OPENBOOK

Licence

Statistique et probabilités en économie-gestion

Christophe **Hurlin**, Valérie **Mignon**

2e édition

DUNOD

Les contenus complémentaires et les corrigés des exercices sont disponibles en ligne sur www.dunod.com/EAN/9782100780235 ou accesibles en flashant le QR code.

Éditorial : Guillaume Clapeau et Margaux Lidon
Fabrication : Martine Pierron
Mise en page : Lumina Datamatics
Couverture : Elizabeth Riba

Création graphique de la maquette intérieure : SG Créations
Création graphique de la couverture : Valérie Goussot et Delphine d'Inguimbert

Illustrations : Judith Chouraqui

Crédits iconographiques : p. 84 : Chee-Onn Leong – Fotolia.com ; p. 254 : Kashisu – Fotolia.com ; p. 290 : lenets_tan – Fotolia.com ; couverture : August_0802 – www.shutterstock.com

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083670-3

Avant-propos

Qu'est-ce que la statistique ? La statistique est une science recouvrant plusieurs dimensions. On emploie d'ailleurs très fréquemment le pluriel « statistiques » pour désigner cette discipline et témoigner ainsi de sa diversité. La statistique englobe la recherche et la collecte de données, leur traitement et leur analyse, leur interprétation, leur présentation sous la forme de tableaux et graphiques, le calcul d'indicateurs permettant de les caractériser et synthétiser... Ces différents éléments renvoient à ce que l'on a coutume de nommer la statistique descriptive, fondée sur l'observation de données relatives à toutes sortes de phénomènes (économiques, financiers, historiques, géographiques, biologiques, etc.).

Il arrive cependant fréquemment que les données représentatives du phénomène que l'on souhaite étudier ne soient pas parfaitement connues, c'est-à-dire pas toutes parfaitement observables, au sens où elles ne fournissent qu'une information partielle sur l'ensemble du phénomène que l'on analyse. Afin de pouvoir en réaliser une étude statistique, il est alors nécessaire d'inférer des informations à partir des quelques éléments dont on dispose. En d'autres termes, le statisticien devra effectuer des hypothèses concernant les lois de probabilité auxquelles obéit le phénomène à analyser. La statistique fait alors appel à la théorie des probabilités et est qualifiée de statistique mathématique ou encore de statistique inférentielle.

Un bref retour sur l'histoire. Même si le terme de « statistique » est généralement considéré comme datant du XVIII^{e} siècle[1], le recours à cette discipline remonte à un passé bien plus éloigné. On fait en effet souvent référence à la collecte de données en Chine en 2238 av. J.-C. concernant les productions agricoles, ou encore en Égypte en 1700 av. J.-C. en référence au cadastre et au cens. La collecte de données à des fins descriptives est ainsi bien ancienne, mais ce n'est qu'au XVIII^{e} siècle qu'est apparue l'idée d'utiliser les statistiques à des fins prévisionnelles. Ce fut le cas en démographie où les statistiques collectées lors des recensements de la population ont permis l'élaboration de tables de mortalité en Suède et en France.

Du côté des mathématiciens, les recherches sur le calcul des probabilités se sont développées dès le XVII^{e} siècle, au travers notamment des travaux de Fermat et Pascal. Même si Condorcet et Laplace ont proposé quelques exemples d'application de la théorie des probabilités, ce n'est qu'au cours de la deuxième moitié du XIX^{e} siècle, grâce aux travaux de Quételet, que l'apport du calcul des probabilités à la statistique fut réellement mis en évidence, conduisant ainsi aux prémisses de la statistique mathématique. Cette dernière s'est ensuite largement développée à la fin du XIX^{e} siècle et dans la première moitié du XX^{e} siècle.

Par la suite, grâce notamment aux progrès de l'informatique peu avant la deuxième moitié du XX^{e} siècle, de nouvelles méthodes d'analyse ont vu le jour, comme l'analyse multidimensionnelle permettant d'étudier de façon simultanée plusieurs types de données. La deuxième moitié du XX^{e} siècle est aussi la période durant laquelle plusieurs courants de pensée en statistique s'affrontent, notamment autour de la notion de probabilité.

1 On attribue en effet ce terme au professeur allemand Gottfried Achenwall (1719-1772) qui, en 1746, emploie le mot *Statistik* dérivé de *Staatskunde*.

Les domaines d'application de la statistique sont multiples. Initialement employée en démographie, elle est en effet utilisée dans toutes les sciences humaines et sociales comme l'économie, la finance, la gestion, le marketing, l'assurance, l'histoire, la sociologie, la psychologie, etc., mais aussi en médecine, en sciences de la terre et du vivant (biologie, géologie...), météorologie, etc. Cet éventail des domaines illustre ainsi toute la richesse de la statistique dont cet ouvrage vise à rendre compte.

En quoi ce manuel se distingue-t-il des autres ouvrages de statistique ? Tout en présentant de façon rigoureuse tous les développements théoriques nécessaires, cet ouvrage propose un exposé clair et pédagogique des différents concepts en les illustrant par de très nombreux exemples et cas concrets. Le lecteur sera ainsi à même de répondre à de multiples questions qui se posent au quotidien dans les domaines de l'économie, la finance et la gestion.

Chaque chapitre débute par des questions et exemples concrets, permettant de mettre en avant l'intérêt des concepts statistiques qui vont être étudiés. Afin de répondre à ces interrogations et traiter ces cas concrets, les différents outils et méthodes statistiques sont ensuite présentés. L'exposé est ainsi progressif, mêlant de façon harmonieuse définitions littéraire et mathématique. En fin de chapitre figurent des exercices, dont plusieurs nouveaux introduits dans cette deuxième édition, qui permettent au lecteur d'évaluer et tester les connaissances acquises. Les exercices font l'objet de **corrigés très détaillés, disponibles en ligne sur www.dunod.com**, sur la page de l'ouvrage. Le lecteur trouvera également sur cette page Internet des annexes à télécharger reproduisant les principales **tables statistiques**, ainsi que de nombreux **compléments** relatifs à plusieurs chapitres de l'ouvrage.

