dans la démonstration du théorème de Cantor, on retrouve le paradoxe de Russell.)

### Autres énoncés possibles du théorème de Cantor

Comme nous l'avons vu lors de la preuve du théorème de Cantor, ce résultat peut aussi être énoncé de la façon suivante :

#### **Théorème (Cantor)**

Pour tout ensemble  $E$ , il n'existe pas de surjection (donc en particulier pas de bijection) de  $E$  vers  $\mathbf{P}(E)$ .

Ou encore :

#### **Théorème (Cantor)**

Pour tout ensemble  $E$ , pour toute application de  $f$  de  $E$  vers  $\mathbf{P}(E)$ , l'ensemble  $P = \{x \in E/x \notin f(x)\}$  ne peut pas avoir d'antécédant par  $f$ .

*Ce théorème est particulièrement important lorsque  $E$  est un ensemble infini. Lorsque  $E$  est fini, on peut prendre des exemples simples pour illustrer ce théorème.*

*Par exemple prenons si  $E = \{a, b, c\}$ .*

- *Si  $f(a) = b$ ,  $f(b) = \emptyset$  et  $f(c) = \{b, c\}$  alors ici  $P = \{a, b\}$  qui n'est en effet ni  $f(a)$  ni  $f(b)$  ni  $f(c)$  conformément au théorème de Cantor.*
- *Et si  $f(a) = \{a, b\}$ ,  $f(b) = \{a\}$  et  $f(c) = \{c\}$ , alors ici  $P = \{b\}$  qui n'est en effet ni  $f(a)$  ni  $f(b)$  ni  $f(c)$  conformément au théorème de Cantor.*

## II Le théorème de Cantor-Bernstein

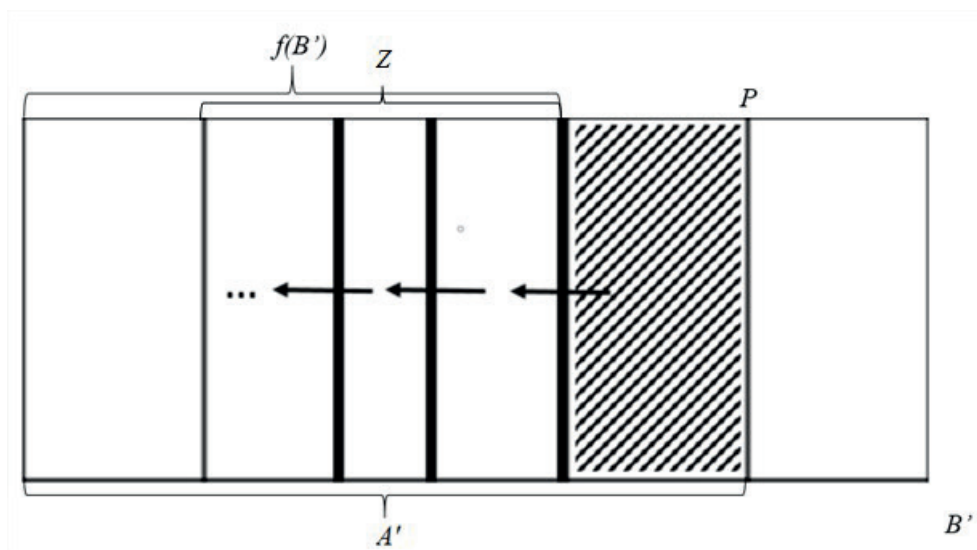
### **Théorème (Cantor-Berstein)**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles.

Si  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$  et  $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$ , alors  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ .

#### **Lemme**

Soit  $B'$  un ensemble, et  $A'$  un sous-ensemble de  $B'$ . S'il existe une injection  $f$  de  $B'$  vers  $A'$ , alors il existe une bijection de  $A'$  vers  $B'$ .



### *Démonstration du Lemme*

Notons  $P = A' - f(B')$ , et notons  $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(P)$ .

(Ainsi  $Z$  contient  $P, f(P), f(f(P))$  etc.)

Soit  $h$  l'application de  $A'$  vers  $f(B')$  qui à tout  $x$  de  $Z$  associe  $f(x)$ , et qui à tout  $x$  de  $A'$  n'appartient pas à  $Z$  associe  $x$ .

