

Relativité Générale

Carlo Rovelli

Relativité Générale

L'ESSENTIEL

Idées, cadre conceptuel, trous noirs,
ondes gravitationnelles, cosmologie
et éléments de gravité quantique

Traduit de l'anglais par Marc Lachièze-Rey

DUNOD

Du même auteur aux Éditions Dunod :
Et si le temps n'existait pas ?
La naissance de la pensée scientifique : Anaximandre de Milet

Direction artistique (couverture) : Nicolas Wiel
Mise en pages : Lumina Datamatics, Inc.

© 2021 Adelphi Edizioni S.p.A. Milano
© Dunod, 2022 pour la traduction française
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084203-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Préambule	11
I Bases	13
1 Physique : une théorie des champs pour la gravité	17
1.1 La relativité restreinte	18
1.2 Champs	22
2 Philosophie : que sont l'espace et le temps ?	27
2.1 Espace et temps relatifs, comparés à newtoniens ...	27
2.2 L'idée d'Einstein : l'espace et le temps newtoniens sont un champ physique	30
2.3 L'indice d'Einstein : accélération par rapport à quoi ?	32
3 Mathématiques : les espaces courbes	37
3.1 Surfaces courbes	37
3.1.1 Géométrie intrinsèque	37
3.1.2 La courbure de Gauss	40
3.1.3 Coordonnées générales	43
3.1.4 Le champ des repères et la métrique	46
3.2 Géométrie riemannienne	53
3.2.1 Géodésiques	60

3.2.2	Champs et dérivées dans les espaces de Riemann	62
3.2.3	La courbure de Riemann	67
3.3	Géométrie	74
3.3.1	Géométrie lorentzienne	75
II	La théorie	81
4	Les équations de base	83
4.1	Le champ gravitationnel	83
4.2	Effets de la gravitation	85
4.3	Les équations du champ	86
4.4	La source dans l'équation de champ	87
4.5	Les équations du vide	88
5	L'action	91
6	Symétries et interprétation	95
6.1	Temps et énergie	99
III	Applications	103
7	La limite newtonienne	105
7.1	La métrique dans la limite newtonienne	105
7.2	La force de Newton	106
7.3	La « dilatation du temps » en relativité générale	107
8	Les ondes gravitationnelles	113
8.1	L'effet sur la matière	117
8.2	Production et détection	120

TABLE DES MATIÈRES

9	Cosmologie.....	127
9.1	La géométrie à grande échelle de l'univers	131
9.2	Les modèles cosmologiques de base	135
10	Le champ créé par une masse	139
10.1	La métrique de Schwarzschild.....	139
10.2	Le problème de Kepler.....	142
10.3	La déflexion de la lumière par le Soleil	148
10.4	Les orbites proches de l'horizon.....	151
10.5	La force cosmologique	155
10.6	La métrique de Kerr-Newman et l'entraîne- ment de l'espace	156
11	Les trous noirs	159
11.1	À l'horizon	161
11.2	À l'intérieur du trou noir.....	166
11.3	Les trous blancs	170
12	Éléments de gravité quantique	179
12.1	Bases empiriques et théoriques de la gravité quantique.....	180
12.2	Caractère discret : des quanta d'espace	183
12.3	Superposition de géométries.....	188
12.4	Transitions : passage du trou noir au trou blanc par effet tunnel, et grand rebond.....	193
12.5	Conclusion : la disparition de l'espace-temps	196
	Index	199

PRÉAMBULE

Il y a des chefs-d'oeuvre absolus, qui nous touchent intensément, comme le Requiem de Mozart, l'Odyssee, la Chapelle Sixtine, ou le Roi Lear... En saisir la splendeur peut demander un apprentissage, mais la récompense est l'accès à une beauté pure. Mais peut-être aussi la possibilité d'une vision nouvelle sur le monde. La Relativité Générale, le joyau d'Albert Einstein, en fait partie.

Ce petit livre offre une introduction compacte à la relativité générale, à sa structure conceptuelle et ses résultats de base.