Diverses rubriques spécifiques à la collection « Openbook » composent les chapitres. Outre les prérequis et les objectifs propres à chaque chapitre, une rubrique « Les grands auteurs » présente de façon synthétique un auteur clé dont les travaux ont profondément marqué le développement de la statistique. La rubrique « Focus » permet quant à elle de faire rapidement le point sur un concept fondamental, alors que la rubrique « Pour aller plus loin » offre la possibilité au lecteur d'approfondir un ou plusieurs points particuliers. La rubrique « En pratique » permet également au lecteur de se familiariser avec l'application concrète d'un concept ou d'une méthode. Enfin, la rubrique « Trois questions à... » illustre l'orientation résolument appliquée de l'ouvrage en donnant la parole à quelques grands acteurs du monde professionnel, nous expliquant la façon dont ils utilisent la statistique au quotidien.

Comment est organisé ce manuel ? Cet ouvrage a pour objectif de fournir au lecteur l'ensemble des connaissances que doit acquérir un étudiant au cours de son cursus de licence en économie-gestion ou de son cycle d'études Bac+3. Il couvre donc les trois années du cycle Bac+3 (licence ou bachelor). Il s'organise ainsi en trois parties, chacune étant relative à une année du cycle Bac+3. La première partie, correspondant au programme de la première année post-bac, traite de la statistique descriptive et comporte quatre chapitres. Le chapitre 1 étudie les distributions à un caractère et présente l'ensemble des concepts de base de la statistique descriptive : tableaux, graphiques et caractéristiques clés comme la moyenne, la variance, la médiane, etc. Le chapitre 2 étend l'analyse au cas de deux variables statistiques et porte ainsi sur les distributions à deux caractères. Le chapitre 3 offre une présentation des indices, très utilisés en pratique. Le chapitre 4 propose quant à lui une introduction à l'analyse

des séries temporelles en dotant le lecteur de l'ensemble des outils nécessaires pour l'étude de l'évolution d'un phénomène au cours du temps.

La deuxième partie de l'ouvrage, correspondant au programme de la deuxième année du cycle Bac+3, relève du domaine de la statistique mathématique et se compose également de quatre chapitres. La notion fondamentale de probabilité fait l'objet du chapitre 5. Le chapitre 6 traite des variables aléatoires, c'est-à-dire des variables dont les valeurs sont soumises au hasard. L'étude de ces variables nécessite le recours à des lois de probabilité, dont les plus usuelles (lois normale, binomiale, de Student, de Poisson...) sont présentées au cours du chapitre 7. Le chapitre 8 clôt la deuxième partie par l'étude des propriétés de convergence.

La troisième partie de l'ouvrage, correspondant au programme de la dernière année du cycle Bac+3, traite de l'estimation et des tests. Le chapitre 9 est relatif à l'estimation, le chapitre 10 proposant quant à lui une description de l'une des méthodes les plus utilisées connue sous le nom de maximum de vraisemblance. La théorie des tests statistiques fait l'objet du chapitre 11, dernier chapitre du manuel.

Remerciements. Cet ouvrage est le fruit de divers enseignements de statistique dispensés par les auteurs en première, deuxième et troisième années de licence à l'Université d'Orléans et à l'Université Paris Nanterre. Nous adressons nos remerciements à nos étudiants dont les questions et commentaires lors de nos cours ont naturellement contribué à la présentation pédagogique de ce manuel. Nous remercions Lionel Ragot pour la confiance qu'il nous a accordée en nous encourageant à rédiger ce manuel, ainsi que les éditions Dunod. Nous remercions très vivement nos collègues et amis Denisa Banulescu, Cécile Couharde, Olivier Darné, Emmanuel Dubois, Gilles Dufrénot, Elena Dumitrescu, Meglena Jeleva et Hélène Raymond pour leur relecture très attentive de la première édition de ce manuel parue en 2015 et pour leurs remarques et suggestions toujours très constructives. Emmanuel Dubois nous a également aidé pour la réalisation de certains graphiques dans la première partie de l'ouvrage, qu'il en soit chaleureusement remercié. Alina Catargiu, Axelle Chauvet, Andreea Danci, Damien Deballon, Laurent Ferrara, Yoann Grondin, Abdou Ndiaye, Ekaterina Sborets et Stéphanie Tring ont très gentiment accepté de répondre à nos questions, nous leur adressons nos plus vifs remerciements pour leurs contributions. Enfin, nous remercions très sincèrement nos familles pour leur soutien sans faille et leur patience lors de la rédaction de cet ouvrage.

À Séverine, Josiane, Emmanuel et Pierre.
À Tania et Emmanuel.

Table des matières

Partie 1

Statistique descriptive

Initialement employée en démographie dans le cadre des recensements de la population, la statistique descriptive est utilisée dans de nombreux domaines et disciplines, comme l'économie, la finance, l'assurance, le marketing, l'histoire, la géographie, la géologie, la biologie, la médecine, la météorologie, le sport, etc. Ce très large éventail de domaines d'application s'explique par le fait que dès lors que l'on dispose de données, c'est-à-dire d'observations, sur le phénomène que l'on souhaite étudier, il est nécessaire de les traiter afin de pouvoir les exploiter pour en extraire un certain nombre d'informations pertinentes. Tel est précisément l'objet de la statistique descriptive, qui permet de résumer et synthétiser l'ensemble des données étudiées au travers de graphiques, tableaux et divers indicateurs dont l'un des plus connus est la moyenne.

