

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rappels de relativité restreinte</b>	<b>13</b>
	Encadré 2.1 : Les référentiels inertiels qui se chevauchent ont des vitesses relatives constantes . . . . .	19
	Encadré 2.2 : Conversions entre les unités SI et les unités RG . . . . .	20
	Encadré 2.3 : Une démonstration de la transformation de Lorentz . . . . .	21
	Encadré 2.4 : Transformations de Lorentz et rotations . . . . .	25
	Encadré 2.5 : L'intervalle d'espace-temps ne dépend pas du référentiel . . . . .	26
	Encadré 2.6 : L'ordre des événements ne dépend pas du référentiel . . . . .	26
	Encadré 2.7 : Temps propre le long d'un chemin . . . . .	27
	Encadré 2.8 : Contraction des longueurs . . . . .	27
	Encadré 2.9 : Transformation relativiste des vitesses . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Quadri-vecteurs</b>	<b>31</b>
	Encadré 3.1 : Le produit scalaire est indépendant du référentiel . . . . .	36
	Encadré 3.2 : La norme invariante de la quadri-vitesse . . . . .	36
	Encadré 3.3 : La limite de $\mathbf{u}$ à faible vitesse . . . . .	37
	Encadré 3.4 : Conservation de la quantité de mouvement ou de la quadri-quantité de mouvement ? . . . . .	38
	Encadré 3.5 : Exemple : la coupure GZK sur l'énergie des rayons cosmiques . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Notation indicielle</b>	<b>43</b>
	Encadré 4.1 : Comportement du delta de Kronecker . . . . .	48
	Encadré 4.2 : Unité du champ électromagnétique dans le système d'unités RG . . . . .	48
	Encadré 4.3 : Les équations de l'électromagnétisme en notation indicielle . . . . .	49
	Encadré 4.4 : Identifier les indices libres et les indices muets . . . . .	50
	Encadré 4.5 : Violations des règles . . . . .	50
	Encadré 4.6 : Exemples de démonstrations . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Coordonnées arbitraires</b>	<b>53</b>
	Encadré 5.1 : La base naturelle en coordonnées polaires . . . . .	58
	Encadré 5.2 : Démonstration de la loi de transformation de la métrique . . . . .	59
	Encadré 5.3 : Un exemple 2D : les coordonnées paraboliques . . . . .	60
	Encadré 5.4 : Les transformations de Lorentz comme transformations générales . . . . .	62
	Encadré 5.5 : Transformation de la métrique en espace plat . . . . .	62
	Encadré 5.6 : Une métrique pour la sphère . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Équations tensorielles</b>	<b>65</b>
	Encadré 6.1 : Exemples de covecteurs gradient . . . . .	70
	Encadré 6.2 : Descendre les indices . . . . .	71
	Encadré 6.3 : L'inverse de la métrique . . . . .	72
	Encadré 6.4 : Le delta de Kronecker est un tenseur . . . . .	73
	Encadré 6.5 : Opérations sur les tenseurs . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Équations de Maxwell</b>	<b>77</b>
	Encadré 7.1 : Équation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss . . . . .	82
	Encadré 7.2 : La dérivée de $m^2$ . . . . .	83
	Encadré 7.3 : Monter et descendre des indices en coordonnées cartésiennes . . . . .	83
	Encadré 7.4 : L'équation tensorielle de conservation de la charge . . . . .	84
	Encadré 7.5 : L'antisymétrie de $\mathbf{F}$ entraîne la conservation de la charge . . . . .	85