L'accent est mis sur les idées, sans rentrer dans les détails. Les principaux résultats sont dérivés dans leur forme la plus simple, sans longues manipulations mathématiques. Certaines considérations originales sont incluses et certains sujets sont discutés d'un point de vue difficile à trouver ailleurs. Un dernier chapitre introduit des idées élémentaires sur la gravité quantique. Le livre peut être utilisé pour apprendre les idées clés et les résultats de la relativité générale, sans l'ambition de devenir pleinement expert sur ses vastes ramifications.

Il peut également être utilisé en complément des nombreux manuels¹, en offrant une clarté **conceptuelle** supplémentaire. Il pré-

1. Un bon étudiant motivé consulte de nombreux livres sur le même sujet. Deux classiques que j'utilise toujours comme références sont la : *Relativité Générale* de Bob Wald orientée mathématiquement, elle met l'accent sur la perspective géométrique et contient beaucoup de matériel avancé; et aussi *Gravitation et cosmologie* de Steven Weinberg, qui met l'accent sur la géométrie. Parmi les manuels modernes, *Espace-temps et géométrie* de Sean Carroll et *Introduction à la relativité générale* de Lewis Ryder sont beaucoup plus complets que la simple introduction donnée ici. Un bon texte orienté mathématiquement est *Introduction to General Relativity, Black Holes and Cosmology* de Yvonne Choquet-Bruhat. En français, une belle introduction est *Relativité générale* :

sente la Relativité Générale telle que je la comprends aujourd'hui, ce qui constitue à mon avis la meilleure perspective pour aborder ses aspects quantiques.

Les étapes mathématiques simples entre les équations sont ignorées, et indiquées par le texte « *[faites-le!]* ». Le lecteur peut faire confiance à l'auteur, comme le font souvent les physiciens lorsqu'ils lisent des mathématiques ; ou travailler les étapes et acquérir des compétences techniques. Cela pourrait permettre à un étudiant d'acquérir une bonne expérience pratique de la technologie de la relativité. Si vous aimez faire des exercices, il existe des livres d'exercices de relativité générale². Les textes en petits caractères sont quelque peu marginaux par rapport aux sujets principaux.

La récente série de prix Nobel de physique pour la relativité générale (ondes gravitationnelles en 2017, cosmologie en 2019, trous noirs en 2020) témoigne de la vitalité et de la fécondité actuelles de cette théorie extraordinaire, joyau d'Einstein. Ici, j'essaie de mettre en lumière la beauté éclatante et la simplicité des idées sur lesquelles elle est basée.

Cours et exercices corrigés par Aurélien Barrau. Je mentionne ici seulement les quelques livres que je connais le mieux.

2. Par exemple Thomas A. Moore, *A General Relativity Workbook*, University Science Books, Etats-Unis, 2012.

PREMIÈRE PARTIE

BASES

La relativité générale est notre meilleure théorie actuelle décrivant (1) l'interaction gravitationnelle et (2) les aspects géométriques de l'espace et du temps. Le fait que ces deux thèmes aillent ensemble est un aspect caractéristique du contenu physique de la théorie.

La théorie a été développée par Albert Einstein, avec l'aide de quelques amis, pendant une dizaine d'années, entre 1907 et 1917. Elle trouve aujourd'hui de vastes applications en astrophysique et cosmologie, et quelques applications technologiques, notamment pour la technologie GPS (*Global Positioning System*), qui a changé notre façon de voyager.

La théorie a fait des prédictions étonnantes. Celles-ci incluent les trous noirs, les ondes gravitationnelles, l'expansion de l'univers, le décalage gravitationnel vers le rouge et la dilatation du temps. Elles ont **toutes** été spectaculairement confirmées par des expériences et des observations. Jusqu'à présent, la théorie n'a reçu que soutien et n'a jamais été prise en défaut. De nombreuses théories gravitationnelles alternatives ont été étudiées, mais un siècle d'observations a constamment favorisé la relativité générale, excluant un grand nombre d'alternatives. La dernière occurrence en a été la détection presque simultanée, en 2017, de signaux gravitationnels et électromagnétiques émis par la fusion de deux étoiles à neutrons ; cette détection a vérifié avec une précision d'une partie sur 10^{15} la prédiction de la relativité générale, selon laquelle les deux signaux se déplacent à la même vitesse, écartant un grand nombre d'autres théories qui donnaient des prédictions différentes.

