Chapitre 1.
Analyse combinatoire - Dénombrement

Dispositions : arrangements, permutations et Combinaisons, avec et sans répétition

Exercice 1 : Montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall n, p \in N^*, \quad A_{n+1}^{p+1} = (n+1)A_n^p$

2) $\forall n \in N, 0 \leq p \leq n, \quad C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} \;\; ; \;\; C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

3) $\forall a, b \in R, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$ ***« formule du binôme de Newton »***

4) $\forall n, k \in N, k < n \quad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k$ et $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

*************** °°° ***************

Exercice 2 : Tirage au sort des groupes de la phase finale de la coupe du monde de football. Une urne contient 32 boules contenant chacune le nom d'un pays qualifié dont 8 boules sont des pays têtes de série. Calculer, dans chacun des cas suivants, le nombre de tirages possibles d'un groupe de 4 pays :

1) tirage simultané (un seul tirage : on ne tient pas compte de l'ordre et sans remise) des 4 boules.

2) tirage simultané d'une boule parmi les têtes de série et de 3 boules parmi les non têtes de série.

3) tirages successifs (on tient compte de l'ordre) sans remise des 4 boules.

4) tirages successifs avec remise des 4 boules.

*************** °°° ***************

Exercice 3 : Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on constituer de mains de 6 cartes différentes formées de :

1) 4 as et 2 rois ou 4 rois et 2 as ?

2) 3 cartes noires, de 3 cartes de cœur mais sans aucun as ?

*************** °°° ***************

Exercice 4 : Le responsable du personnel d'une usine doit constituer, pour assurer une permanence, une équipe composée de 3 surveillants et de 2 ouvriers d'entretien. Il dispose de 4 surveillants et de 5 ouvriers d'entretien.

1) De combien de façons différentes peut-il constituer cette équipe ?

2) Sachant qu'il doit éviter de placer dans la même équipe le surveillant S_1 et l'ouvrier O_1. Entre combien d'équipes différemment constituées peut-il choisir ?

*************** °°° ***************

Exercice 5 : Combien de signaux différents, chaque signal étant constitué de 8 pavillons alignés verticalement, peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et un pavillon bleu ?

*************** °°° ***************

Exercice 6 : On considère un jeu de 52 cartes. Une main est un groupement de 13 cartes différentes choisies au hasard dans le jeu de 52 cartes.

1) Combien y-a-t-il de mains distintes ?

2) Combien peut-on constituer de mains comprenant deux As ?

*************** °°° ***************

Exercice 7 : Un investisseur a 20 M.€. à placer sur trois affaires potentielles. Chaque investissement doit être un nombre entier en milliers d'euros. Et il existe un engagement minimum pour chaque affaire qui sont respectivement 2, 3 et 4 M.€.

Combien y a-t-il de stratégies d'investissement :

1) si un investissement doit être fait sur chaque affaire ?

2) si deux des trois affaires doivent être couvertes ?

*************** °°° ***************

Exercice 8 : Un groupe de six étudiants s'apprètent à s'installer autour d'une table ronde du restaurant universitaire.

1) De combien de manières peuvent-ils s'assoir :

a) si les chaises sont numérotées ?

b) si les chaises ne sont pas numérotées ?

2) On suppose qu'il y a en fait dans ce groupe autant d'étudiants que d'étudiantes. De combien de manières ces étudiant(e)s peuvent-ils s'assoir en respectant l'alternance :

a) si les chaises sont numérotées ?

b) si les chaises ne sont pas numérotées ?

*************** °°° ***************

Exercice 9 : Une troupe de théâtre amateur, composée de 14 femmes et de 10 hommes, veut préparer une représentation. Dans la pièce du répertoire choisie, il y a 10 rôles féminins et 5 masculins.

1) Combien peut-on imaginer de distributions des rôles ?

2) Combien y a-t-il de distributions dans lesquelles joue Madame Dupont, qui est l'une des femmes de la troupe ?

*************** °°° ***************

Exercice 10 : Le championnat de France de football, appelé Ligue 1 regroupe vingt clubs. Chaque match oppose deux équipes. On procède à des matchs allers et des matchs retours.

1) De combien de matchs au total est constitué ce championnat ?

2) En combien de journées se déroule ce championnat de football ?

*************** °°° ***************

Exercice 11 : Dans une Faculté, une association d'étudiants comprend 78 étudiantes de $1^{ère}$ année, 87 étudiants de $1^{ère}$ année, 41 étudiantes de $2^{ème}$ année, 37 étudiants de $2^{ème}$ année.

1) De combien de manières peut-on former le bureau de cette association qui doit comporter 8 étudiant(e)s de $1^{ère}$ année et 6 de $2^{ème}$ année.

2) De combien de manières peut-on former ce bureau si l'on désire respecter la parité des sexes pour chaque année ?

*************** °°° ***************

Exercice 12 : Une association comprend vingt membres dont douze hommes et huit femmes. Elle veut former un comité de cinq personnes dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Calculer le nombre de façons de former ce comité dans chacun des cas suivants :

1) Chaque membre de l'association accepte de faire partie du comité.

