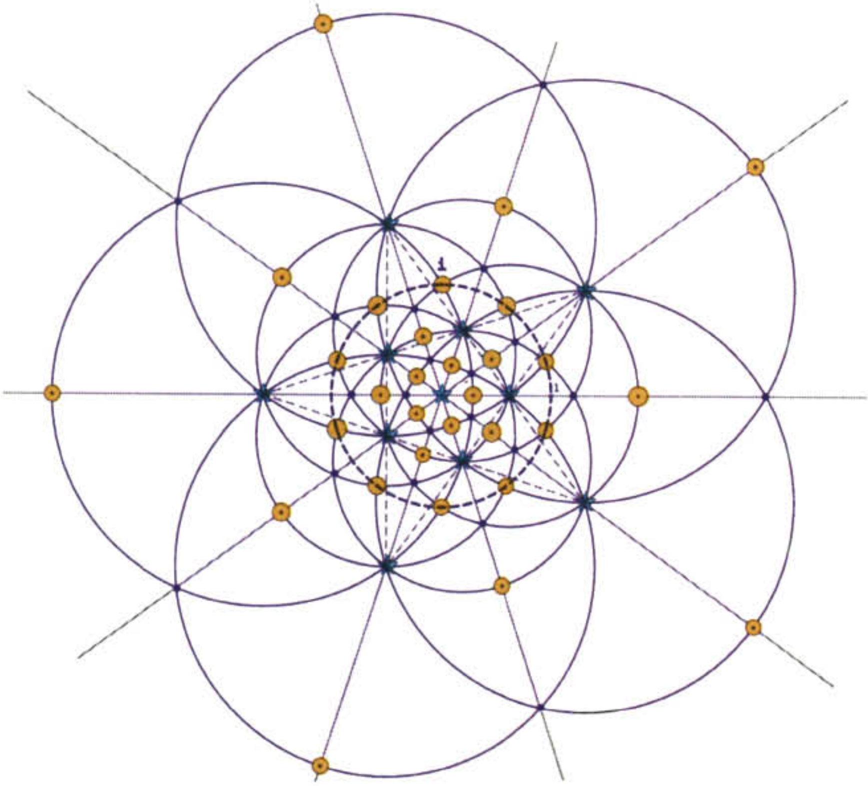
SURFACES DE RIEMANN ÉQUATION DE HALPHEN ET GROUPES POLYÉDRAUX

Groupes, algèbres et géométrie

Tome 3



Jean-Marie ARNAUDIÈS

José BERTIN

ellipses

Chapitre XXII

FRACTIONS RATIONNELLES, FONCTIONS ALGÉBRIQUES

Soit K un corps commutatif. On appelle **corps de fonctions algébriques** *sur K toute extension algébrique finie d'un corps de fractions rationnelles en un nombre fini d'indéterminées sur K. Ce chapitre est consacré à l'introduction des corps de ce type, en essayant de dégager le concept de* **variables** *(relatives au corps de base K), et le calcul différentiel qui lui est associé. Dans le chapitre suivant, nous poursuivrons cette étude dans le cas particulier d'une seule variable.*

§ 22.1 Transcendance

Soit L un corps commutatif et K un sous-corps de L. Pour toute partie E de L, il existe un plus petit sous-corps de L contenant E: on l'appelle le *sous-corps de L engendré par E*. Donc pour toute partie X de L, il existe un plus petit sous-corps de L contenant $K \cup X$: on l'appelle *l'extension de K engendrée par X dans L*, et on la note $K(X)$ (si X est un singleton $\{x\}$, on écrira $K(x)$ au lieu de $K(\{x\})$). Notant $K[X]$ la sous-K-algèbre de L engendrée par X, il est clair que $K(X)$ est le corps des fractions de $K[X]$.

Définition 22.1.1

Dans les conditions ci-dessus, un sous-corps M de L est dit **extension de type fini de K** *ssi il est engendré sur K par une partie finie de L.*

Soit A une sous-K-algèbre de L ; rappelons que A est dite **de type fini sur** K ssi elle est engendrée comme K-algèbre par une partie finie de L, i.e. ssi elle est de la forme $A = K[E]$ où E est une partie finie de L. Lorsque la sous-K-algèbre A est un corps, si elle est de type fini sur K comme K-algèbre, il est clair que c'est un sous-corps de L de type fini sur K ; mais la réciproque est fausse: par exemple si $x \in L$ et si x est transcendant sur K, le sous-corps $K(x)$ de L est de type fini sur K mais n'est pas de type fini sur K en tant que K-algèbre [1] .