	Encadré 7.6 : Le potentiel vecteur . . . . .	86
	Encadré 7.7 : Démonstration des équations de Maxwell dans le vide (équation 7.20) . . . . .	87

<b>8</b>	<b>Géodésiques</b>	<b>89</b>
	Encadré 8.1 : La ligne d'univers de temps propre maximal en espace-temps plat	93
	Encadré 8.2 : Dérivation de l'équation d'Euler-Lagrange	94
	Encadré 8.3 : Dérivation de la seconde forme de l'équation des géodésiques	95
	Encadré 8.4 : Géodésiques de l'espace plat en coordonnées paraboliques	96
	Encadré 8.5 : Géodésiques pour la surface d'une sphère	98
	Encadré 8.6 : L'équation des géodésiques ne détermine pas l'échelle de $\tau$	100
	Encadré 8.7 : Géodésiques de la lumière en espace-temps plat	101
<b>9</b>	<b>Métrie de Schwarzschild</b>	<b>105</b>
	Encadré 9.1 : Distance radiale	110
	Encadré 9.2 : Chute libre depuis le repos dans l'espace-temps de Schwarzschild	111
	Encadré 9.3 : Valeur de $GM$ pour la Terre et pour le Soleil	112
	Encadré 9.4 : Décalage vers le rouge gravitationnel en champ faible	112
<b>10</b>	<b>Orbites de particules</b>	<b>115</b>
	Encadré 10.1 : Les orbites de Schwarzschild doivent être planes	120
	Encadré 10.2 : L'équation de « conservation de l'énergie » de Schwarzschild	121
	Encadré 10.3 : Conservation de l'énergie des orbites newtoniennes	122
	Encadré 10.4 : Les rayons des orbites circulaires	122
	Encadré 10.5 : La troisième loi de Kepler	124
	Encadré 10.6 : L'orbite stable de plus faible rayon	125
	Encadré 10.7 : Énergie rayonnée par une particule spiralant vers l'intérieur	126
<b>11</b>	<b>Précession du périhélie</b>	<b>129</b>
	Encadré 11.1 : Vérification de l'équation orbitale pour $u(\phi)$	135
	Encadré 11.2 : Vérification de l'équation orbitale newtonienne	135
	Encadré 11.3 : Vérification de l'équation sur la perturbation orbitale	136
	Encadré 11.4 : Application à Mercure	136
	Encadré 11.5 : Construction du diagramme de plongement de Schwarzschild	137
	Encadré 11.6 : Calcul du secteur angulaire $\delta$	138
	Encadré 11.7 : Calcul numérique des orbites de Schwarzschild	138
<b>12</b>	<b>Orbites de photons</b>	<b>143</b>
	Encadré 12.1 : Interprétation du paramètre d'impact $b$	148
	Encadré 12.2 : Démonstration de l'équation du mouvement pour un photon	148
	Encadré 12.3 : Propriétés de l'énergie potentielle pour la lumière	149
	Encadré 12.4 : Mouvement d'un photon en espace-temps plat	149
	Encadré 12.5 : Évaluation des composantes d'un quadri-vecteur dans le référentiel d'un observateur	150
	Encadré 12.6 : Une base orthonormée en coordonnées de Schwarzschild	150
	Encadré 12.7 : Angles critiques pour l'émission de photons	151
<b>13</b>	<b>Déviation de la lumière</b>	<b>153</b>
	Encadré 13.1 : Vérification de l'équation 13.2	159
	Encadré 13.2 : L'équation différentielle donnant la forme de l'orbite des photons	160
	Encadré 13.3 : L'équation différentielle donnant la perturbation de l'orbite des photons	160
	Encadré 13.4 : La forme de la solution $u(\phi)$ dans la limite de grand $r$	161
	Encadré 13.5 : L'angle de déviation maximale de la lumière par le Soleil	161
	Encadré 13.6 : L'équation des lentilles	162