2) Deux des hommes refusent d'en faire partie.

3) Monsieur Dupont et Madame Dubois refusent de sièger ensemble.

*************** °°° ***************

Exercice 13 : Pour l'arbre de Noël d'une école maternelle, chacun des vingt-cinq enfants d'une classe doit choisir un cadeau parmi trente types de cadeaux possibles.

Afin de passer la commande correspondante, la maîtresse enregistre les choix des enfants en constituant une liste où figure en face de chaque nom le type de cadeau souhaité.

1) Combien y a-t-il de listes possibles dans chacun des deux cas qui suivent :

cas a) il n'y a qu'un cadeau de chaque type qui soit disponible, aussi deux enfants ne peuvent-ils choisir le même type de cadeau ?

cas b) le nombre de cadeaux de chaque type n'est pas limité ?

2) Vu du côté du fournisseur, qui lui ne s'intéresse qu'aux quantités, combien y a-t-il de commandes possibles, dans chacun des deux cas qui précèdent ?

*************** °°° ***************

Exercice 14 : Chacun des quatre boulangers d'un quartier doit choisir un jour hebdomadaire de fermeture qui lui conviendrait.

1) De combien de façons différentes peuvent a priori s'énoncer les choix possibles des quatre boulangers ?

Certains boulangers ayant choisi le même jour de fermeture, ce qui ne peut être accepté pour le quartier, on leur demande de modifier éventuellement leur choix afin que les quatre jours choisis soient différents.

2) Quel est alors a priori le nombre de façons différentes d'énoncer les choix possibles des quatre boulangers ?

3) On s'aperçoit qu'aucun boulanger ne veut fermer le samedi, pas plus que le dimanche. Quel est alors le nombre de façons différentes d'énoncer les choix possibles des quatre boulangers ?

*************** °°° ***************

Exercice 15 : Une serrure électronique d'un coffre d'une chambre d'hôtel s'ouvre et se referme en saisissant un code secret sur un clavier numérique sur lequel on doit composer une combinaison alphanumérique codée. Il est composé de 9 touches : 3 lettres $\{A,B,C\}$ et 6 chiffres $\{1,2,3,4,5,6\}$. Le code secret doit comporter une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres.

1	2	3
4	5	6
A	B	C

1) Combien de codes d'entrée différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?
6) Combien y a-t-il de codes comportant trois chiffres identiques ?

*************** °°° ***************

Chapitre 2.
Généralités sur les probabilités

Terminologie et notations, expérience, tribu, espace probabilisé. Calcul des probabilités, Probabilités conditionnelles, théorèmes des probabilités totales et des causes (Bayes), indépendance en probabilité

Exercice 1 : Soit Ω un ensemble. A et B désignent deux sous-ensembles non vides de Ω. Donner une interprétation algébrique des événements suivants, dont on fera les diagrammes de Venn :

1) A est réalisé mais pas B.
2) A ou B se réalisent mais pas en même temps.
3) A ou non B se réalisent.
4) ni A ni B ne se réalisent.

*************** °°° ***************

Exercice 2 : Soient A, B et C trois sous-ensembles non vides de l'ensemble fondamental Ω et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans Ω. Montrer les égalités suivantes :

1) $\overline{(A\cup B\cup C)} = \overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ 2) $(\overline{A\cup B})\cap C = \overline{A}\cap\overline{B}\cap C$
3) $\overline{A}\cap(A\cup B) = \overline{A}\cap B = B - A$ 4) $A\cup(\overline{A}\cap B) = A\cup B$
5) $(A-B)-C = A-(B\cup C)$ 6) $A\cup(B-[A\cap B])\cup(C-[A\cap C]) = A\cup B\cup C$

*************** °°° ***************

Exercice 3 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de l'ensemble fondamental Ω, tels que : $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A\cup B) = \frac{23}{60}$.

1) Calculer les probabilités suivantes :
$P(A/B)$, $P(\overline{A}/B)$, $P(A\cap B/B)$, $P(A\cap\overline{B}/B)$, $P[(A\cup B)/(A\cap\overline{B})]$
$P[(\overline{A}\cap B)/(\overline{A}\cup B)]$, $P(A\cap\overline{B}/\overline{B})$.

2) Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants en probabilité ?

*************** °°° ***************

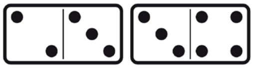
Exercice 4 : Une usine comporte 3 machines M_1, M_2 et M_3. Les pannes de ces machines sont indépendantes et de probabilités respectives $5\%, 3\%$ et 1%. L'usine est stoppée dès que l'une au moins des machines tombe en panne.

1) Calculer la probabilité que l'usine soit stoppée.

2) Sachant que l'usine est stoppée, calculer la probabilité pour que la machine M_1 soit tombée en panne.

*************** °°° ***************

Exercice 5 : Les dominos sont un jeu de société d'origine chinoise. On prend au hasard 2 dominos dans un jeu complet de 28 pièces.



Calculer la probabilité pour qu'ils soient « **compatibles** ».