Le domaine de validité de la théorie est limité par le fait qu'elle ne tient pas compte des effets quantiques. Ceux-ci sont attendus à

des échelles de l'ordre de la longueur

$$L_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-33} \text{ cm}, \quad (0.1)$$

appelée longueur de Planck (G est la constante de Newton, \hbar la constante de Planck et c la vitesse de la lumière [Vérifiez que L_{Pl} a bien des dimensions d'une longueur]). Nous n'avons que peu de preuves empiriques ou observationnelles indirectes sur ce régime, qui est susceptible d'être crucial au centre des trous noirs à la fin de leur évaporation, et au tout début de l'univers. Le dernier chapitre du livre mentionne des idées sur la façon dont la théorie peut être étendue pour incorporer les phénomènes quantiques.

La théorie est basée sur une idée simple : la gravité est décrite par une théorie des champs comme l'électromagnétisme ; mais ce champ détermine *aussi* ce que nous appelons les propriétés géométriques de l'espace-temps.

Les fondements de la théorie ont trois racines : en physique, en philosophie et en mathématiques. Les trois chapitres suivants examinent ces racines séparément.

1

PHYSIQUE : UNE THÉORIE DES CHAMPS POUR LA GRAVITÉ

La première racine de la relativité générale découle du succès empirique spectaculaire de l'électromagnétisme Maxwell, aujourd'hui à la base de nos technologies électrique et électronique.

La théorie de Maxwell est une théorie de *champ*. Cela signifie que les interactions électriques et magnétiques ne sont pas comprises comme des forces agissant à distance entre des charges (comme chez Coulomb), mais plutôt comme des interactions locales, entraînées à une vitesse finie par un champ : le champ électromagnétique.

La relativité générale fait de même pour la gravité : elle ne décrit pas la gravité comme une force entre des masses, qui agirait à distance (comme chez Newton) ; mais comme une interaction locale portée à vitesse finie par un champ : le champ gravitationnel.

La relativité générale est la théorie des champs du champ gravitationnel, comme la théorie de Maxwell est la théorie des champs du champ électromagnétique. La théorie de Maxwell a été la principale source d'inspiration d'Einstein dans la construction de la relativité générale.

Le besoin d'une théorie de champ pour la gravité est apparu clairement à Einstein en raison de la relativité restreinte. Je suppose le lecteur familier avec les bases de la relativité restreinte, et dans la section suivante, j'explique en détail pourquoi la relativité restreinte implique que la gravité doit être décrite par un champ.

1.1. La relativité restreinte

Le sens physique de la relativité galiléenne

La mécanique newtonienne est invariante sous des transformations galiléennes, telles que

$$x' = x - vt. \quad (1.1)$$

Cela exprime le fait que la position et la vitesse sont des grandeurs physiques relatives. C'est-à-dire que la position x et la vitesse v d'un objet ne sont définies que par rapport à un autre objet (appelé, dans ce contexte, le système de référence).

Dans l'équation (1.1), x est la « position » définie comme la distance à un objet de référence O , tandis que x' est la distance à un deuxième objet de référence O' , se déplaçant à une vitesse constante v par rapport à O . La quantité t est le temps mesuré par une horloge. L'invariance de la mécanique newtonienne résulte du fait que sa loi fondamentale est

$$F = ma, \quad (1.2)$$

où l'accélération $a = d^2x(t)/dt^2$ ne change pas sous (1.1). En effet, l'accélération par rapport à O' est

$$a' = d^2x'(t)/dt^2 = d^2/dt^2(x(t) - vt) = d^2x(t)/dt^2 = a.$$

Ainsi, si (1.2) est vraie pour la position x définie par rapport à O , elle est également vraie pour la position x' définie par rapport à O' .

