TOUT EN FICHES

Jean-Pierre Lecoutre

EXERCISES ET MÉTHODES DE

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

LICENCE D'ÉCONOMIE-GESTION
IUT, IEP

DUNOD

Graphisme de couverture : Studio Dunod, Elizabeth Riba
Illustrations de couverture : © janews – shutterstock – 2212550997

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-087443-9

Sommaire

Avant-propos

Ce volume de la série TD, de la collection « Éco Sup », s'adresse aux étudiants de Licence d'Économie et de Gestion. Au début de chaque chapitre, les principales notions de cours et les résultats essentiels sont rappelés de façon succincte dans « L'essentiel du cours ». Un bref texte introductif indique les points essentiels qui vont être abordés et étudiés dans le chapitre. Il ne s'agit pas d'un résumé de cours, mais seulement d'un avant-propos où l'on essaie d'expliquer, dans un langage peu formalisé, le fondement et l'utilité des notions définies ensuite de façon plus formelle.

Chacun des huit chapitres présente la même structure. Un certain nombre d'affirmations constituent le paragraphe « Pouvez-vous répondre ? ». La réponse en vrai-faux permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien compris les principaux points de cours. Il doit exercer sa vigilance face à des affirmations, parfois simples, mais qui peuvent contenir un piège.

Les « Questions de réflexion » qui sont proposées ensuite ont essentiellement pour but de mettre l'accent sur certains éléments de cours un peu délicats. Il faut être attentif aux commentaires qui figurent dans la solution de l'exercice, en fin de chapitre.

Les exercices d'« Entraînement » permettent enfin à l'étudiant de tester sa capacité à passer de la théorie à la pratique. Ils suivent l'ordre de progression du cours et sont précédés d'un titre indiquant la principale notion à laquelle ils se rapportent. Une rubrique « Analyse de l'énoncé et conseils » précise la démarche à suivre et les résultats de cours à utiliser pour résoudre l'exercice proposé.

Les solutions très détaillées sont regroupées en fin de chapitre, et souvent assorties de commentaires.

Dans le dernier chapitre, les textes récents des examens de 2^{e} année de Licence d'Économie et Gestion de l'université Panthéon-Assas permettent de retrouver les principaux points abordés dans les chapitres précédents. L'étudiant peut ainsi évaluer le niveau de difficulté de ce qui peut être demandé à une épreuve d'examen. Les corrigés sont rassemblés après les énoncés.

Notion de probabilité

1

L'ESSENTIEL DU COURS

Si on veut formaliser un problème dans lequel le hasard intervient, on doit construire un modèle probabiliste, choisi en fonction du but que l'on poursuit. Ce modèle est constitué d'un ensemble fondamental, d'une tribu d'événements et d'une probabilité. Le choix de l'ensemble fondamental est très important pour le calcul ultérieur des probabilités des événements. Nous introduirons aussi les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance. La formule de Bayes est souvent très utile pour le calcul de probabilités conditionnelles.

1. Ensemble fondamental

Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle un *événement élémentaire*. L'ensemble des résultats possibles s'appelle *ensemble fondamental* (ou univers) et est noté traditionnellement Ω. Chaque élément ω de Ω représente donc un événement élémentaire, et toute partie $A \subset \Omega$ (ou $A \in \mathcal{P}(\Omega)$) sera un événement. Parfois on dit que Ω est l'ensemble des *éventualités possibles* et les événements élémentaires sont alors les singletons, c'est-à-dire les ensembles réduits à un seul élément $\{\omega\}$, qui sont effectivement en toute rigueur des événements, puisqu'appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas du point ω.

2. Algèbre et tribu d'événements

Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle un *espace probabilisable*. Même si Ω est fini, le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ peut être un nombre très grand et dans ce cas on est amené alors à ne considérer qu'une famille restreinte $\mathcal{A}$ de parties de Ω, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Pour que le résultat des opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire) soit encore un événement, il est nécessaire que la famille d'événements qui a été retenue soit fermée, ou stable, vis-à-vis de ces opérations, c'est-à-dire qu'il soit bien un élément de la famille. De plus, les événements « certain », Ω, et « impossible », $\emptyset$, doivent également appartenir à cet ensemble. Ainsi, on associera à une épreuve aléatoire un ensemble non vide de parties de Ω, noté $\mathcal{A}$, qui vérifiera :

$\boxed{C_1}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$;

$\boxed{C_2}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Il y a fermeture pour le complémentaire et l'union. Cet ensemble $\mathcal{A}$ s'appelle une *algèbre* de parties de Ω. Bien entendu, grâce aux lois de Morgan, on a une définition équivalente en remplaçant la condition C_2 par :

$\boxed{C'_2}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B \in \mathcal{A}$.