	Encadré 13.7 : Rapport entre la luminosité des images et celle de la source	163
<b>14</b>	<b>Horizon des événements</b>	<b>167</b>
	Encadré 14.1 : La distance jusqu'à $r = 2GM$ est finie.	172
	Encadré 14.2 : Temps propre lors d'une chute libre de $r = R$ à $r = 0$ .	174
	Encadré 14.3 : Le futur est fini à l'intérieur de l'horizon des événements.	175

<b>15</b>	<b>Coordonnées alternatives</b>	<b>179</b>
	Encadré 15.1 : Calcul de $\partial \hat{t} / \partial r$ . . . . .	184
	Encadré 15.2 : La métrique de pluie globale . . . . .	185
	Encadré 15.3 : Les limites de $dr/d\hat{t}$ à l'intérieur de l'horizon des événements . . . . .	185
	Encadré 15.4 : Obtention des coordonnées de Kruskal-Szekeres . . . . .	186
<b>16</b>	<b>Thermodynamique des trous noirs</b>	<b>189</b>
	Encadré 16.1 : Temps de chute libre sur l'horizon depuis $r = 2GM + \epsilon$ . . . . .	194
	Encadré 16.2 : Calcul de $E_\infty$ . . . . .	195
	Encadré 16.3 : Calcul de $k_B$ , $\hbar$ et $T$ pour un trou noir solaire . . . . .	196
	Encadré 16.4 : Temps de vie d'un trou noir . . . . .	197
<b>17</b>	<b>Dérivée covariante</b>	<b>199</b>
	Encadré 17.1 : Dérivée covariante d'un vecteur . . . . .	204
	Encadré 17.2 : Dérivée covariante d'un covecteur . . . . .	204
	Encadré 17.3 : Symétrie des symboles de Christoffel . . . . .	205
	Encadré 17.4 : Les symboles de Christoffel en fonction de la métrique . . . . .	205
	Encadré 17.5 : Vérification de l'équation des géodésiques . . . . .	206
	Encadré 17.6 : Une astuce pour calculer les symboles de Christoffel . . . . .	206
	Encadré 17.7 : Le théorème de platitude locale . . . . .	207
<b>18</b>	<b>Déviations des géodésiques</b>	<b>211</b>
	Encadré 18.1 : Déviation de marée newtonienne près d'un objet sphérique . . . . .	216
	Encadré 18.2 : Démonstration de l'équation 18.9 . . . . .	217
	Encadré 18.3 : La dérivée covariante de $\mathbf{n}$ . . . . .	217
	Encadré 18.4 : Démonstration de l'équation 18.14 . . . . .	218
	Encadré 18.5 : Exemple de calcul du tenseur de Riemann . . . . .	218
<b>19</b>	<b>Tenseur de Riemann</b>	<b>221</b>
	Encadré 19.1 : Le tenseur de Riemann dans un référentiel localement inertiel . . . . .	224
	Encadré 19.2 : Symétries du tenseur de Riemann . . . . .	225
	Encadré 19.3 : Comptage des degrés de liberté indépendants du tenseur de Riemann . . . . .	226
	Encadré 19.4 : Identité de Bianchi . . . . .	227
	Encadré 19.5 : Le tenseur de Ricci est symétrique . . . . .	228
	Encadré 19.6 : Le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci pour une sphère . . . . .	228
<b>20</b>	<b>Tenseur énergie-impulsion</b>	<b>231</b>
	Encadré 20.1 : Pourquoi la source de la gravitation doit être l'énergie et non la masse . . . . .	237
	Encadré 20.2 : Interprétation de $T^{ij}$ dans un référentiel localement inertiel . . . . .	237
	Encadré 20.3 : Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait dans son référentiel au repos . . . . .	238
	Encadré 20.4 : L'équation 20.16 se ramène à l'équation 20.15 . . . . .	240
	Encadré 20.5 : La dynamique des fluides à partir de la conservation de la quadri-quantité de mouvement . . . . .	240
<b>21</b>	<b>L'équation d'Einstein</b>	<b>245</b>