$h$  est une bijection de  $A'$  vers  $B'$  (en effet la restriction de  $f$  à  $Z$  est une bijection de  $Z$  vers  $Z - P$  :  $h$  envoie  $P$  sur  $f(P)$ ,  $f(P)$  sur  $f(f(P))$  etc.).

Donc  $f^{-1} \circ h$  est une bijection de  $A'$  vers  $B'$ .

### *Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein à partir du Lemme*

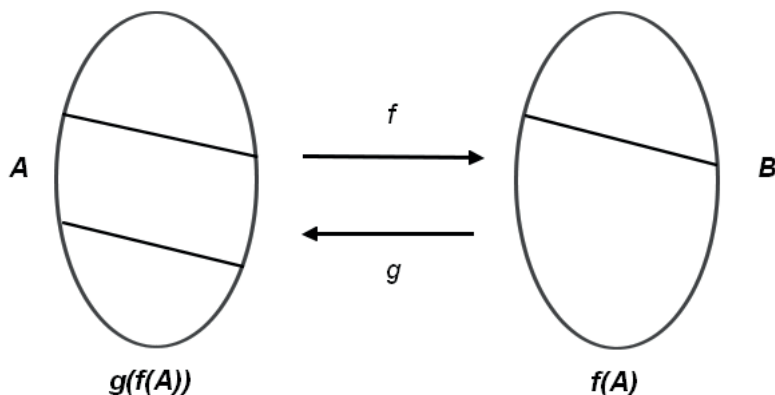
Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles.

On suppose qu'il existe une injection  $f$  de  $A$  vers  $B$ , et une injection  $g$  de  $B$  vers  $A$ .

$g \circ f$  est alors une injection de  $A$  vers  $g(B)$  qui est inclus dans  $A$ .

Donc d'après le lemme ci-dessus (en prenant  $B' = A$  et  $A' = g(B)$ ), il existe une bijection  $k$  de  $A$  vers  $g(B)$ .

Alors  $g^{-1} \circ k$  est une bijection de  $A$  vers  $B$ .



### Remarque

Au Chapitre 6 (section VII), nous verrons deux autres propriétés importantes de la relation  $\leq$  :

1. Pour tout cardinaux  $A$  et  $B$ ,  $A \leq B$  ou  $B \leq A$
2. Pour tout cardinal  $A$ , il existe un plus petit cardinal  $B$  tel que  $A < B$ .

## III Il existe une infinité de cardinaux infinis

### a) Construction d'une infinité de cardinaux infinis

Définissons les ensembles  $\mathbf{P}^n(\mathbb{N})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ainsi :

$$\mathbf{P}^0(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \text{ et } \mathbf{P}^{n+1}(\mathbb{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{P}^n(\mathbb{N})).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ , notons  $E_n = \text{Card}(\mathbf{P}^n(\mathbb{N}))$ .

Le théorème de Cantor indique que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n < E_{n+1}$ .

De plus, si  $i < j$ , il existe une injection de  $P^i(\mathbb{N})$  vers  $P^j(\mathbb{N})$ . Donc en utilisant le théorème de Cantor-Bernstein on constate que tous les  $E_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  sont distincts.

(En effet, si on avait  $E_n = E_{n+a}$ ,  $a > 1$ , comme  $E_{n+1} \leq E_{n+a}$ , on aurait  $E_{n+1} \leq E_n$ .

Or  $E_n \leq E_{n+1}$ , donc par Cantor-Bernstein, on obtiendrait  $E_n = E_{n+1}$  en contradiction avec le théorème de Cantor.)

On vient donc de trouver une infinité (dénombrable) de « degré d'infini » (les  $E_i$ ).

On peut d'ailleurs en trouver d'autres :

Posons :

$\mathbf{P}^\omega(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}^n(\mathbb{N})$  et  $E_\omega = \text{Card}(\mathbf{P}^\omega(\mathbb{N}))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$E_\omega$  est un cardinal supérieur à tous les  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

On peut maintenant considérer  $E_{\omega+1} = \text{Card}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^\omega(\mathbb{N})))$  qui est encore plus grand, etc.

## b) Il existe plus de cardinaux infinis que d'éléments dans n'importe quel ensemble

Supposons que l'on puisse associer à tout entier naturel  $n$  un ensemble  $A_n$  de telle sorte que tout cardinal infini soit le cardinal d'un des  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , et  $C = \text{Card}(A)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{l'application } i : A_n \rightarrow A \\ x \mapsto x$$

est une injection, donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Card}(A_n) \leq C$ .