La proposition ci-après, bien que de démonstration évidente, mérite un énoncé:

Proposition 22.1.1

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, soit X et Y deux parties de L; notons $E = K(X)$ et $F = E(Y)$. Alors $F = K(X \cup Y)$.

Soit à nouveau K un sous-corps d'un corps commutatif L. Soit A une sous-K-algèbre de type fini de L. Soit $x_1, \dots, x_m$ dans L tels que $A = K[x_1, \dots, x_m]$ (où $m \in \mathbb{N}^\star$). Notons $X_1, \dots, X_m$ des indéterminées sur K, et désignons par $\varphi : K[X_1, \dots, X_m] \to L$ le morphisme de K-algèbres qui envoie X_i sur x_i pour tout i. Son image est donc A. Un problème important est de déterminer les extensions de φ en un morphisme de K-algèbres $\Phi : R \to L$, où R est une sous-K-algèbre de $K(X_1, \dots, X_m)$. Il est clair qu'en général, il n'y aura pas de telle extension Φ de φ lorsque $R = K(X_1, \dots, X_m)$, car dans ce cas Φ devrait être injective, alors que les x_i ne sont pas forcément K-algébriquement indépendants. Les K-algèbres R pour lesquelles une telle extension existe jouent un rôle fondamental en théorie des extensions de corps, il en sera question au chapitre suivant.

---

(1) Pour toute sous-K-algèbre A de type fini de L, on a $Q \in K[x] \setminus \{0\}$ tel que $A \subset K[x, Q^{-1}]$. L'assertion découle donc du fait que l'ensemble des polynômes en x à coefficients dans K irréductibles et normalisés est infini.

Rappelons que dans les présentes conditions, une suite $(x_1,\dots,x_m)$ d'éléments de L est dite *K-algébriquement libre* (ou encore: *K-algébriquement indépendante*), ssi le morphisme φ ci-dessus est *injectif*, i.e. ssi le seul polynôme $P \in K[X_1,\dots,X_m]$ tel que $P(x_1,\dots,x_m) = 0$ est le polynôme nul. S'il en est ainsi, le morphisme φ ci-dessus est un isomorphisme, et de plus, il est clair que la suite $(x_1,\dots,x_m)$ est algébriquement libre sur tout sous-corps de K. Lorsque $m = 1$, on retrouve la notion bien connue d'élément *transcendant sur K*: dire que la suite (x_1) est K-algébriquement libre équivaut à dire que l'élément x_1 est transcendant sur K.

Soit toujours K un sous-corps d'un corps commutatif L, et soit X une partie de L. On dit que X est ***une partie K-algébriquement libre*** (ou: ***algébriquement libre sur K***, ou ***K-algébriquement indépendante***, ou encore ***algébriquement indépendante sur K***), ssi toute suite finie *injective* $(x_1,\dots,x_m)$ d'éléments de X est K-algébriquement libre. La partie vide de L est considérée comme K-algébriquement libre. Lorsque X est finie non vide, de cardinal m, elle est K-algébriquement libre ssi il existe une bijection $[\![1,m]\!] \to X$, $i \mapsto x_i$ telle que la suite $(x_1,\dots,x_m)$ soit K-algébriquement libre. Dans le cas général, il est immédiat que X est K-algébriquement libre ssi toutes ses parties finies le sont, et que s'il en est ainsi, alors toute partie de X est K-algébriquement libre.

De même, une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de L est dite ***K-algébriquement libre*** (ou: ***algébriquement libre sur K***, ou ***K-algébriquement indépendante***, ou encore ***algébriquement indépendante sur K***), ssi pour toute suite finie injective $(i_1,\dots,i_m)$ d'éléments de L, la suite $(a_{i_1},\dots,a_{i_m})$ est K-algébriquement libre. Cette condition équivaut à: l'application $i \mapsto a_i$ est injective et la partie $\{a_i\}_{i\in I}$ de L est K-algébriquement libre. Il est clair qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de L est K-algébriquement libre ssi pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_I$, la famille $(a_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est K-algébriquement libre. Le contraire de " K-algébriquement libre " se dit " K-algébriquement lié " ou " K-algébriquement dépendant ".