	Encadré 21.1 : Divergence du tenseur de Ricci . . . . .	250
	Encadré 21.2 : Détermination de la valeur de $b$ . . . . .	251
	Encadré 21.3 : Démonstration de $-R + 4\Lambda = \kappa T$ . . . . .	252
<b>22</b>	<b>Interprétation de l'équation</b>	<b>255</b>
	Encadré 22.1 : La conservation de la quadri-impulsion entraîne que $0 = \nabla_\nu(\rho_0 u^\mu)$ . . . . .	260
	Encadré 22.2 : L'inverse de la métrique en champ faible . . . . .	260
	Encadré 22.3 : Le tenseur de Riemann dans la limite de champ faible . . . . .	261
	Encadré 22.4 : Le tenseur de Ricci dans la limite de champ faible . . . . .	262
	Encadré 22.5 : Les sources d'énergie-impulsion des perturbations de la métrique . . . . .	263
	Encadré 22.6 : L'équation des géodésiques pour une particule lente dans un champ faible . . . . .	264

<b>23</b>	<b>La solution de Schwarzschild</b>	<b>267</b>
	Encadré 23.1 : Diagonalisation d'une métrique à symétrie sphérique . . . . .	272
	Encadré 23.2 : Les composantes du tenseur de Ricci . . . . .	273
	Encadré 23.3 : Détermination de $B$ . . . . .	276
	Encadré 23.4 : Détermination de $\alpha(r)$ . . . . .	277
	Encadré 23.5 : Les symboles de Christoffel ayant pour indices $tt$ . . . . .	277
<b>24</b>	<b>L'Univers observé</b>	<b>281</b>
	Encadré 24.1 : Mesure des distances astronomiques dans le Système solaire . . . . .	286
	Encadré 24.2 : Détermination de la distance des amas stellaires . . . . .	288
	Encadré 24.3 : Relation entre décalage Doppler et vitesse radiale . . . . .	289
	Encadré 24.4 : Valeurs de la constante de Hubble . . . . .	290
	Encadré 24.5 : Tout point est le « centre » de l'expansion . . . . .	290
	Encadré 24.6 : Indications de la présence de matière noire . . . . .	291
<b>25</b>	<b>Une métrique pour le Cosmos</b>	<b>295</b>
	Encadré 25.1 : Le tenseur de Ricci de l'Univers . . . . .	300
	Encadré 25.2 : Montrer un indice du tenseur de Ricci de l'Univers . . . . .	300
	Encadré 25.3 : Le tenseur énergie-impulsion avec un indice en bas . . . . .	300
	Encadré 25.4 : L'équation d'Einstein avec un indice en bas . . . . .	303
	Encadré 25.5 : Vérification de la solution pour $g$ . . . . .	304
<b>26</b>	<b>Évolution de l'Univers</b>	<b>307</b>
	Encadré 26.1 : Les autres composantes de l'équation d'Einstein . . . . .	312
	Encadré 26.2 : Conservation locale de l'énergie et de la quantité de mouvement . . . . .	313
	Encadré 26.3 : Relation densité/échelle pour le rayonnement . . . . .	314
	Encadré 26.4 : Démonstration de l'équation de Friedmann . . . . .	314
	Encadré 26.5 : L'équation de Friedmann pour le temps présent . . . . .	315
	Encadré 26.6 : L'équation de Friedmann en fonction des Omegas . . . . .	315
	Encadré 26.7 : Comportement d'un Univers dominé par la matière . . . . .	316
<b>27</b>	<b>Implications cosmiques</b>	<b>319</b>
	Encadré 27.1 : Relation entre le redshift $z$ et la constante de Hubble . . . . .	324
	Encadré 27.2 : La loi de Hubble en fonction du redshift $z$ . . . . .	324
	Encadré 27.3 : Distance de luminosité . . . . .	325
	Encadré 27.4 : L'équation différentielle sur $a(\eta)$ . . . . .	325
	Encadré 27.5 : Résolution numérique de l'équation 27.18 . . . . .	326