$C$  serait donc le plus grand cardinal infini, en contradiction avec le théorème de Cantor.

On peut interpréter ce résultat en disant que « l'ensemble des cardinaux infinis n'est pas dénombrable ». En fait, soit  $K$  un ensemble quelconque. Supposons que l'on puisse associer à tout élément  $k$  de  $K$  un ensemble  $V_k$  de telle sorte que tout cardinal infini soit le cardinal d'un des  $V_k$ ,  $k \in K$ .

En considérant l'ensemble  $V$  qui est l'union de tous les ensembles  $V_k$  pour tous les  $k \in K$  (c.à.d.  $x \in V \Leftrightarrow \exists k \in K/x \in V_k$ ),  $V$  serait de même le plus grand cardinal, en contradiction avec le théorème de Cantor. Ainsi « l'ensemble » des cardinaux infinis aurait un cardinal supérieur à celui de tout ensemble  $K \dots$  et ne peut donc être un ensemble. Comme précédemment, on lève en général le paradoxe en considérant que « l'ensemble » des cardinaux ne faisait pas partie des ensembles étudiés initialement.

## IV Opérations sur un nombre fini de cardinaux

### Définitions

$A$  et  $B$  sont deux ensembles quelconques.

On note  $A \times B$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x \in A$  et  $y \in B$ .

On note  $B^A$  l'ensemble des applications de  $A \rightarrow B$ .

Nous allons montrer que l'on peut définir des opérations sur les cardinaux ainsi :

- (1)  $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B)$  lorsque  $A \cap B = \emptyset$
- (2)  $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = \text{Card}(A \times B)$
- (3)  $(\text{Card}(A))^{\text{Card}(B)} = \text{Card}(\{\text{applications de } B \rightarrow A\})$ .

### Justifications

1. Soient  $A, B, A', B'$  quatre ensembles tels que :  
 $\text{Card}(A) = \text{Card}(A')$ ,  $\text{Card}(B) = \text{Card}(B')$ , et  $A \cap B = A' \cap B'$ . Notons  
 $a$  une bijection de  $A \rightarrow A'$  et  $b$  une bijection de  $B \rightarrow B'$ .

$$\begin{array}{l}
 A \cup B \rightarrow A' \cup B' \\
 f : \quad x \in A \mapsto a(x) \quad \text{est une bijection de } A \cup B \rightarrow A' \cup B' \\
 \quad x \in B \mapsto b(x)
 \end{array}$$

Donc si  $A \cap B = \emptyset$ , le cardinal de  $A \cup B$  ne dépend effectivement que des cardinaux de  $A$  et  $B$  (et pas de leurs ensembles représentants).

(1) définit donc bien une opération sur les cardinaux.

De plus,  $A$  et  $B$  étant deux ensembles quelconques, en prenant par exemple  $A' = \{a\} \times A$  et  $B' = \{b\} \times B$ , où  $a$  et  $b$  sont deux éléments distincts, on a trouvé deux représentants  $A'$  et  $B'$  tels que  $A' \times B' = \emptyset$ ,  $\text{Card}(A') = \text{Card}(A)$  et  $\text{Card}(B') = \text{Card}(B)$ . Donc (1) définit bien une opération sur tous les cardinaux.

2. Soient  $A, B, A', B'$  quatre ensembles tels que  
 $\text{Card}(A) = \text{Card}(A')$  et  $\text{Card}(B) = \text{Card}(B')$ .  
 Notons  $a$  une bijection de  $A \rightarrow A'$  et  $b$  une bijection de  $B \rightarrow B'$ .

$$\begin{array}{l}
 A \times B \rightarrow A' \times B' \\
 f : \quad (x, y) \mapsto (a(x), b(y)) \quad \text{est une bijection de } A \times B \rightarrow A' \times B'.
 \end{array}$$

Donc (2) définit également bien une opération sur les cardinaux.

3. Gardons les mêmes notations.

$$\begin{array}{l}
 \{\text{applications } B \rightarrow A\} \rightarrow \{\text{applications } B' \rightarrow A'\} \\
 \text{Soit } g : \quad f \mapsto f' : B' \rightarrow A' \\
 \quad \quad \quad x \mapsto a \circ f \circ b^{-1}(x)
 \end{array}$$

$g$  est une bijection. Donc (3) définit bien une opération sur les cardinaux.