Une partie X de L est K-algébriquement libre ssi la famille $(x)_{x\in X}$ (associée à l'injection canonique $x \mapsto x$ de X dans L) est K-algébriquement libre.

L'intérêt de considérer des *parties* K-algébriquement libres est de pouvoir utiliser la relation d'ordre inclusion sur l'ensemble des parties de L. Par exemple, il est clair que toute partie d'une partie K-algébriquement libre est K-algébriquement libre.

Proposition 22.1.2

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L et X une partie K-algébriquement libre de L. Il existe une partie algébriquement libre maximale B de L sur K telle que $X \subset B$.

Démonstration:

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des parties K-algébriquement libres de L contenant X; on a $\mathcal{F} \neq \emptyset$, car $X \in \mathcal{F}$. Pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ totalement ordonnée, il est clair que l'ensemble $Z = \cup_{Y\in\mathcal{E}} Y$ appartient à $\mathcal{F}$. Donc l'ensemble ordonné $(\mathcal{F}, \subset)$ est inductif. La proposition découle alors du théorème de Zorn ■

Proposition 22.1.3

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, soit $a \in L$ et soit X une partie de L. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(I) $a \notin X$ *et* $X \cup \{a\}$ *est K-algébriquement libre.*

(II) X *est K-algébriquement libre et* a *est $K(X)$-transcendant.*

Démonstration:

Il n'y a rien à prouver si X est vide. Nous supposerons donc $X \neq \emptyset$.

Supposons (I) vrai. Alors X est K-algébriquement libre. Montrons par l'absurde que a est $K(X)$-transcendant. Soit un polynôme $P(T) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k \in K(X)[T]$ tel que $P(a) = 0$ (la famille (c_k) est donc à support fini). On a un entier $m \geq 1$ et une suite injective $(x_1, \ldots, x_m)$ d'éléments de X tels que $c_k \in K(x_1, \ldots, x_m)$ pour tout k. On posera $c_k = \frac{u_k}{v_k}$, avec u_k et v_k éléments de $K[x_1, \ldots, x_m]$ et $v_k \neq 0$, et avec $v_k = 1$ pour tout k assez grand. Posant $Q(T) = (\prod_{k=0}^{\infty} v_k) P(T)$, il est clair que $Q(T) \in (K[x_1, \ldots, x_m])[T]$ et $Q(a) = 0$. Soit $X_1, \ldots, X_m$ des indéterminées sur $K[T]$. Comme $(K[X_1, \ldots, X_m])[T]$ s'identifie à $K[X_1, \ldots, X_m, T]$, on a $\Phi \in K[X_1, \ldots, X_m, T]$ tel que $Q(a) = \Phi(x_1, \ldots, x_m, a) = 0$. Puisque $(x_1, \ldots, x_m, a)$ est une suite K-algébriquement libre, on en déduit que $\Phi(X_1, \ldots, X_m, T) = 0$, d'où $0 = \Phi(x_1, \ldots, x_m, T) = Q(T)$. Comme $\prod_{k=0}^{\infty} v_k \neq 0$, on voit que $P(T) = 0$. On a prouvé que pour tout $P \in K(X)[T]$, la relation $P(a) = 0$ entraîne $P = 0$, donc a est $K(X)$-transcendant, et finalement (II) est vrai.

Supposons (II) vrai. Alors $a \notin K(X)$, d'où $a \notin X$. Pour prouver que (I) est vrai, il suffit donc de montrer que pour toute suite finie injective $(x_1, \ldots, x_m)$ d'éléments de X (où $m \geq 1$), la suite $(x_1, \ldots, x_m, a)$ est K-algébriquement libre. Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ une telle suite: d'après l'hypothèse, elle est K-algébriquement libre. Soit $X_1, \ldots, X_m, T$ des indéterminées sur K, et soit $\Phi \in K[X_1, \ldots, X_m, T]$ tel que $\Phi(x_1, \ldots, x_m, a) = 0$. En ordonnant Φ par rapport à T, on a $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T^k$, avec $\varphi_k \in K[X_1, \ldots, X_m]$ pour tout k, la famille (φ_k) étant à support fini. On a

$$0 = \Phi(x_1, \ldots, x_m, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x_1, \ldots, x_m)\, a^k$$