Il s'ensuit qu'il est impossible de distinguer le mouvement rectiligne uniforme du repos, en utilisant des expériences mécaniques. La position et la vitesse ne sont définies que par rapport à autre chose.

Cela implique qu'il est impossible d'étiqueter les événements spatio-temporels avec une variable de position spatiale préférée x .

C'est-à-dire que, *étant donnés deux événements qui se produisent à des moments différents, cela n'a aucun sens de dire qu'ils se produisent « à la même position x », à moins de spécifier (explicitement ou implicitement) un objet de référence par rapport auquel la position est déterminée.*

« Rester au même endroit », par rapport à un train en mouvement, par rapport à la Terre, par rapport au Soleil, ou par rapport à la Galaxie, ont des significations différentes. Une mère qui dit « arrête de bouger » à son enfant, dans un train, ne signifie pas que l'enfant doit sauter du train et s'arrêter de bouger par rapport à la Terre. « Rester au même endroit » n'a aucun sens, à moins de préciser par rapport à quoi. Voir les deux premiers panneaux de la figure 1.1. C'est la relativité galiléenne.

Le sens physique de la relativité restreinte

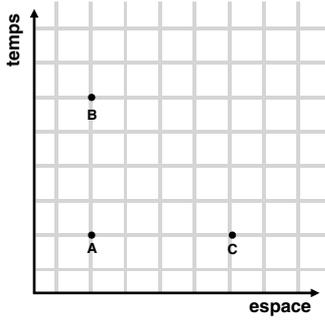
Les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous (1.1). Lorentz et Poincaré ont réalisé qu'elles sont plutôt invariantes sous un ensemble différent de transformations, telles que

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (1.3)$$

que nous appelons aujourd'hui transformations de Lorentz. Ici $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Alors que la signification de x' était claire pour Lorentz et Poincaré (c'est la distance d'un objet en mouvement), la signification de t' est restée obscure jusqu'à Einstein.

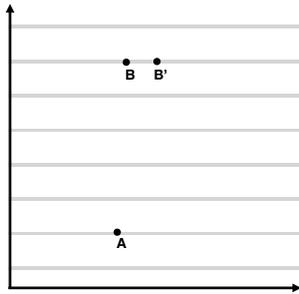
En 1905, Einstein a clarifié cette signification en réalisant que si t est le temps mesuré par une horloge se déplaçant avec l'objet de référence O , alors une horloge identique, se déplaçant avec l'objet O' , mesurera t' plutôt que t . C'est-à-dire que *des horloges identiques se déplaçant les unes par rapport aux autres mesurent des temps différents.* C'est ce qu'a compris Einstein en 1905.

RELATIVITÉ GÉNÉRALE



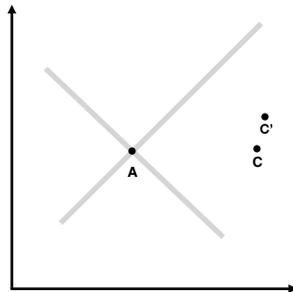
Structure de l'espace-temps intuitif

Deux événements (A et B) se déroulent *au même point*.
 Deux événements (A et C) se déroulent au même moment.



Relativité galiléenne

« *Au même point* » n'a pas de signification absolue.
 B se déroule *au même point que A* du point de vue de la Terre.
 B' se déroule au même point que A du point de la Galaxie.



Relativité restreinte

« *Au même moment* » n'a pas de signification absolue.
 C se déroule *au même moment que A* du point de vue de la Terre.
 C' se déroule *au même moment que A* du point de la Galaxie.