Au-delà de l'étude d'un seul phénomène, la statistique descriptive permet aussi d'analyser et chiffrer la relation entre plusieurs phénomènes, c'est-à-dire plusieurs variables, et de mesurer l'intensité d'une telle liaison.

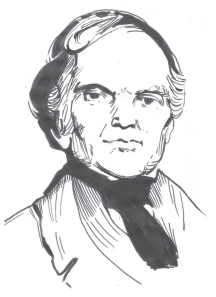
Chapitre 1

Quel est le salaire annuel moyen des hommes et des femmes en France ? Quelle est la proportion d'hommes et de femmes gagnant plus que ce salaire moyen ? À quel niveau de salaire se situe la plus grande partie de la population ? Les salaires ont-ils beaucoup fluctué ces cinquante dernières années ? Ont-ils suivi une évolution similaire pour les hommes et les femmes ? Les femmes sont-elles victimes d'inégalités salariales ?

La **statistique descriptive** permet de répondre à toutes ces questions. Elle permet en effet de résumer et synthétiser, par le biais de tableaux, graphiques et indicateurs statistiques, l'ensemble des données étudiées.

LES GRANDS AUTEURS

William Playfair (1759-1823)



Ingénieur et économiste écossais, **William Playfair** est considéré comme l'un des pionniers de la représentation graphique des données statistiques. Dans son ouvrage *Commercial and Political Atlas* paru en 1786, il introduit plusieurs représentations graphiques, comme celle retraçant l'évolution temporelle des intérêts de la dette publique britannique au cours du XVIII^{e} siècle ou encore le **diagramme en bâtons** lui permettant de comparer les importations et exportations de l'Écosse en 1781 à celles d'autres pays. Également crédité de l'invention du célèbre **histogramme**, les représentations graphiques proposées par Playfair figurent parmi celles les plus utilisées en statistique descriptive. Quelques années plus tard, son ouvrage *Statistical Breviary* paru en 1801 présente un schéma circulaire, connu aujourd'hui sous le nom de **représentation par secteurs** (ou « camembert »). ■

Distributions à un caractère

Plan

Pré-requis

→ **Connaître** les opérations mathématiques de base.

Objectifs

→ **Synthétiser, résumer et extraire** l'information pertinente contenue dans une série statistique.

→ **Représenter** graphiquement une distribution statistique.

→ **Construire** un tableau statistique.

→ **Définir** les indicateurs statistiques clés.

Le tableau 1.1 donne la valeur du salaire annuel net moyen en euros des hommes et des femmes en France de 1950 à 2010 (source des données : Insee). La figure 1.1 représente graphiquement ces mêmes données : la courbe bleue décrit l'évolution du salaire des hommes sur la période 1950-2010, la courbe grise étant relative à l'évolution du salaire des femmes sur la même période. Sans prendre en compte l'effet de l'inflation, on constate globalement une tendance haussière avec un niveau plus élevé du salaire pour les hommes que pour les femmes.

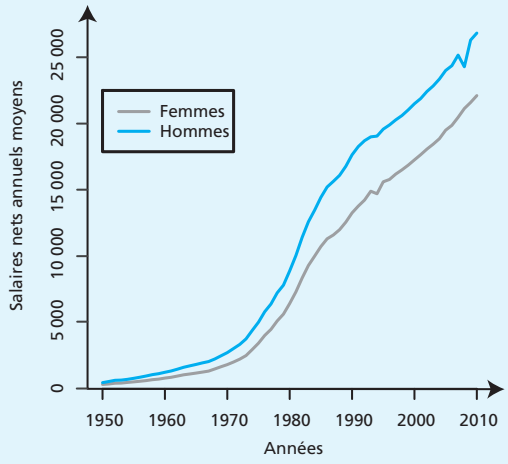
▼ **Tableau 1.1** **Salaire annuel net moyen en euros en France, 1950-2010**

Année	Femmes	Hommes	Année	Femmes	Hommes	Année	Femmes	Hommes
1950	310	444	1970	1 807	2 711	1990	13 258	17 643
1951	344	530	1971	2 002	3 020	1991	13 772	18 266
1952	402	622	1972	2 218	3 330	1992	14 225	18 708
1953	412	637	1973	2 487	3 746	1993	14 894	18 999
1954	462	694	1974	2 946	4 388	1994	14 703	19 054
1955	504	771	1975	3 424	5 009	1995	15 606	19 580
1956	550	854	1976	4 009	5 799	1996	15 782	19 896
1957	600	947	1977	4 465	6 380	1997	16 187	20 278
1958	669	1 051	1978	5 102	7 223	1998	16 506	20 607
1959	711	1 122	1979	5 616	7 804	1999	16 861	21 033
1960	789	1 227	1980	6 418	8 881	2000	17 259	21 498
1961	849	1 327	1981	7 298	10 041	2001	17 651	21 889
1962	941	1 460	1982	8 343	11 411	2002	18 072	22 422
1963	1 037	1 604	1983	9 287	12 587	2003	18 443	22 840
1964	1 099	1 714	1984	9 996	13 464	2004	18 858	23 360
1965	1 168	1 820	1985	10 718	14 430	2005	19 500	24 007
1966	1 240	1 935	1986	11 302	15 212	2006	19 866	24 370
1967	1 316	2 036	1987	11 590	15 639	2007	20 472	25 168
1968	1 479	2 231	1988	11 991	16 093	2008	21 135	24 287
1969	1 648	2 473	1989	12 561	16 776	2009	21 593	26 300
						2010	22 112	26 831

Source : INSEE.

De tels tableaux et graphiques visent ainsi à résumer et rendre lisible l'information contenue dans les données étudiées (ici le salaire). Ils doivent être complétés par le calcul de divers indicateurs statistiques qui nous permettront notamment de déterminer le niveau moyen du salaire sur la période considérée, le niveau du salaire tel que le nombre d'individus (hommes et femmes) percevant moins que ce niveau est identique au nombre d'individus gagnant plus, le niveau du salaire perçu par le plus grand nombre des individus étudiés, ou encore la dispersion, c'est-à-dire la variabilité, du salaire entre hommes et femmes et/ou au cours de la période d'étude.