Puisque l'élément a est $K(X)$-transcendant, il est $K(x_1, \ldots, x_m)$-transcendant, d'où $\varphi_k(x_1, \ldots, x_m) = 0$ pour tout k, d'où $\varphi_k = 0$ pour tout k puisque les x_i sont K-algébriquement indépendants; d'où $\Phi = 0$. On a donc prouvé que quel que soit Φ, la relation $\Phi(x_1, \ldots, x_m) = 0$ entraîne $\Phi = 0$; donc la suite $(x_1, \ldots, x_m, a)$ est K-algébriquement libre, ce qui achève de prouver (I) ■

Corollaire 1

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L. Une partie A de L est K-algébriquement libre ssi pout tout $a \in A$, l'élément a est $K(A \setminus \{a\})$-transcendant.

Démonstration:

D'après la proposition 22.1.3, la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons-la satisfaite. Soit $(a_1, \ldots, a_m)$ (où $m \geq 1$) une suite injective d'éléments de A. Montrons par récurrence sur m que cette suite est K-algébriquement libre. Si $m = 1$, la propriété est évidente, car d'après l'hypothèse, a_1 est K-transcendant. Supposons la propriété vraie à l'ordre $m - 1$, où $m \geq 2$. Soit un polynôme non constant $P \in K[T_1, \ldots, T_m]$; sans restreindre la généralité, on peut supposer que le degré partiel q de P par rapport à T_m est ≥ 1. En ordonnant P par rapport à T_m, on a $P = \sum_{k=0}^{k=q} C_k T_m^k$, où $C_k \in K[T_1, \ldots, T_{m-1}]$ pour tout k, et où $C_q \neq 0$. Pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, posons $\lambda_k = C_k(a_1, \ldots, a_{m-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, la suite $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ est K-algébriquement indépendante, donc $\lambda_q \neq 0$. Le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{k=q} \lambda_k T_m^k$ est donc non constant, et il est à coefficients dans $K(A \setminus \{a_m\})$. D'après l'hypothèse, on a donc $Q(a_m) \neq 0$, ce qui équivaut à $P(a_1, \ldots, a_m) \neq 0$. La propriété est donc établie à l'ordre m. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout m, ce qui achève de prouver que A est K-algébriquement libre ■

Corollaire 2

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, et soit X et Y deux parties de L. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(I) $X \cap Y = \emptyset$ *et* $X \cup Y$ *est* K*-algébriquement libre.*

(II) X *est* K*-algébriquement libre et* Y *est* $K(X)$*-algébriquement libre.*

Démonstration:

Supposons l'assertion (I) vraie. D'après la proposition 22.1.3, tout $y \in Y$ est transcendant sur $K((X \cup Y) \setminus \{y\})$; comme $y \notin X$, on a $(X \cup Y) \setminus \{y\} = X \cup (Y \setminus \{y\})$, d'où $K((X \cup Y) \setminus \{y\}) = (K(X))(Y \setminus \{y\})$ (proposition 22.2.1). D'après le corollaire 1 ci-dessus, on en déduit que Y est $K(X)$-algébriquement libre. Comme X est K-algébriquement libre, l'assertion (II) est vraie.

Supposons l'assertion (II) vraie. Alors $Y \cap K(X) = \emptyset$, d'où a *fortiori* $X \cap Y = \emptyset$. Tout $y \in Y$ est transcendant sur $(K(X))(Y \setminus \{y\}) = K((X \cup Y) \setminus \{y\})$. Soit $x \in X$, montrons que x est transcendant sur $K((X \cup Y) \setminus \{x\})$: sinon, il existerait deux suites finies injectives $(a_1, \ldots, a_m)$ dans $X \setminus \{x\}$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ dans Y, et un polynôme $P \in K[T, U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_n]$ en les indéterminées $T, (U_i), (V_j)$, de degré partiel ≥ 1 par rapport à T, tel que $P(x, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = 0$. Ordonnons P par rapport aux V_j :

$$P = \sum_{(k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}} \Lambda_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} V_1^{\alpha_1} \cdots V_n^{\alpha_n}$$

où $\Lambda_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in K[T, U_1, \ldots, U_m]$ pour tout $(k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Puisque Y est $K(X)$-algébriquement libre, on a $\Lambda_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x, a_1, \ldots, a_m) = 0$ pour tout $(k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Puisque X est K-algébriquement libre, on en déduit que $\Lambda_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = 0$ pour tout $(k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; donc $P = 0$, ce qui est absurde. En définitive, on a prouvé que tout $z \in X \cup Y$ est transcendant sur $(X \cup Y) \setminus \{z\}$. D'après le corollaire 1 ci-dessus, $X \cup Y$ est donc K-algébriquement libre, d'où (I) ■

Avec les notations ci-dessus, appelons *partie K-algébriquement génératrice* de L toute partie S de L telle que L soit $K(S)$-algébrique.