*************** °°° ***************

Exercice 6 : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit au hasard 4 cartes par tirages simultanés d'une carte à chaque fois sans remise. Déterminer les probabilités des événements suivants :

1) l'une des cartes au moins est un as.
2) les 4 cartes sont de la même couleur d'atout.
3) il n'y a pas 2 cartes ayant la même valeur.
4) les 4 cartes ont des couleurs différentes et des valeurs différentes.
5) les 4 cartes ont des couleurs différentes ou des valeurs différentes.

*************** °°° ***************

Exercice 7 : A la sortie d'une chaîne de fabrication, les produits sont susceptibles de présenter deux défauts. Un très grand nombre d'observations a permis d'établir que :

- la proportion de produits fabriqués ayant le défaut A est de 5% ;
- la proportion de produits fabriqués ayant le défaut B est de 3% ;
- la proportion de produits fabriqués ayant les deux défauts est de 1%.

Déterminer la probabilité qu'un produit présente :

1) Le défaut A ou le défaut B
2) Le défaut A seulement
3) Aucun défaut.

*************** °°° ***************

Exercice 8 : Un libraire reçoit un carton de 50 exemplaires d'un livre dont 3 sont dédicacés par l'auteur. On tire au hasard 10 livres du carton.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1) A : on obtient les 3 livres dédicacés ;
2) B : on obtient un seul livre dédicacé ;
3) C : on obtient au moins un livre dédicacé.

*************** °°° ***************

Exercice 9 : Dans une entreprise, on compte une population de 45% d'hommes et 55% de femmes.

Un homme sur trois est syndiqué et une femme sur cinq est syndiquée.

Quelle est la probabilité qu'une personne syndiquée soit une femme ?

*************** °°° ***************

Exercice 10 : On lance 2 dés honnêtes à 6 faces.

1) Calculer la probabilité pour que, en lançant une seule fois les 2 dés, vous obteniez la réalisation de l'événement « au moins un des 2 dés donne un nombre pair ».

2) Calculer la probabilité pour que, en lançant 10 fois les 2 dés, vous obteniez la réalisation de l'événement « au moins un double 5 ».

*************** °°° ***************

Exercice 11 : La production d'un bien d'une entreprise est assurée par trois usines indépendantes U_1, U_2 et U_3 qui fabriquent respectivement 30%, 30% et 40% du total. Les proportions de biens produits défectueux sont respectivement 4%, 3% et 2%.

Quelle est la probabilité qu'un bien choisi au hasard et dont on constate qu'il est défectueux provienne de l'usine U_1 ? De l'usine U_2 ? De l'usine U_3 ?

*************** °°° ***************

Exercice 12 : Dans un lot de pièces fabriquées, il y a environ 2% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces mais le mécanisme est aléatoire :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 96%.
- Si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 98%.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1) il y a une erreur dans le contrôle.
2) d'accepter une pièce.
3) la pièce est mauvaise sachant qu'elle est acceptée.
4) la pièce est bonne sachant qu'elle est refusée.

*************** °°° ***************

Exercice 13 : Montrer que si deux événements A et B sont indépendants en probabilité, alors :

1) A et $\overline{B}$ sont indépendants en probabilité,
$\overline{A}$ et B sont indépendants en probabilité,
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants en probabilité.

2) $P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})$.

Si l'événement C est indépendant en probabilité de A et de B alors :

3) C et $A \cup B$ sont indépendants en probabilité.

Si l'événement $\overline{C}$ est indépendant en probabilité de A et de B alors :

4) $\overline{C}$ et $A \cap B$ sont indépendants en probabilité.

*************** °°° ***************

Exercice 14 : Considérons quatre groupes A, B, C, D d'étudiants. Dans chaque groupe, les proportions d'étudiants ayant fait des études supérieures de sciences économiques sont respectivement 5%, 10%, 25% et 40%. Choisissons au hasard l'une des groupes, puis l'un des étudiants dans ce groupe.

1) Calculer la probabilité pour que l'étudiant choisi ait fait des études supérieures de sciences économiques.

2) L'étudiant ayant effectué des études supérieures de sciences économiques, calculer la probabilité pour qu'il appartienne au groupe C.

*************** °°° ***************

Exercice 15 : Cinq étudiantes sont bien embarassées. Elles n'ont eu qu'une seule place pour le concert tant convoité. Elles décident de sélectionner la chanceuse à partir d'un jeu de 32 cartes totalement classique. Chacune leur tour, elles choisiront une carte parmi les 32 du jeu jusqu'à ce que l'une d'entre elles obtienne l'as de cœur et le billet ! ! !

Paméla se propose de battre le jeu de cartes afin de bien les mélanger. Ses copines supposent *a priori* que Paméla a autant de chances d'être honnête que d'être une tricheuse.

De plus, une tricheuse tire à coup sûr l'as de cœur ! Paméla a le droit d'effectuer le premier tirage et elle obtient immédiatement l'as de cœur. Ses copines se demandent si Paméla est une tricheuse.

Qu'en pensez-vous ?

*************** °°° ***************