

Table des matières

1	Variables aléatoires	1
1.1	Notion de variable aléatoire	1
1.2	Fonction de répartition	4
1.3	Cas des variables aléatoires discrètes	6
1.4	Cas des variables aléatoires continues	6
1.5	Notion essentielle de quantile	9
1.6	Fonction d'une variable aléatoire	11
1.7	Exercices	12
2	Espérance mathématique et moments	15
2.1	Introduction et définition	15
2.2	Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire	16
2.3	Linéarité de l'opérateur $E(\cdot)$, moments, variance	18
2.4	Tirage aléatoire dans une population finie : distribution empirique et distribution probabiliste	21
2.5	Fonction génératrice des moments	21
2.6	Formules d'approximation de l'espérance et de la variance d'une fonction d'une v.a.	24
2.7	Exercices	25
3	Couples et n-uplets de variables aléatoires	27
3.1	Introduction	27
3.2	Couples de v.a.	28
3.3	Indépendance de deux variables aléatoires	31
3.4	Espérance mathématique, covariance, corrélation	32
3.5	Somme de deux v.a.	36
3.6	Les n -uplets de v.a. ; somme de n v.a.	37
3.7	Sondage aléatoire dans une population et v.a. i.i.d.	38
3.8	Notation matricielle des vecteurs aléatoires	39
3.9	Loi de Gauss multivariée	40
3.10	Exercices	42

4	Les lois de probabilités usuelles	45
4.1	Les lois discrètes	45
4.1.1	La loi uniforme discrète	45
4.1.2	Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	46
4.1.3	Le processus de Bernoulli et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	47
4.1.4	Les lois géométrique $\mathcal{G}(p)$ et binomiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$	49
4.1.5	La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, M, n)$	50
4.1.6	La loi multinomiale	51
4.1.7	Le processus et la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	51
4.2	Les lois continues	54
4.2.1	La loi continue uniforme $\mathcal{U}[a, b]$	54
4.2.2	La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	55
4.2.3	La loi gamma $\Gamma(r, \lambda)$	56
4.2.4	La loi de Gauss ou loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	57
4.2.5	La loi lognormale $L\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	60
4.2.6	La loi de Pareto	61
4.2.7	La loi de Weibull $W(\lambda, \alpha)$	61
4.2.8	La loi de Gumbel	62
4.2.9	La loi bêta $Beta(\alpha, \beta)$	63
4.3	Génération de nombres issus d'une loi donnée	63
4.4	Exercices	64
5	Lois fondamentales de l'échantillonnage	67
5.1	Phénomènes et échantillons aléatoires	67
5.2	Moyenne, variance, moments empiriques	69
5.3	Loi du Khi-deux	72
5.4	Loi de Student	74
5.5	Loi de Fisher-Snedecor	76
5.6	Statistiques d'ordre	77
5.7	Fonction de répartition empirique	78
5.8	Convergence, approximations gaussiennes, grands échantillons	79
5.8.1	Les modes de convergence aléatoires	79
5.8.2	Lois des grands nombres	81
5.8.3	Le théorème central limite	82
5.9	Exercices	86
6	Théorie de l'estimation paramétrique ponctuelle	91
6.1	Cadre général de l'estimation	91
6.2	Cadre de l'estimation paramétrique	92
6.3	La classe exponentielle de lois	94
6.4	Une approche intuitive de l'estimation : la méthode des moments	96
6.5	Qualités des estimateurs	98
6.5.1	Biais d'un estimateur	99
6.5.2	Variance et erreur quadratique moyenne d'un estimateur	100
6.5.3	Convergence d'un estimateur	103

6.5.4	Exhaustivité d'un estimateur	105
6.6	Recherche des meilleurs estimateurs sans biais	110
6.6.1	Estimateurs UMVUE	110
6.6.2	Estimation d'une fonction de θ et reparamétrisation	114
6.6.3	Borne de Cramer-Rao et estimateurs efficaces	114
6.6.4	Extension à un paramètre de dimension $k > 1$	118
6.7	L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	121
6.7.1	Définitions	122
6.7.2	Exemples et propriétés	123
6.7.3	Reparamétrisation et fonctions du paramètre	126
6.7.4	Comportement asymptotique de l'EMV	127
6.8	Les estimateurs bayésiens	128
6.9	Exercices	131
7	Estimation paramétrique par intervalle de confiance	135
7.1	Définitions	135
7.2	Méthode de la fonction pivot	138
7.3	Méthode asymptotique	140
7.4	Construction des IC classiques	144
7.4.1	IC pour la moyenne d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	144
7.4.2	IC pour la variance σ^2 d'une loi de Gauss	146
7.4.3	IC sur la différence des moyennes de deux lois de Gauss	147
7.4.4	IC sur le rapport des variances de deux lois de Gauss	149
7.4.5	IC sur le paramètre p d'une loi de Bernoulli	150
7.4.6	IC sur la différence des paramètres de deux lois de Bernoulli	152
7.5	IC par la méthode des quantiles	153
7.6	Approche bayésienne	157
7.7	Notions d'optimalité des IC	158
7.8	Région de confiance pour un paramètre de dimension $k > 1$	159
7.9	Intervalles de confiance et tests	163
7.10	Exercices	163
8	Estimation non paramétrique et estimation fonctionnelle	167
8.1	Introduction	167
8.2	Estimation de la moyenne et de la variance de la loi	168
8.2.1	Estimation de la moyenne μ	168
8.2.2	Estimation de la variance σ^2	169
8.3	Estimation d'un quantile	170
8.4	Les méthodes de rééchantillonnage	172
8.4.1	Introduction	172
8.4.2	La méthode du jackknife	173
8.4.3	La méthode du bootstrap	177
8.5	Estimation fonctionnelle	181
8.5.1	Introduction	181
8.5.2	L'estimation de la densité	182