Définition 22.1.2

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L. Une partie de L est appelée une **base de transcendance de L sur K** *(ou encore* **K-base de transcendance de L** *) ssi elle est K-algébriquement libre et K-algébriquement génératrice. Une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de L est appelée une* **base de transcendance de L sur K** *(ou encore* **K-base de transcendance de L** *) ssi l'application $i \mapsto a_i$ est injective et la partie $\{a_i\}_{i \in I}$ de L est une K-base de transcendance de L.*

D'après cette définition, une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de L est une K-base de transcendance ssi pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_I$, la famille $(\sigma(i))_{i \in I}$ est une K-base de transcendance. L'étude qui précède montre en outre les propriétés suivantes:

Une partie B de L est une K-base de transcendance ssi: B est K-algébriquement libre, et L est $K(B)$-algébrique.

Une partie B de L est une K-base de transcendance ssi la famille $(x)_{x \in B}$ est une K-base de transcendance.

Proposition 22.1.4

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, et soit S une partie de L. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(I) S *est une* K*-base de transcendance de* L.

(II) S *est une partie* K*-algébriquement libre maximale de* L.

(III) S *est une partie* K*-algébriquement génératrice minimale de* L.

Démonstration:

Supposons que S soit une K-base de transcendance. D'après les définitions, S est K-algébriquement génératrice et K-algébriquement libre. Tout $a \in S$ est alors $K(S \setminus \{a\})$-transcendant (proposition 22.1.3), donc pour tout $a \in S$, la partie $S \setminus \{a\}$ n'est plus K-algébriquement génératrice, i.e. S est K-algébriquement génératrice minimale de L. D'autre part, pour tout $x \in L \setminus S$, la partie $S \cup \{x\}$ n'est plus K-algébriquement libre puique x est $K(S)$-algébrique, donc S est K-algébriquement libre maximale. On a donc prouvé que (I) implique (II) et (III).

Supposons que S soit K-génératrice minimale de L. Il est alors immédiat que tout $a \in S$ est $K(S \setminus \{a\})$-transcendant. D'après le corollaire 1 de la proposition 22.1.3, S est une partie K-algébriquement libre, donc c'est une K-base de transcendance de L. Donc (III) implique (I).

Supposons que S soit K-algébriquement libre maximale. Soit $x \in L \setminus S$. Puisque $S \cup \{x\}$ n'est plus K-algébriquement libre, on a une suite finie injective $(a_1, \ldots, a_n)$ dans S et un polynôme non constant $P \in K[U, V_1, \ldots, V_n]$ en les indéterminées $U, V_1, \ldots, V_n$, tel que $P(x, a_1, \ldots, a_n) = 0$. Si P était indépendant de U, cela contredirait la K-indépendance algébrique de la suite $(a_1, \ldots, a_n)$. Donc le degré partiel de P par rapport à U est $d \geq 1$. Ordonnons P par rapport à U:

$$P = \sum_{k=0}^{k=d} \Lambda_k U^k$$

avec $\Lambda_k \in K[V_1, \ldots, V_n]$ pour tout k et $\Lambda_d \neq 0$. Puisque la suite $(a_1, \ldots, a_n)$ est K-algébriquement libre, on a $\Lambda_d(a_1, \ldots, a_d) \neq 0$. La relation

$$0 = P(x, a_1, \ldots, a_n) = \Lambda_d(a_1, \ldots, a_n)\, x^d + \sum_{k=0}^{k=d-1} \Lambda_k(a_1, \ldots, a_n) x^k$$

est donc une relation de dépendance algébrique non triviale de x sur $K(a_1, \ldots, a_n)$; *a fortiori*, x est $K(S)$-algébrique. Finalement S est une partie K-algébriquement génératrice de L, donc c'en est une K-base de transcendance, ce qui achève de prouver que (II) implique (I) ∎

La proposition qui suit est appelée *théorème d'échange de Steinitz*:

Proposition 22.1.5

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, soit S une partie de L telle que $L = K(S)$, et soit A une partie K-algébriquement libre de L. Il existe une partie B de S telle que $A \cup B$ soit une K-base de transcendance de L.