► Propriétés d'une algèbre

$\boxed{P_1}$ La famille étant non vide, on en conclut que :

$$\emptyset \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \Omega \in \mathcal{A}$$

$\boxed{P_2}$ Si $A_j \in \mathcal{A}$ pour $1 \leq j \leq n$, on démontre par récurrence que :

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$$

$\boxed{P_3}$ Si $A_j \in \mathcal{A}$ pour $1 \leq j \leq n$, on démontre également par passage au complémentaire que :

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$$

Cependant, certaines expériences peuvent se dérouler indéfiniment et on a donc besoin de renforcer la propriété P_2 de fermeture pour l'union finie par une condition de fermeture pour l'union dénombrable, soit :

$\boxed{C_3}$ Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Cette condition exprime que toute union dénombrable d'événements est encore un événement. L'ensemble $\mathcal{A}$ auquel on impose les conditions C_1 et C_3 s'appelle alors une σ-*algèbre* ou *tribu* d'événements.

Le couple formé de l'ensemble fondamental Ω et de la tribu d'événements associée $\mathcal{A}$ s'appelle un *espace probabilisable*.

3. Probabilité

Définition. On appelle probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :

(i) $P(\Omega) = 1$;

(ii) pour toute suite A_n d'événements incompatibles, soit $A_n \in \mathcal{A}$ avec $A_m \cap A_n = \emptyset$ pour $m \neq n$:

$$P\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

propriété dite de σ-additivité.

Une probabilité est donc une application qui à un événement va associer un nombre compris entre 0 et 1. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle un *espace probabilisé*.

▶ Propriétés

$\boxed{P_1}$ L'événement impossible est de probabilité nulle :

$$P(\emptyset) = 0$$

$\boxed{P_2}$ La probabilité de l'événement complémentaire d'un événement quelconque A s'obtient par :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$\boxed{P_3}$ Si un événement en implique un autre, sa probabilité est plus petite :

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$\boxed{P_4}$ La probabilité de l'union de deux événements s'obtient par la formule de Poincaré :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Probabilités conditionnelles

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un événement particulier B de $\mathcal{A}$ tel que $P(B) > 0$. La connaissance de la réalisation de B modifie la probabilité de réalisation d'un événement élémentaire, puisque l'ensemble des résultats possibles est devenu B et non plus Ω. Cette nouvelle probabilité, notée $P(.|B)$, est définie sur la tribu conditionnelle :

$$\mathcal{A}|B = \{A \cap B / A \in \mathcal{A}\}$$

par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La formule de définition de la probabilité conditionnelle peut aussi s'écrire, si $P(A) > 0$:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Elle s'appelle parfois *formule des probabilités composées* et se généralise par récurrence :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \\ &\qquad P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \prod_{k=2}^{n} P\left[A_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right] \end{aligned}$$

5. Théorème de Bayes

Un *système complet d'événements* est une partition de Ω en événements $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de probabilités strictement positives, $P(A_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$, et incompatibles deux à deux, *i.e.* avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$. On suppose que les probabilités des événements inclus dans chacun des A_i sont connues et on va donc décomposer un événement quelconque B sur ce système :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

On aboutit ainsi à la *formule de la probabilité totale :*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Ceci va nous permettre de calculer les probabilités *a posteriori* $P(A_i|B)$, après réalisation d'un événement B, à partir des probabilités *a priori* $P(A_i)$, $1 \leq i \leq n$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

résultat appelé *formule de Bayes* ou parfois *théorème de Bayes.*

6. Indépendance en probabilité

Définition. *Deux événements A* et *B sont dits indépendants, relativement à la probabilité P, si :*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

La probabilité de réalisation simultanée de deux événements indépendants est égale au produit des probabilités que chacun de ces événements se produise séparément. En conséquence, si $P(B) > 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

La réalisation d'un événement ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.

▶ Indépendance mutuelle

Si l'on considère n événements A_i, avec $n > 2$, il y a lieu de distinguer l'indépendance deux à deux qui impose :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

de l'indépendance mutuelle, condition plus forte qui s'écrit :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}) \quad 2 \leq k \leq n$$

pour tous les sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

POUVEZ-VOUS RÉPONDRE ?