À cette fin, on calcule des indicateurs dits de tendance centrale, de forme et de dispersion. Le recours aux indicateurs de concentration nous permet en outre de compléter l'analyse afin de quantifier précisément les inégalités de salaires entre hommes et femmes.



▲ **Figure 1.1** **Évolution du salaire annuel net moyen en euros des hommes et des femmes en France, de 1950 à 2010**

1 Définitions et concepts fondamentaux de la statistique descriptive

L'objectif de la statistique descriptive est de résumer et synthétiser l'information contenue dans les données étudiées afin d'en déduire un certain nombre de propriétés. À cette fin, on utilise des tableaux et des graphiques (► section 1.2) et l'on calcule divers indicateurs ou caractéristiques (► section 2).

1.1 Définitions

1.1.1 Population, individus, échantillon

Une **population** est un ensemble, fini ou non, d'éléments que l'on souhaite étudier. Ces éléments portent le nom d'**individus** ou d'**unités statistiques**. Il peut s'agir par exemple d'êtres humains (adultes, enfants, chômeurs, salariés, etc.), d'animaux ou encore d'objets (entreprises, voitures, ordinateurs, incendies, accidents, etc.). Très souvent, la population que l'on souhaite analyser est très grande et il est usuel de se restreindre à l'étude d'un échantillon.

Un **échantillon** est ainsi un sous-ensemble de la population considérée qui doit posséder les mêmes caractéristiques statistiques que la population dont il est issu. À partir d'un échantillon dit **représentatif**, il est alors possible d'effectuer des analyses et d'en déduire des conclusions valables pour la population.

1.1.2 Caractères, modalités et variables statistiques

Caractères et modalités. Afin d'étudier les individus composant une population, on les classe en un certain nombre de sous-ensembles, appelés **caractères** ou **variables statistiques**. À titre d'exemple, si l'on étudie le personnel salarié d'une entreprise, on pourra retenir comme caractères le sexe, l'âge, la profession, le salaire, l'ancienneté dans l'entreprise, etc. Pour une voiture, on retiendra la puissance du moteur, le nombre de places assises, la couleur, le modèle... Les valeurs possibles prises par le caractère ou la variable sont appelées **modalités**. La variable « sexe » a ainsi deux modalités, masculin et féminin, mais les caractères peuvent avoir un très grand nombre de modalités. Notons que les modalités doivent être incompatibles – un individu ne peut pas appartenir simultanément à plusieurs modalités – et exhaustives – toutes les situations possibles doivent être recensées.

Une variable peut être **qualitative** ou **quantitative**. Dans le premier cas, les modalités ne sont pas des valeurs chiffrées, elles ne sont pas mesurables mais uniquement observables (sexe, nationalité, catégorie socio-professionnelle, etc.). Dans le cas d'une variable quantitative, les modalités sont mesurables : à chaque modalité est associé un nombre, c'est-à-dire une valeur chiffrée, représentant la mesure du caractère. Ainsi, la puissance d'un moteur, le nombre de places assises, l'âge, la taille, etc. sont des variables statistiques dont les modalités sont des nombres.

Variables statistiques qualitatives nominales et ordinales. Les variables qualitatives peuvent être **nominales** ou **ordinales**. Dans le premier cas, les modalités ne peuvent être ordonnées, contrairement au cas de variables ordinales. Des exemples usuels de variables nominales sont le sexe (modalités : masculin, féminin), l'état civil (modalités : célibataire, marié ou pacsé, veuf, divorcé), la couleur des yeux ou encore le groupe sanguin. Des variables comme le niveau d'études (avec, par exemple, comme modalités : sans diplôme, primaire, secondaire, universitaire) ou le niveau de satisfaction (peu satisfait, satisfait, très satisfait) sont des variables ordinales. Notons toutefois que le fait de pouvoir ordonner ou non les modalités d'une variable peut être sujet à débats. Prenons l'exemple de la variable « catégorie socio-professionnelle ». Si l'on a coutume d'ordonner comme suit les trois modalités « ouvriers », « employés », « cadres », il devient plus difficile d'ordonner les modalités « enseignant », « chercheur » et « responsable administratif » (en particulier si ces trois modalités correspondent au même niveau de diplôme et/ou de responsabilités).

Variables statistiques quantitatives discrètes et continues et regroupement en classes. Les variables quantitatives peuvent être discrètes ou continues. Une variable est dite **discrète** lorsque ses valeurs sont des nombres isolés dans son intervalle de variation. Il s'agit en règle générale de nombres entiers ; par exemple le nombre d'enfants par famille, le nombre de salariés d'une entreprise, le nombre d'automobiles vendues. Une variable est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre toutes

les valeurs au sein de son intervalle de variation. On peut donner comme exemples la taille, le poids, la température, etc. Le nombre de valeurs possibles à l'intérieur de l'intervalle de variation étant infini, on les groupe par **classes**. Si l'on considère la variable de salaire annuel, on peut par exemple définir les classes suivantes : moins de 10 000 euros, de 10 000 à moins de 15 000 euros, de 15 000 à moins de 20 000 euros, de 20 000 à moins de 25 000 euros, de 25 000 à moins de 40 000 euros, plus de 40 000 euros. La longueur (ou l'étendue) de la classe, c'est-à-dire la différence entre l'extrémité supérieure et l'extrémité inférieure de la classe, est appelée **amplitude de la classe**. Elle peut être variable, comme dans l'exemple précédent, ou constante. Dans la mesure où il existe une infinité de valeurs au sein d'une classe, il est possible de calculer le **centre de classe** défini comme suit :

$$\text{Centre de classe} = \frac{\text{Extrémité inférieure} + \text{Extrémité supérieure}}{2} \tag{1.1}$$

EN PRATIQUE

La distinction variables discrètes/variables continues

Du fait de la précision limitée des mesures, il peut être difficile de distinguer entre variables discrètes et continues. On retient en conséquence fréquemment le groupement ou non en classes comme moyen de distinction : une variable continue est ainsi souvent telle que le nombre de ses valeurs est si important qu'il convient de les regrouper en classes afin de pouvoir l'étudier.