Démonstration:

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties C de S telles que $A \cup C$ soit K-algébriquement libre; ordonnons $\mathcal{F}$ par l'inclusion. Il est non vide, car $\emptyset \in \mathcal{F}$. Il est immédiat que si $\mathcal{E}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{F}$, alors $\cup_{C \in \mathcal{E}} C \in \mathcal{F}$ (cela découle du fait que pour toute partie finie F de $\cup_{C \in \mathcal{E}} C$, il existe $C \in \mathcal{E}$ tel que $F \subset C$). Donc l'ensemble ordonné non vide $(\mathcal{E}, \subset)$ est inductif. D'après le théorème de Zorn, il admet un élément maximal. Soit B un tel élément maximal. Tout élément $a \in S$ est donc $K(A \cup B)$-algébrique (proposition 22.1.3), donc $L = K(S)$ est $K(A \cup B)$-algébrique. Soit B' une partie de S contenant B strictement; tout élément $x \in B' \setminus B$ étant $K(A \cup B)$-algébrique, on voit que $A \cup B'$ n'est pas K-algébriquement libre (proposition 22.1.3), donc $A \cup B$ est bien une partie K-algébriquement libre maximale ∎

En prenant $A = \emptyset$ dans la proposition 22.1.5, on a immédiatement:

Corollaire

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L. Pour toute partie S de L telle que $L = K(S)$, il existe une K-base de transcendance B de L telle que $B \subset S$. En conséquence (avec $S = L$), il existe au moins une K-base de transcendance de L.

On va maintenant améliorer la proposition 22.1.4:

Théorème 22.1.1

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, soit S une partie K-algébriquement génératrice de L, et soit A une partie K-algébriquement libre de L. Il existe alors une partie B de S telle que $A \cup B$ soit une K-base de transcendance de L. En conséquence (en prenant $A = \emptyset$), il existe une K-base de transcendance de L contenue dans S.

Démonstration:

Puisque L est $K(S)$-algébrique, il est *a fortiori* $K(A \cup S)$-algébrique. La proposition 22.1.4 s'applique en prenant $(A, A \cup S)$ à la place du couple (A, S). Soit C une partie de $A \cup S$ contenant A telle que $A \cup C$ soit une K-base de transcendance de $K(A \cup S)$. Notant $B = C \setminus A$, on a $B \subset S$ et $A \cup B = A \cup C$. Alors $K(A \cup S)$ est $K(A \cup B)$-algébrique; comme L est $K(A \cup S)$-algébrique, par transitivité de la dépendance algébrique, on voit que L est $K(A \cup B)$-algébrique. Comme $A \cup B$ est K-algébriquement libre, on conclut que $A \cup B$ est une K-base de transcendance de L ■

Montrons maintenant une importante propriété de *transitivité* des bases de transcendance:

Proposition 22.1.6

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, et soit A et B deux parties de L. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(I) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B$ est une K-base de transcendance de L.

(II) La partie A est K-algébriquement libre, et B est une $K(A)$-base de transcendance de L.

Démonstration:

Supposons (I) vraie. Alors A est K-algébriquement libre et B est $K(A)$-algébriquement libre (corollaire 2 de la proposition 22.1.3). Comme L est $K(A \cup B)$-algébrique, c'est-à-dire $(K(A))(B)$-algébrique, on voit que B est bien une $K(A)$-base de transcendance de L.

Supposons (II) vraie. On a $B \cap K(A) = \emptyset$, d'où *a fortiori* $A \cap B = \emptyset$. D'après le corollaire 2 de la proposition 22.1.3, $A \cup B$ est K-algébriquement libre. Enfin L est $((K(A))(B)$-algébrique, c'est-à-dire $K(A \cup B)$-algébrique (proposition 22.1.1), donc $A \cup B$ est une K-base de transcendance de L ■

Proposition 22.1.7

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, et soit A une partie de L. Soit Λ un sous-corps de L contenant K et algébrique sur K. Pour que S engendre K-algébriquement L, il faut et il suffit que S engendre Λ-algébriquement L. Pour que S soit K-algébriquement libre, il faut et il suffit que S soit Λ-algébriquement libre. En conséquence, pour que S soit une K-base de transcendance de L, il faut et il suffit que ce soit une Λ-base de transcendance.