	Vrai	Faux
1. On peut associer deux ensembles fondamentaux différents à une même expérience.	☐	☐
2. L'égalité $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ implique que les événements A et B sont incompatibles.	☐	☐
3. L'information apportée par la connaissance de la réalisation d'un événement B augmente la probabilité d'un autre événement A, *i.e.* $P(A\|B) \geq P(A)$.	☐	☐
4. Si deux événements sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	☐	☐
5. Si deux événements sont indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi.	☐	☐
6. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ avec équiprobabilité des événements élémentaires sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Les événements $A = \{a, b\}$ et $B = \{a, c\}$ sont dépendants car ils sont réalisés simultanément quand l'événement élémentaire a est réalisé.	☐	☐

QUESTIONS DE RÉFLEXION

7. On lance deux pièces de monnaie parfaitement identiques et on note les trois résultats possibles PP, FF et PF où la lettre P (resp. F) désigne le résultat pile (resp. face). L'événement élémentaire PF est-il de probabilité $1/3$?

8. Un roi sanguinaire a imaginé le jeu suivant : il fait arrêter quelques-uns de ses sujets et les fait conduire devant un sac contenant mille jetons numérotés de un à mille ; ils doivent alors tirer trois fois un jeton dont on note le numéro avant de le remettre dans le sac. Le roi leur demande alors de choisir le cas dans lequel ils seront pendus : soit lorsque le produit des trois nombres est pair, soit dans le cas contraire. Quelle est la probabilité pour un sujet d'être pendu :

– s'il connaît le calcul des probabilités ?

– s'il ne le connaît pas ?

9. On considère deux événements quelconques A et B. Exprimer en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ les probabilités conditionnelles suivantes : $P(A|A \cup B)$, $P(A|A \cap B)$ et $P(\bar{B}|\bar{A})$; que devient cette dernière probabilité lorsque A et B sont indépendants ?

10. On suppose que dans une famille de deux enfants, les différentes répartitions ordonnées fille-garçon sont équiprobables.

a) Sachant que l'un au moins des enfants est une fille, calculer la probabilité que les deux enfants soient des filles.

b) Si vous sonnez à l'appartement de cette famille et qu'une fille vous ouvre, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

ENTRAÎNEMENT

Ensemble fondamental

11. On lance simultanément deux dés numérotés de 1 à 6. Déterminer l'ensemble fondamental Ω dans les cas suivants :

a) Les deux dés sont distincts (par exemple un rouge et un bleu).

b) Les deux dés sont identiques.

c) Les deux dés sont identiques et on s'intéresse seulement à la parité du résultat.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'ensemble fondamental est déterminé à chaque fois par la manière dont un résultat élémentaire va être noté.

12. On lance six boules dans quatre cases distinctes. Représenter l'ensemble fondamental Ω dans les deux cas suivants.

a) Les boules sont numérotées de 1 à 6.

b) Les boules sont identiques.

Analyse de l'énoncé et conseils. Comme dans l'exercice précédent, il faut se poser la question de savoir ce qui caractérise un événement élémentaire.

13. Au résultat *pile* du lancer d'une pièce on associe la valeur $+1$ et la valeur -1 à *face*. Déterminer l'ensemble fondamental Ω associé aux expériences aléatoires suivantes :

a) On effectue six lancers successifs.

b) On lance six pièces identiques simultanément.

c) On lance six pièces identiques simultanément et on ne s'intéresse qu'à la valeur du résultat total obtenu.

Analyse de l'énoncé et conseils. Chaque événement élémentaire est spécifié de façon différente selon les cas.

Atomes

14. Soit A, B et C trois événements quelconques liés à une même épreuve aléatoire. Décomposer les événements $E = (A \cup B)\Delta C$ et $F = A \cup (B\Delta C)$ en une réunion d'événements incompatibles deux à deux et indécomposables, appelés *atomes*. Dans quel cas les événements E et F sont-ils confondus ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Si un schéma ne peut en aucun cas remplacer une démonstration, la représentation des événements E et F à partir de A, B et C sera une aide précieuse pour déterminer leur décomposition en atomes. Ces derniers sont des événements qui s'expriment sous la forme $A \cap B \cap \bar{C}$, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \ldots$

Algèbre d'événements

15. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Déterminer l'algèbre $\mathcal{A}$ contenant les événements $\{c\}$ et $\{d\}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Ce sont les propriétés générales d'une algèbre qui vont permettre de déterminer celle qui est demandée.