Figure 1.1 *La structure de l'espace-temps ; intuition non relativiste, relativité galiléenne et relativité restreinte.*

Ce n'est pas une question de perspective ou de définitions. C'est un fait physique. Considérons en effet deux horloges identiques séparées puis rapprochées. Supposons que l'une des deux se déplace de manière inertielle (sans accélération), entre la séparation et la réunion : elle mesure la durée t entre la séparation et la réunion. Supposons que l'autre horloge se déplace à une vitesse (éventuellement variable) v par rapport à la première. Lorsqu'elles seront de nouveau réunies, la seconde sera en retard sur la première. Si le carré de la vitesse v de la deuxième horloge est constant, la deuxième horloge mesure la durée

$$t' = \frac{1}{\gamma} t < t. \quad (1.4)$$

(Si la vitesse varie, selon $v(t)$, alors $t' = \int_0^t d\tau \sqrt{1 - v^2(\tau)/c^2} < t$.) Entre deux événements donnés, la durée mesurée par une horloge dépend du mouvement de cette horloge. Elle est maximale pour l'horloge qui se déplace de manière inertielle entre les deux événements.

Cette propriété des durées implique qu'il est impossible d'étiqueter les événements spatio-temporels avec un temps unique t , qui serait physiquement préféré. Cela veut dire que, *étant donné deux événements qui se produisent dans des endroits différents, cela n'a aucun sens de dire qu'ils se produisent « au même temps t », à moins que nous n'ayons spécifié (explicitement ou implicitement) un objet de référence par rapport auquel le moment est déterminé.*

Autrement dit, « arriver en même temps » a des significations différentes, du point de vue d'un train en mouvement, du point de vue de la Terre, du point de vue du Soleil ou du point de vue de la Galaxie. Voir le troisième panneau de la figure 1.1. Demander ce qui se passe « maintenant » sur Andromède est une question sans signification. C'est la relativité restreinte.

Remarquez qu'il s'agit d'une extension de la relativité galiléenne, de l'espace au temps : la relativité galiléenne est la découverte que « être au même endroit » à des moments différents est une notion mal définie ; tandis que la relativité restreinte est la découverte que

« se produire en même temps » en des lieux différents est une notion également mal définie.

1.2. Champs

La relativité restreinte et la loi de Coulomb

Une conséquence de cette découverte est qu'il n'y a aucun sens à dire qu'une force agit à distance instantanément : le terme « instantanément », sans qualificatif, n'a aucun sens.

Cela peut sembler contredire la loi de Coulomb, qui stipule que deux charges e et e' , éloignées de r , agissent l'une sur l'autre avec une force répulsive

$$F = \frac{e e'}{r^2}. \quad (1.5)$$

[Avant de poursuivre la lecture, essayez de répondre vous-même à la question suivante : comment cette loi peut-elle être compatible avec la relativité restreinte ?]

Si la loi de Coulomb était une loi universelle, elle serait en contradiction avec la relativité restreinte. Mais ce n'est pas le cas : elle n'est valable que dans la limite statique *uniquement*, où les charges ne bougent pas ou se déplacent lentement l'une par rapport à l'autre. Dans ce cas, elles définissent elles-mêmes le système de référence dans lequel la loi s'applique.

Pour comprendre pourquoi la validité de la loi de Coulomb ne peut être universelle, considérez ce qui se passe si nous enlevons rapidement l'une des deux charges. L'autre cesse-t-elle immédiatement de ressentir la force électrique ?

La réponse est bien sûr négative, car l'information ne voyage pas plus vite que la lumière : la charge restante *continue de ressentir la force* pendant une durée $t = r/c$. Pendant ce temps, une perturbation du champ électromagnétique traverse l'espace entre les charges, à la vitesse de la lumière, et ce n'est que lorsqu'elle atteint la deuxième charge que la force agissant sur elle se modifie. Ainsi, la loi

de Coulomb est compatible avec la relativité restreinte uniquement parce qu'elle est la limite statique, non relativiste, des interactions portées par un champ électromagnétique. C'est cette observation qui motive la relativité générale.