Démonstration:

Un élément de L est algébrique sur K ssi il est algébrique sur Λ (l'implication directe est triviale, et l'autre vient de la transitivité de la dépendance algébrique). La première assertion en découle. La Λ-indépendance algébrique entraîne trivialement la K-indépendance algébrique; inversement, soit A une partie finie non vide de S et Λ-algébriquement liée. On a donc un $a \in S$ tel que a soit algébrique sur $\Lambda(A \setminus \{a\})$ (corollaire 1 de la proposition 22.1.3). Mais $\Lambda(A \setminus \{a\})$ est algébrique sur $K(A \setminus \{a\})$ puisque Λ est algébrique sur K. Par transitivité de la dépendance algébrique, a est donc algébrique sur $K(A \setminus \{a\})$, donc A est K-algébriquement liée. La deuxième asertion en découle. La dernière assertion se déduit alors de la définition même d'une base de K-transcendance ■

Dans les conditions ci-dessus, soit $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une famille K-algébriquement libre dans L. Puisque l'application $i \mapsto a_\iota$ est injective, on a alors $\mathtt{card}(I) = \mathtt{card}(\{a_\iota\}_{\iota \in I})$; par abus de langage, on dira que $\mathtt{card}(I)$ est le *cardinal de la famille* (a_i). On dira que la famille (a_i) est *finie* ssi ce cardinal est fini, et si c'est le cas, ce cardinal sera alors appelé le *nombre d'éléments* de la famille.

Degré de transcendance

Théorème 22.1.2

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L, et soit n un entier ≥ 0. Supposons que L admette une K-base de transcendance finie de cardinal n. Alors toute K-base de transcendance de L est finie et de cardinal n ; toute famille K-algébriquement libre de L est finie de cardinal $\leq n$, et une telle famille est une K-base de transcendance ssi elle est de cardinal n ; toute famille K-algébriquement génératrice de L est de cardinal $\geq n$, et une telle famille est une K-base de transcendance ssi elle est finie de cardinal n.

Démonstration:

Montrons d'abord la première assertion par récurrence sur n. Si $n = 0$, l'extension L de K est algébrique, et il est trivial que $\emptyset$ est l'unique K-base de transcendance de L. Supposons $n \geq 1$, et que l'assertion ait été prouvée à tout ordre $< n$ avec tout couple (K', L'), où K' est un sous-corps d'un corps commutatif L'. Soit A une K-base de transcendance de L finie de cardinal n. Soit une partie B de L qui est une K-base de transcendance de L. On a $\mathtt{card}(B) \geq n$, sinon l'hypothèse de récurrence montrerait que $\mathtt{card}(A) < n$. Soit $b \in B$; d'après la proposition 22.1.5, on a une partie M de A telle que $M \cup \{b\}$ soit une K-base de transcendance de L. Nécessairement, $M \neq A$ (car A est K-algébriquement libre maximale), i.e. $\mathtt{card}(M) < n$. D'après la proposition 22.1.6, M et $B \setminus \{b\}$ sont deux $K(b)$-bases de transcendance de L. Comme $\mathtt{card}(M) < n$, l'hypothèse de récurrence s'applique et montre que l'ensemble $B \setminus \{b\}$ est fini et que $\mathtt{card}(B \setminus \{b\}) = \mathtt{card}(M)$; donc l'ensemble B est fini, et on a $\mathtt{card}(B) \leq 1 + \mathtt{card}(M) \leq n$. Comme $\mathtt{card}(B) \geq n$, en définitive on a $\mathtt{card}(B) = n$ (et $\mathtt{card}(M) = n - 1$), ce qui établit l'assertion à l'ordre n. La première assertion est donc prouvée par récurrence.