16. Soit $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Déterminer l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par la partition $\Pi = \left\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e\}\right\}$ de Ω.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'algèbre demandée doit contenir tous les éléments de la partition et donc aussi toutes leurs réunions.

17. Déterminer toutes les algèbres d'événements définies sur les ensembles Ω suivants.

a) $\Omega = \{a\}$.

b) $\Omega = \{a, b\}$.

c) $\Omega = \{a, b, c\}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Les algèbres finies comportent 2^k éléments, avec k variant de 1 à card Ω.

18. À l'aide des opérations d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, construire à partir de deux sous-ensembles quelconques A et B de Ω toutes les parties possibles de cet ensemble fondamental. Montrer qu'il s'agit d'une algèbre d'événements.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut considérer la partition de Ω que l'on peut former à partir des atomes (*cf.* exercice 14, page précédente).

Tribu d'événements

19. Soit Ω un ensemble infini non dénombrable et $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties A de Ω telles que A ou bien $\bar{A}$ est dénombrable. Montrer que $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre ou tribu d'événements.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut vérifier les propriétés caractéristiques d'une tribu et utiliser le fait qu'un ensemble inclus dans un ensemble dénombrable est lui-même dénombrable.

Calcul de probabilités

20. Soit A et B deux événements tels que $P(A) = \dfrac{1}{4}, P(B) = \dfrac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$. Calculer les probabilités de $E =$ « au moins l'un de ces événements se produit » et $F =$ « un seul de ces événements se produit ».

Analyse de l'énoncé et conseils. C'est une application directe de la formule de Poincaré.

21. On considère un lot de 100 bulletins sur lesquels figurent les réponses *oui* ou *non* à trois questions. Après dépouillement, les nombres de réponses *oui* aux questions 1, 2 et 3 sont respectivement 60, 40 et 30. Les nombres de réponses *oui* associées aux questions 1 et 2, 1 et 3 et 2 et 3 sont respectivement 24, 15 et 12. Enfin, sur 10 bulletins il est répondu *oui* aux trois questions. On désigne par E_i, $1 \leq i \leq 3$, l'événement « la réponse est *oui* à la i−ème question » sur un bulletin prélevé au hasard parmi les 100. On demande d'exprimer à l'aide des E_i les trois événements suivants, puis de calculer leur probabilité : sur le bulletin prélevé, on a obtenu deux *oui* et un *non*, un *oui* et deux *non*, trois *non*.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut décomposer chaque événement considéré en événements incompatibles et utiliser une formule souvent utile dans ce type d'exercice : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

22. Un étudiant doit répondre à quatre questions à choix multiple où trois réponses sont proposées à chaque fois, une seule étant correcte.

a) Dans le cas où l'étudiant répond au hasard et de façon indépendante à chaque question, calculer la probabilité qu'il donne plus de réponses justes que fausses.

b) Que devient cette probabilité s'il n'y a que deux réponses possibles à chaque question ? et s'il y en a quatre ?

Analyse de l'énoncé et conseils. On construit l'ensemble fondamental le plus simple décrivant l'ensemble des résultats possibles, de telle sorte qu'il y ait équiprobabilité des événements élémentaires. Ayant écrit l'événement considéré à l'aide de ces événements élémentaires, le calcul de sa probabilité se fait sans difficulté.

23. Deux joueurs A et B participent à un jeu avec des probabilités respectives de victoire à chaque partie p et $q = 1 - p$. Le gagnant est celui qui le premier obtient deux victoires de plus que l'autre. Quelle est la probabilité de gain de chaque joueur ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Il est conseillé de faire un arbre du déroulement des deux premières parties et de marquer à l'extrémité des quatre branches la nouvelle valeur de la probabilité de gain du joueur A par exemple.

Problèmes de dénombrement

24. On jette trois dés identiques numérotés de 1 à 6. Calculer la probabilité d'observer les résultats suivants.

a) Trois fois le même chiffre.

b) Deux fois le même chiffre et un autre différent.

c) Trois chiffres différents.

Analyse de l'énoncé et conseils. Ayant construit l'ensemble fondamental où il y a équiprobabilité des événements élémentaires, on écrit, en utilisant par exemple les lettres de l'alphabet, la forme générale du résultat considéré pour calculer ensuite le nombre de résultats différents de cette forme.

25. On tire au hasard et sans remise cinq cartes d'un jeu de trente deux. Calculer la probabilité d'obtenir : une paire (résultat de la forme *aabcd*), deux paires (*aabbc*), un full (*aaabb*).