S'agissant des classes, mentionnons (i) que le nombre d'individus par classe doit être suffisamment important de sorte à limiter ou éliminer les variations accidentelles qui peuvent se produire si l'on retient un effectif trop faible et (ii) que les amplitudes ne doivent pas être trop importantes afin de conserver certaines particularités de la variable étudiée.

1.1.3 Fréquences et effectifs

Considérons une population comprenant N individus. Ce nombre est appelé **effectif total** de la population. On regroupe les N individus suivant les k modalités, notées $x_i, i = 1,...,k$, de la variable x. À chaque modalité correspond un nombre d'individus $n_i, i = 1,...,k$, appelé **effectif** (ou fréquence absolue)[1] de la modalité x_i. Dans le cas d'une variable quantitative ou qualitative ordinale, la somme des effectifs n_i pour $i = 1,...,k$ est ainsi égale à l'effectif total de la population :

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{1.2}$$

La **fréquence** (ou fréquence relative) associée à une modalité x_i est définie comme le rapport :

$$f_i = \frac{n_i}{N} \tag{1.3}$$

1 Dans le cas d'une variable qualitative nominale, l'effectif n_i correspond au nombre de fois où la modalité x_i apparaît.

La fréquence donne la proportion d'individus de la population présentant la modalité x_i et est en général exprimée en pourcentage. En utilisant l'équation (1.2), on déduit immédiatement la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1 = 100\ \% \tag{1.4}$$

La somme des fréquences f_i correspondant aux différentes modalités, notée F_i, est appelée **fréquence cumulée** :

$$F_1 = f_1 \tag{1.5}$$

$$F_2 = f_1 + f_2 \tag{1.6}$$

...

$$F_i = f_1 + f_2 + ... + f_j + ... + f_i \tag{1.7}$$

soit :

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j \tag{1.8}$$

La fréquence cumulée F_i indique la proportion des individus pour lesquels la variable étudiée est strictement inférieure à x_{i+1}.

On définit de la même façon les effectifs cumulés :

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j \tag{1.9}$$

1.2 Tableaux statistiques et représentations graphiques

Les individus classés suivant les caractères et modalités forment une **distribution** (ou une **série**) statistique qui peut être synthétisée sous la forme de tableaux statistiques et de graphiques : une série représente ainsi la suite des valeurs prises par la variable étudiée. Ces tableaux sont à une dimension si l'on ne considère qu'un seul caractère et à deux dimensions si l'on retient deux caractères (▶ chapitre 2).

FOCUS

Variable statistique et variable aléatoire

Ainsi que nous l'avons vu, une variable est une entité pouvant prendre toutes les valeurs possibles au sein d'un ensemble de définition donné. Lorsque les valeurs prises par la variable sont soumises au hasard (par exemple, « pile » ou « face » dans le cas du lancer d'une pièce), on parle de **variable aléatoire** (▶ chapitre 6). Il convient de ne pas les confondre avec les **variables statistiques**, objet d'étude de ce premier chapitre. La distribution d'une variable statistique est une distribution *empirique*. Les différentes caractéristiques qui seront présentées dans ce chapitre se réfèrent à cette distribution empirique : fonction de répartition *empirique*, moyenne *empirique*, variance *empirique*, moments *empiriques*, etc. Dans la suite du chapitre, afin d'alléger la présentation nous omettrons généralement le terme « empirique », mais il convient de bien garder cette notion à l'esprit.

1.2.1 Distributions à caractère qualitatif

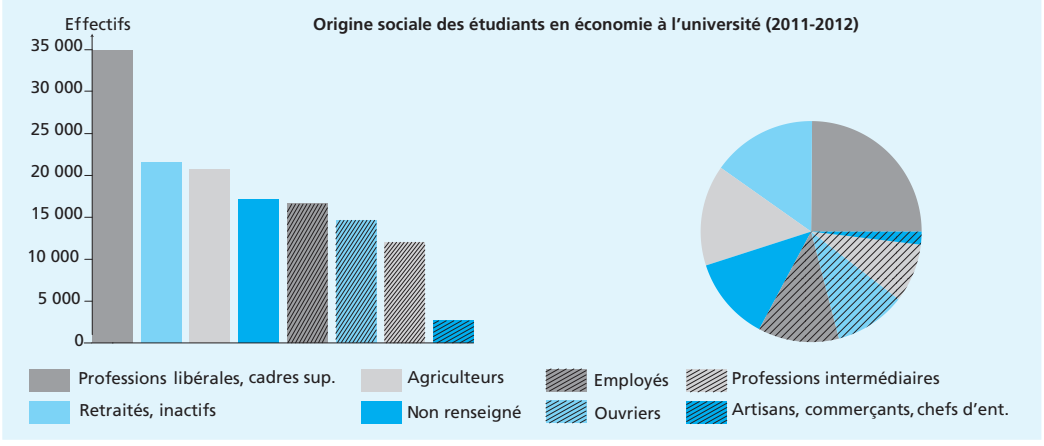
Considérons l'origine sociale des étudiants en économie durant l'année universitaire 2011-2012. Le tableau 1.2 reporte, dans la première colonne, les 8 modalités considérées. Les deuxième et troisième colonnes donnent respectivement l'effectif pour chaque modalité et la fréquence correspondante ; cette dernière étant égale au rapport entre l'effectif de chaque modalité et l'effectif total (140 205 étudiants). On constate ainsi que près de 25 % des étudiants en économie ont leurs parents cadres supérieurs ou exerçant une profession libérale. Une très faible proportion, 1,9 %, d'étudiants est issue du milieu agricole.