La relativité restreinte et la loi de Newton

Venons-en à la gravité. Selon la loi de Newton, deux masses m et m' , séparées de r , agissent l'une sur l'autre avec la force d'attraction

$$F = G \frac{m m'}{r^2}. \quad (1.6)$$

S'il s'agissait d'une loi universelle, elle contredirait la relativité restreinte. En effet, que se passe-t-il si on éloigne rapidement l'une des deux masses ? L'autre cesse-t-elle instantanément de ressentir la force gravitationnelle ? Si la relativité restreinte est correcte, cela ne peut être le cas, car l'information ne voyage pas plus vite que la lumière : pendant un durée $t = r/c$, la masse restante continue à ressentir la force. Pendant ce temps, une perturbation d'un *champ gravitationnel* doit traverser l'espace à la vitesse de la lumière, et ce n'est que lorsqu'elle atteint la deuxième masse que la force gravitationnelle sur celle-ci se modifie. Pour que cela soit possible, il doit exister un champ qui décrit les degrés de liberté de ce qui voyage d'une masse et l'autre.

La relativité restreinte implique donc que la loi de Newton (1.6) n'est pas une loi universelle : il s'agit d'une limite statique, non relativiste, valable uniquement lorsque les masses ne se déplacent pas rapidement l'une par rapport à l'autre. En dehors de cette limite, la gravité doit être décrite par une théorie des champs, capable de rendre compte de la vitesse de propagation finie de l'interaction. La relativité générale est une telle théorie des champs. Voir Figure 1.2 page suivante.

	Électromagnétisme	Gravitation
<i>Limite statique</i>	$F = \frac{ee'}{r^2}$ loi de Coulomb	$F = G \frac{mm'}{r^2}$ loi de Newton
<i>Théorie complète</i>	théorie de champs de Maxwell	relativité générale

Figure 1.2 La logique qui a conduit Einstein à la relativité générale : la loi de Coulomb est compatible avec la relativité restreinte, uniquement parce qu'elle est la limite statique d'une théorie des champs : l'électrodynamique de Maxwell. De même, pour être compatible avec la relativité restreinte, la loi de Newton doit être la limite statique d'une théorie des champs : la relativité générale.

La structure de la relativité générale

La théorie de Maxwell est définie par (1) un champ : le champ électromagnétique ; (2) une loi de force : l'équation qui décrit comment les charges se déplacent dans le champ, appelée équation de la force de Lorentz ; et (3) des équations de champ, appelées équations de Maxwell.

En parallèle, comme nous le verrons, la relativité générale est définie par (1) un champ : le champ gravitationnel ; (2) une loi qui décrit comment les masses se déplacent sous l'action de ce champ, appelée « équation géodésique » ; et (3) des équations de champ, appelées les équations d'Einstein. Voir figure 1.3 page suivante. C'est la structure de la théorie que je vais décrire dans ce livre.

	Electromagnétisme	Relativité générale
<i>Champ</i>	Potentiel de Maxwell $A_a(x)$	Champ gravitationnel $g_{ab}(x)$
<i>Éq. d'une particule de masse m.</i>	Force de Lorentz $\ddot{x}^a = \frac{e}{m} F_b^a \dot{x}^b$	Eq. géodésique $\ddot{x}^a = -\Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c$
<i>Équations de champ</i>	Eqs de Maxwell $D_a F^{ab} = 4\pi J^b$	Eqs d'Einstein $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}$

Figure 1.3 Comparaison des structures de l'électromagnétisme et de la relativité générale. Les quantités dans les équations seront définies et discutées dans les sections suivantes : le champ gravitationnel g_{ab} dans la section 3.2 ; la connexion de Levi Civita Γ_{bc}^a , construite avec les dérivées premières de g_{ab} , dans la section 3.2.1 ; le tenseur de Ricci R_{ab} , construit avec les dérivées secondes de g_{ab} , dans la section 3.2.3 ; la constante cosmologique λ dans la section 4.3 ; et le tenseur d'énergie-impulsion T_{ab} dans la section 5.

Cependant, il existe un aspect de la gravité qui la rend très différente de l'électromagnétisme. Le champ gravitationnel est également lié à la structure géométrique de l'espace-temps. La découverte de ce lien a été la contribution éternelle d'Einstein. Ce point est abordé dans le chapitre suivant.