Analyse de l'énoncé et conseils. Voir exercice précédent. Il s'agit de problèmes combinatoires délicats qui demandent beaucoup d'attention pour bien déterminer tous les résultats différents ayant la même forme.

26. Un tiroir contient n paires de gants différentes. En raison d'une panne d'électricité, Achille Talon prend au hasard $2r$ gants dans ce tiroir, avec $r < n$. Quelle est la probabilité qu'il n'ait obtenu aucune paire de gants appareillés ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut d'abord dénombrer tous les résultats possibles équiprobables. Ensuite, on doit examiner comment les gants doivent être choisis pour qu'il n'y ait aucune paire appareillée, en n'oubliant pas qu'une paire est constituée de deux gants, un droit et un gauche !

Probabilités conditionnelles

27. On cherche une lettre qui a la probabilité p de se trouver dans l'un des quatre tiroirs d'un secrétaire. Quelle est la probabilité qu'elle se trouve dans le quatrième tiroir, sachant qu'on ne l'a pas trouvée dans les trois premiers ?

Analyse de l'énoncé et conseils. C'est une simple application de la définition d'une probabilité conditionnelle. Il faut cependant bien noter que p est la probabilité que la lettre soit dans le secrétaire et que, si elle y est, tous les tiroirs ont la même probabilité de la contenir.

28. On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 qui contiennent respectivement deux boules noires, deux boules blanches et une blanche et une noire. On vous présente l'une de ces trois urnes tirée au hasard ; quelle est la probabilité que ce soit U_1 :

– si vous savez que l'urne contient au moins une boule noire ?

– si vous tirez une boule noire ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Il s'agit encore du calcul d'une probabilité conditionnelle où il faut seulement être attentif à la définition de l'événement par lequel on conditionne.

29. Une élection a lieu au scrutin majoritaire à deux tours. Deux candidats A et B sont en présence. Au premier tour 40 % des voix vont à A et 45 % à B, le reste étant constitué d'abstentions. Aucun candidat n'ayant la majorité absolue, un second tour est organisé. Tous les électeurs ayant voté la première fois voteront à nouveau. Un sondage indique par ailleurs que 5 % des voix de A se reporteront sur B et que 10 % des voix de B iront à A. On estime de plus que les deux tiers des électeurs n'ayant pas voté au premier tour voteront, à raison de 60 % pour A et 40 % pour B.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un abstentionniste du premier tour vote pour A ? pour B ?

b) D'après ce sondage, quel candidat a la plus forte probabilité d'être élu ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Les résultats du premier tour se traduisent en termes de probabilités et les éléments du sondage en termes de probabilités conditionnelles au vote du premier tour. On doit ensuite calculer les probabilités conditionnelles à l'abstention au premier tour et en déduire la probabilité du vote au second tour, pour chacun des candidats.

Théorème de Bayes

30. On classe les gérants de portefeuille en deux catégories : ceux qui sont bien informés et ceux qui ne le sont pas. Lorsqu'un gérant bien informé achète une valeur boursière pour son client, la probabilité que le cours de celle-ci monte est de 0,8 ; dans le cas d'un gérant mal informé, cette probabilité ne vaut que 0,5. Si on choisit au hasard un gérant dans un annuaire professionnel, la probabilité qu'il soit bien informé est de 0,2. Calculer la probabilité que le gérant ainsi choisi soit mal informé, sachant que la valeur qu'il a achetée a monté.

Analyse de l'énoncé et conseils. C'est une application directe du théorème de Bayes.

31. Dans la coupe de France de football, une équipe E de première division estime qu'elle gagnera si elle rencontre une équipe de division inférieure et qu'elle a une chance sur deux de gagner si c'est une équipe de première division. Sachant que la probabilité de rencontrer une équipe de division inférieure est p, calculer la probabilité que E ait rencontré une équipe de division inférieure, sachant qu'elle a remporté son match.

Analyse de l'énoncé et conseils. Après avoir traduit en termes de probabilités les informations fournies dans l'énoncé, on applique la formule de Bayes.

SOLUTIONS

1 ▸ Vrai. L'ensemble Ω dépend évidemment de l'expérience considérée, mais aussi du choix de celui qui construit le modèle, et par là présente donc un certain arbitraire. L'ensemble fondamental naturel associé à un jet de dé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mais si on ne s'intéresse qu'à la parité du résultat, on peut retenir également $\Omega = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$.