▼ **Tableau 1.2 Origine sociale des étudiants en économie à l'université en 2011-2012**

Modalités	Effectifs	Fréquences
Agriculteurs	2 665	1,9
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	12 029	8,6
Professions libérales, cadres supérieurs	34 867	24,9
Professions intermédiaires	14 666	10,5
Employés	17 186	12,3
Ouvriers	16 601	11,8
Retraités, inactifs	21 506	15,3
Non renseigné	20 685	14,8
Total	**140 205**	**100,0**

Source : Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, Mesri (DGESIP-DGRI-SIES).

Deux principaux types de graphiques sont utilisés pour des distributions à caractère qualitatif : la **représentation en tuyaux d'orgue** et la **représentation par secteurs** (camembert).



▲ **Figure 1.2 Représentation en tuyaux d'orgue**

▲ **Figure 1.3 Représentation par secteurs**

Dans les deux cas, le principe de base est que les surfaces doivent être proportionnelles aux effectifs. Sur le graphique 1.2 en tuyaux d'orgue, les différentes modalités sont représentées par des rectangles de base constante et de hauteurs proportionnelles aux effectifs. Il est également possible de considérer les fréquences au lieu des effectifs en ordonnée. Dans le cas d'une représentation par secteurs (► figure 1.3), l'effectif total est représenté par un cercle et les modalités par des secteurs dont la surface (et donc l'angle au centre) est proportionnelle à l'effectif.

1.2.2 Distributions à caractère quantitatif

Cas des variables discrètes. Considérons la répartition du nombre d'enfants sur un échantillon de 150 familles. La première colonne du tableau 1.3 reporte les différentes modalités (nombre d'enfants par famille), la deuxième colonne les effectifs pour chacune des modalités, la troisième colonne la fréquence correspondante, la dernière colonne donnant la fréquence cumulée. On constate ainsi que 31,33 % des familles ont moins de 2 enfants, 61,33 % des familles ont moins de 3 enfants, et ainsi de suite.

De façon générale, le tableau statistique d'une variable discrète est de la forme représentée dans le tableau 1.4.

▼ **Tableau 1.3** Nombre d'enfants par famille

Modalités	Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées
0	10	6,67	6,67
1	37	24,67	31,33
2	45	30	61,33
3	24	16	77,33
4	16	10,67	88,00
5	9	6	94,00
6	6	4	98,00
7	3	2	100,00
Total	**150**	**100**	

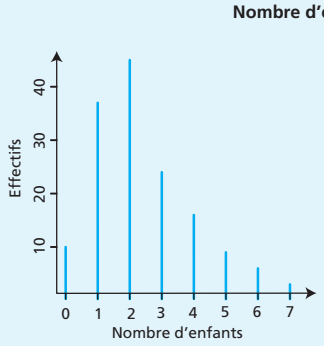
Deux types de graphiques existent pour les variables quantitatives discrètes : le **diagramme en bâtons** et le **diagramme cumulatif** (ou diagramme intégral). Dans un diagramme en bâtons, on fait correspondre à chaque valeur des modalités x_i (en abscisse) un bâton vertical de longueur proportionnelle à l'effectif n_i ou à la fréquence f_i associée (en ordonnée). La figure 1.4 reporte ainsi le diagramme en bâtons correspondant aux données du tableau 1.3. Notons que dans le cas où ce sont les fréquences qui sont reportées en ordonnée, la courbe joignant les sommets des bâtons est appelée **courbe des fréquences**.

Le diagramme cumulatif (ou courbe cumulative) consiste à représenter les fréquences cumulées (ou, de façon similaire, les effectifs cumulés) sur un graphique en escalier (► figure 1.5)[2].

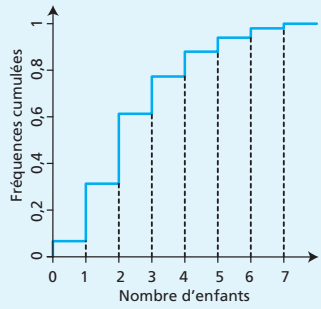
2 La courbe joignant les extrémités droites des « marches d'escalier » est appelée **courbe des fréquences cumulées**.

▼ **Tableau 1.4** Tableau statistique d'une variable quantitative discrète

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences $f_i = n_i/N$	Fréquences cumulées $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$
x_1	n_1	f_1	F_1
x_2	n_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	n_i	f_i	$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$
⋮	⋮	⋮	⋮
x_k	n_k	f_k	$F_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$
Total	N	**1 (ou 100 %)**	



▲ **Figure 1.4** Diagramme en bâtons



▲ **Figure 1.5** Courbe cumulative

Les valeurs des modalités x_i de la variable x étudiée figurent en abscisse, la hauteur de chaque marche de l'escalier étant proportionnelle à la fréquence cumulée correspondante. Le diagramme cumulatif représente ainsi la proportion, notée $F_x(x_i)$, des individus de l'échantillon pour lesquels la valeur de la variable x est inférieure à x_i. Cette fonction, définie pour toute valeur de x, est appelée fonction cumulative ou **fonction de répartition** (empirique)[3] et est donnée par :

$$F_x(x_i) = \sum_{j=1}^{i} f_j \tag{1.10}$$

Si l'on reprend le tableau 1.3, il est ainsi aisé de constater que plus de 60 % (61,33 %) des familles ont moins de 3 enfants.