Soit A une partie K-algébriquement libre de L, et soit S une partie K-algébriquement génératrice de L. En appliquant le théorème 22.1.1 avec $S = L$, on voit qu'il existe une partie B de L contenant A et qui est une K-base de transcendance de L. D'après ce qui précède, B est finie, de cardinal n ; donc A est finie, de cardinal $\leq n$, et on a $\mathtt{card}(A) = n$ ssi $A = B$. De même, en appliquant le théorème 22.1.1, on a une K-base de transcendance B' de L contenue dans S. D'après ce qui précède, B' est finie et de cardinal n. Donc $\mathtt{card}(S) \geq n$, et on a $\mathtt{card}(S) = n$ ssi $S = B'$ ■

Définition 22.1.3

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L. On dit que L est **de transcendance finie sur K** *ssi L admet une K-base de transcendance finie. S'il en est ainsi, l'entier n tel que toute K-base de transcendance de L ait n éléments est appelé le* **degré de transcendance de L sur K**, *et sera noté $\mathtt{degtr}_K(L)$. On dit que L est* **de transcendance infinie sur K** *ssi L n'est pas de K-transcendance finie.*

Au lieu de " transcendance finie sur K " (resp. " transcendance infinie sur K ", " degré de transcendance sur K "), on parlera aussi de *K-transcendance finie* (resp. de *K-transcendance infinie* et de *degré de K-transcendance* ou de *K-degré de transcendance*.

D'après ces définitions, on a $\mathtt{degtr}_K(L) = 0$ ssi L est algébrique sur K.

Théorème 22.1.3

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L. Supposons L de transcendance infinie sur K. Toutes les K-bases de transcendance de L ont même cardinal.

Démonstration:

D'après ce qui précède, aucune K-base de transcendance de L n'est finie. Soit B et B' deux telles K-bases de transcendance. Notons $\mathcal{F}_B$ l'ensemble des parties finies de B. Puisque B est infinie, on a $\mathtt{card}(\mathcal{F}_B) = \mathtt{card}(B)$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des couples $(F, b') \in \mathcal{F}_B \times B'$ tels que b' soit algébrique sur $K(F)$. Pour tout $F \in \mathcal{F}_B$, notons $\mathcal{G}\langle F\rangle$ la coupe $\{b' \in B' \mid (F, b') \in \mathcal{G}\}$, et pour tout $b' \in B'$, notons $\mathcal{G}^{\langle -1\rangle}(b')$ la coupe $\{F \in \mathcal{F}_B \mid (F, b') \in \mathcal{G}\}$. Puisque B' est une K-base de transcendance de L, aucun des ensembles $\mathcal{G}^{\langle -1\rangle}(b')$ n'est vide, d'où $\mathtt{card}(B') \leq \mathtt{card}(\mathcal{G})$. Puisque B' est K-algébriquement libre, pour tout $F \in \mathcal{F}_B$ l'ensemble $\mathcal{G}\langle F\rangle$ est fini, de cardinal $\leq \mathtt{card}(F)$ (théorème 22.1.2), d'où $\mathtt{card}(\mathcal{G}) \leq \mathtt{card}(B)$. On a donc

$$\mathtt{card}(B') \leq \mathtt{card}(\mathcal{G}) \leq \mathtt{card}(B)$$

d'où $\mathtt{card}(B') \leq \mathtt{card}(B)$. En échangeant les rôles de B et B', on voit de même que $\mathtt{card}(B) \leq \mathtt{card}(B')$, d'où $\mathtt{card}(B) = \mathtt{card}(B')$ ■

Le lemme suivant nous sera souvent utile:

Lemme 22.1.1

Soit C un sous-corps d'un corps commutatif F et R une sous-C-algèbre de F, de corps des fractions F. Alors F admet au moins une base de C-transcendance contenue dans R.

Démonstration:

L'ensemble des parties C-algébriquement libres de R est non vide (car $\emptyset$ est une telle partie). Ordonné par inclusion, il est inductif (vérification immédiate). Il admet donc au moins un élément maximal. Soit $\mathscr{C}$ un tel élément maximal. Tout élément de R est alors algébrique sur le corps $E = C(\mathscr{C})$. Puisque F est le corps des fractions de R, on en déduit que tout élément de F est algébrique sur E; donc $\mathscr{C}$ est une C-base de transcendance de F ■

Transcendance et isomorphismes

Soit K un sous-corps d'un corps commutatif L. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de L, et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'indéterminées sur K. Notons φ l'unique morphisme de K-algèbres $K[(T_i)_{i\in I}] \to L$ tel que $\varphi(T_i) = b_i$ pour tout i. Les définitions montrent que φ est injectif ssi la famille (b_i) est K-algébriquement libre. S'il en est ainsi, φ se prolonge de manière unique en un morphisme $\widetilde{\varphi}$ de K-algèbres à