8.5.3	L'estimation de la fonction de répartition	192
8.6	Exercices	198
9	Tests d'hypothèses paramétriques	201
9.1	Introduction	201
9.2	Test d'une hypothèse simple avec alternative simple	202
9.3	Test du rapport de vraisemblance simple	208
9.3.1	Propriété d'optimalité	208
9.3.2	Cas d'un paramètre de dimension 1	212
9.4	Tests d'hypothèses multiples	213
9.4.1	Risques, puissance et optimalité	213
9.4.2	Tests d'hypothèses multiples unilatérales	214
9.4.3	Tests d'hypothèses bilatérales	219
9.5	Test du rapport de vraisemblance généralisé	220
9.6	Remarques diverses	226
9.7	Les tests paramétriques usuels	228
9.7.1	Tests sur la moyenne d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	229
9.7.2	Test sur la variance σ^2 d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	231
9.7.3	Tests de comparaison des moyennes de deux lois de Gauss	232
9.7.4	Tests de comparaison des variances de deux lois de Gauss	235
9.7.5	Tests sur le paramètre p d'une loi de Bernoulli (ou test sur une proportion)	235
9.7.6	Tests de comparaison des paramètres de deux lois de Bernoulli (comparaison de deux proportions)	237
9.7.7	Test sur la corrélation dans un couple gaussien	240
9.8	Dualité entre tests et intervalles de confiance	242
9.9	Exercices	244
10	Tests pour variables catégorielles et tests non paramétriques	251
10.1	Test sur les paramètres d'une loi multinomiale	252
10.1.1	Test du rapport de vraisemblance généralisé	252
10.1.2	Test du khi-deux de Pearson	254
10.1.3	Équivalence asymptotique des deux tests	255
10.1.4	Cas particulier de la loi binomiale	256
10.2	Test de comparaison de plusieurs lois multinomiales	257
10.3	Test d'indépendance de deux variables catégorielles	259
10.3.1	Test du RVG et test du khi-deux	259
10.3.2	Test exact de Fisher (tableau 2×2)	262
10.4	Tests d'ajustement à un modèle de loi	264
10.4.1	Ajustement à une loi parfaitement spécifiée	265
10.4.2	Ajustement dans une famille paramétrique donnée	267
10.5	Tests non paramétriques sur des caractéristiques de lois	272
10.5.1	Introduction	272
10.5.2	Les statistiques de rang	272
10.5.3	Tests sur moyenne, médiane et quantiles	273

10.5.4	Tests de localisation de deux lois	274
10.5.5	Test pour la corrélation de Spearman	281
10.6	Exercices	283
11	Régressions linéaire, logistique et non paramétrique	289
11.1	Introduction à la régression	289
11.2	La régression linéaire	292
11.2.1	Le modèle	292
11.2.2	Les estimateurs du maximum de vraisemblance	293
11.2.3	Intervalles de confiance	296
11.2.4	Test $H_0 : \beta_1 = 0$	297
11.2.5	Cas non gaussien	299
11.2.6	Régression et corrélation linéaires	300
11.2.7	Extension à la régression multiple	303
11.3	La régression logistique	305
11.3.1	Le modèle	305
11.3.2	Estimation de la fonction $p(x)$	306
11.3.3	Matrice des variances-covariances de $\hat{\beta}$	308
11.3.4	Test $H_0 : \beta_1 = 0$	309
11.3.5	Intervalles de confiance	310
11.3.6	Remarques diverses	312
11.4	La régression non paramétrique	314
11.4.1	Introduction	314
11.4.2	Définition des estimateurs à noyaux	314
11.4.3	Biais et variance	315
11.4.4	La régression polynomiale locale	318
11.5	Exercices	320
	Corrigés des exercices	323
	Tables	415
	Bibliographie	421
	Index	425