Cette fonction est telle que :

$$\lim_{x_i \to +\infty} F_x(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x_i \to -\infty} F_x(x_i) = 0 \tag{1.11}$$

3 Rappelons qu'il s'agit d'une fonction de répartition *empirique* puisqu'elle se rapporte à une variable statistique (et non pas à une variable aléatoire comme ce sera le cas dans le chapitre 6).

Cas des variables continues. Considérons la répartition des enfants scolarisés par âge, de 2 ans à moins de 22 ans, durant l'année 2010-2011 en France. S'agissant d'une variable continue, les données sont regroupées en classes et sont reportées dans le tableau 1.5.

▼ **Tableau 1.5 Répartition des enfants scolarisés par âge en 2010-2011 en France**

Numéro de classe i	Classes	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées F_i
1	2 à moins de 6 ans	2 538 643	18,36	18,36
2	6 à moins de 10 ans	3 220 753	23,29	41,65
3	10 à moins de 14 ans	3 174 548	22,96	64,61
4	14 à moins de 18 ans	2 967 358	21,46	86,07
5	18 à moins de 22 ans	1 925 926	13,93	100
Total		**13 827 228**	**100**	

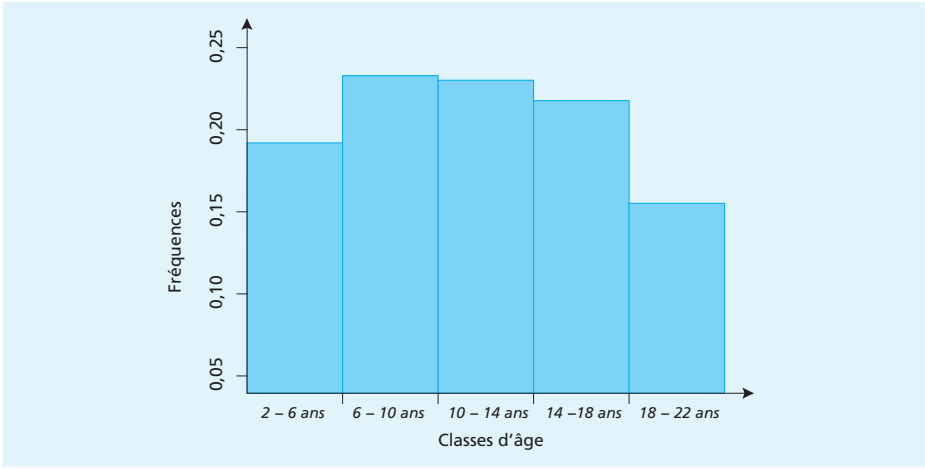
Source : Ministère de l'Éducation nationale (Men), Mesri, Insee.

De façon générale, en notant e_{i-1} la borne (ou extrémité) inférieure de la classe i et e_i la borne supérieure de cette même classe, le tableau statistique d'une variable continue prend la forme de celui représenté dans le tableau 1.6.

▼ **Tableau 1.6 Tableau statistique d'une variable quantitative continue**

Numéro de classe i	Classes $[e_{i-1}, e_i[$	Effectifs n_i	Fréquences $f_i = n_i/N$	Fréquences cumulées $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$
1	$[e_0, e_1[$	n_1	f_1	F_1
2	$[e_1, e_2[$	n_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	f_i	$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$[e_{k-1}, e_k[$	n_k	f_k	$F_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$
Total		N	**1 (ou 100 %)**	

Dans la mesure où une variable quantitative continue peut prendre une infinité de valeurs au sein d'une classe donnée, la représentation graphique en diagramme en bâtons n'est pas appropriée. Pour représenter une variable quantitative continue, on utilise un **histogramme** : à chaque classe de la variable, portée en abscisse, on associe un rectangle ayant pour base l'amplitude de la classe et dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence). On doit distinguer le cas où les classes ont toutes la même amplitude du cas d'amplitudes différentes. Considérons tout d'abord le cas, comme celui décrit dans le tableau 1.5, où les classes ont toutes la même amplitude, soit ici 4 ans. Comme illustré par l'histogramme reporté sur la figure 1.6, la hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à la fréquence f_i. On obtient naturellement un graphique similaire si l'on remplace les fréquences f_i par les effectifs n_i.



▲ **Figure 1.6** **Répartition des enfants scolarisés par âge en 2010-2011 en France, histogramme**

Remarque : La courbe joignant le milieu des sommets des rectangles est appelée courbe ou **polygone des fréquences**. Une telle courbe est notamment utilisée lorsque l'échantillon comprend un très grand nombre d'individus, rendant la représentation en histogramme peu lisible du fait des regroupements des observations en un nombre relativement faible de classes.

Considérons à présent le cas où les classes n'ont pas la même amplitude. Reprenons et complétons à cette fin l'exemple de la répartition des enfants scolarisés en France en considérant une classe supplémentaire, la classe allant de 22 ans à moins de 30 ans (► tableau 1.7).

▼ **Tableau 1.7** **Répartition des enfants scolarisés par âge en 2010-2011 en France**

Numéro de classe i	Classes	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Amplitude a_i	Amplitude a'_i	Hauteur h_i
1	[2,6[	2 538 643	17,31	4	1	17,31
2	[6,10[	3 220 753	21,96	4	1	21,96
3	[10,14[	3 174 548	21,64	4	1	21,64
4	[14,18[	2 967 358	20,23	4	1	20,23
5	[18,22[	1 925 926	13,13	4	1	13,13
6	[22,30[	840 518	5,73	8	2	2,87
Total		**14 667 746**	**100**			

Source : Men, Mesri, Insee.

Ainsi que nous le constatons dans le tableau 1.7, l'amplitude a_i des 5 premières classes est de 4 ans, la dernière classe ayant quant à elle une amplitude de 8 ans. Pour pouvoir comparer les effectifs ou les fréquences des différentes classes, il convient de « corriger » les amplitudes afin que l'aire de chaque rectangle composant l'histogramme soit bien proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence). À cette fin, on choisit une amplitude

unité a_u, qui est en général l'amplitude la plus fréquente ou la plus faible. Ici, nous retenons donc une amplitude unité égale à 4 ans. On exprime les amplitudes de chaque classe en fonction de cette nouvelle unité. Soit a'_i les amplitudes ainsi corrigées :

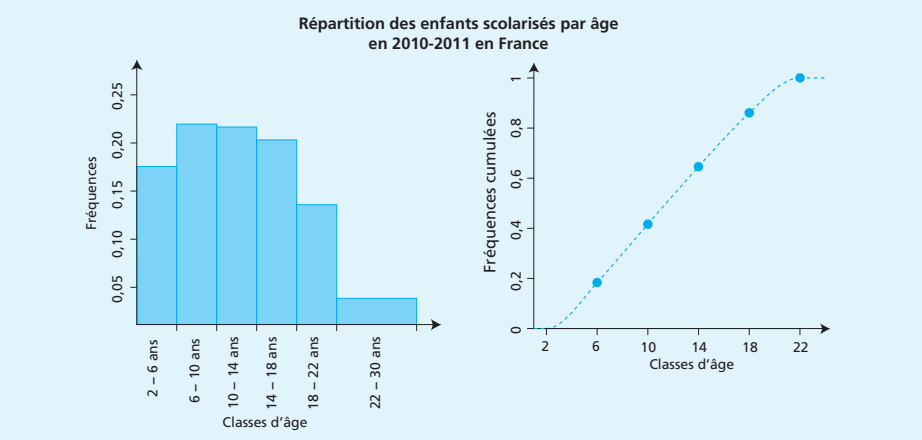
$$a'_i = \frac{e_i - e_{i-1}}{a_u} \tag{1.12}$$

Il suffit ensuite de calculer la hauteur h_i des rectangles comme suit :

$$h_i = \frac{f_i}{a'_i} \tag{1.13}$$

et l'on peut alors tracer l'histogramme dans lequel l'aire de chaque rectangle est bien proportionnelle à la fréquence (ou l'effectif) de la classe correspondante (▶ figure 1.7).

L'obtention de la fonction de répartition empirique d'une variable continue est similaire au cas d'une variable discrète et cette fonction vérifie les mêmes propriétés aux limites. La fonction de répartition empirique correspondant aux données figurant dans le tableau 1.5 est ainsi reproduite sur la figure 1.8.



▲ Figure 1.7 Histogramme

▲ Figure 1.8 Courbe cumulative

2 Caractéristiques d'une distribution à un caractère

Ainsi que nous l'avons vu dans la section précédente, les tableaux et graphiques nous permettent de disposer d'une première description des données étudiées. Un graphique nous donne une idée de l'ordre de grandeur de la variable considérée, au travers des valeurs de la variable situées au centre de la distribution. On parle alors de **tendance centrale**. Un graphique nous fournit également une indication quant à la variabilité des données autour de cette tendance centrale, on parle alors de **dispersion**. Pour mesurer la tendance centrale et la dispersion, il convient de calculer des caractéristiques permettant de décrire plus précisément la distribution que les graphiques. On y adjoint des caractéristiques de **forme** et de **concentration**.

FOCUS

Les conditions de Yule

Les caractéristiques doivent remplir un certain nombre de propriétés, appelées **conditions de Yule**. Une caractéristique doit ainsi :

- être objective, c'est-à-dire indépendante de l'observateur ;
- utiliser l'information de façon exhaustive, c'est-à-dire être basée sur l'ensemble des observations de la série ;
- être facilement interprétable et calculable ;
- être peu sensible aux fluctuations d'échantillonnage ;
- se prêter aisément au calcul algébrique.

2.1 Caractéristiques de tendance centrale

2.1.1 Mode

Définition 1.1

Le **mode** d'une distribution est la valeur de la variable qui correspond à l'effectif ou à la fréquence le (la) plus élevé(e). Il s'agit donc de la valeur la plus fréquemment rencontrée dans une distribution.

Le mode peut être calculé pour tous les types de variables (qualitative et quantitative).

Cas d'une variable discrète. Reprenons le tableau 1.3 ou, de façon équivalente, la figure 1.4. Le mode est la modalité pour laquelle la fréquence est la plus élevée, c'est-à-dire pour laquelle la bâton est le plus haut sur le graphique. Il s'agit donc ici de la valeur 2, ce qui signifie que la majorité des familles considérées ont 2 enfants.

Notons que lorsque la série étudiée comporte deux valeurs consécutives pour lesquelles la fréquence est la plus élevée, on parle d'*intervalle modal* – les bornes de cet intervalle correspondant à ces deux valeurs de la série. Mentionnons en outre que lorsque la distribution étudiée ne comporte qu'un seul mode – ce qui est le cas le plus fréquent – on parle de *distribution unimodale*. Il peut toutefois arriver que la distribution comporte 2 ou plusieurs modes (correspondant à 2 ou plusieurs valeurs non consécutives), on parle alors de *distributions bi-modale* ou *pluri-modale*. La présence de plusieurs modes est indicative d'une certaine hétérogénéité de l'échantillon analysé.

Cas d'une variable continue. Les données étant regroupées en classes, on détermine la **classe modale** qui correspond à la classe du tableau ou de l'histogramme pour laquelle la fréquence est la plus élevée. Dans le cas de l'exemple relatif à la répartition par âge des enfants scolarisés (▶ tableau 1.5), la classe modale est la classe [6,10[. Ainsi que l'illustre la figure 1.9, il est possible de déterminer la valeur précise du mode :

$$Mode = e_{i-1} + a_m \times \frac{d_1}{d_1 + d_2} \qquad (1.14)$$