<b>28</b>	<b>L'Univers primordial</b>	<b>329</b>
	Encadré 28.1 : Univers à une composante . . . . .	334
	Encadré 28.2 : Transition vers l'Univers dominé par la matière . . . . .	335
	Encadré 28.3 : Relation temps/température . . . . .	335
	Encadré 28.4 : Découplage des neutrinos . . . . .	337
	Encadré 28.5 : La densité numérique des photons . . . . .	339
<b>29</b>	<b>Fluctuations du CMB et inflation</b>	<b>341</b>
	Encadré 29.1 : La taille angulaire des plus grandes fluctuations du CMB . . . . .	347
	Encadré 29.2 : L'équation sur $\Omega_k(t)$ . . . . .	348
	Encadré 29.3 : Platitude cosmique à la fin de la nucléosynthèse primordiale . . . . .	349
	Encadré 29.4 : La formule de l'inflation exponentielle . . . . .	349
	Encadré 29.5 : Calculs d'inflation . . . . .	350
<b>30</b>	<b>Liberté de jauge</b>	<b>353</b>
	Encadré 30.1 : L'équation d'Einstein en champ faible en fonction de $h_{\mu\nu}$ . . . . .	357
	Encadré 30.2 : Inversion de la trace de $h_{\mu\nu}$ . . . . .	358
	Encadré 30.3 : L'équation d'Einstein en champ faible en fonction de $H_{\mu\nu}$ . . . . .	359
	Encadré 30.4 : Transformations de jauge des perturbations de la métrique . . . . .	360
	Encadré 30.5 : Une transformations de jauge qui n'affecte pas $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ . . . . .	361
	Encadré 30.6 : Jauge de Lorenz . . . . .	362
	Encadré 30.7 : Liberté de jauge additionnelle . . . . .	363

<b>31</b>	<b>Détection des ondes gravitationnelles</b>	<b>365</b>
	Encadré 31.1 : Contraintes sur notre solution d'essai . . . . .	370
	Encadré 31.2 : Transformation vers la jauge transverse de trace nulle . . . . .	371
	Encadré 31.3 : Une particule au repos reste au repos dans les coordonnées TT. . . . .	373
	Encadré 31.4 : Effet d'une onde gravitationnelle sur des particules disposées en cercle. . . . .	374
<b>32</b>	<b>Énergie des ondes gravitationnelles</b>	<b>377</b>
	Encadré 32.1 : Le tenseur de Ricci . . . . .	381
	Encadré 32.2 : Le scalaire de courbure moyen . . . . .	381
	Encadré 32.3 : Densité d'énergie des ondes gravitationnelles, dans le cas général	381
<b>33</b>	<b>Sources des ondes gravitationnelles</b>	<b>385</b>
	Encadré 33.1 : $H^{tt}$ pour une source compacte dont le centre de masse est au repos . . . . .	390
	Encadré 33.2 : Une identité utile . . . . .	390
	Encadré 33.3 : Les composantes transverses et de trace nulle de $A^{tt}$ . . . . .	392
	Encadré 33.4 : Comment trouver $\ddot{I}^{jk}_{TT}$ pour des ondes se déplaçant dans la direction $\vec{n}$ . . . . .	393
	Encadré 33.5 : Le flux en fonction de $I^{jk}$ . . . . .	395
	Encadré 33.6 : Évaluation des intégrales dans le calcul de la puissance . . . . .	396
<b>34</b>	<b>Astronomie des ondes gravitationnelles</b>	<b>399</b>
	Encadré 34.1 : Le $I^{jk}$ de l'haltère . . . . .	404
	Encadré 34.2 : Puissance rayonnée par l'haltère . . . . .	405
	Encadré 34.3 : Énergie totale d'un couple binaire en orbite . . . . .	406
	Encadré 34.4 : Vitesse de variation de la période orbitale . . . . .	406
	Encadré 34.5 : Caractéristiques de $\iota$ Bootis . . . . .	407
<b>35</b>	<b>Gravitomagnétisme</b>	<b>409</b>
	Encadré 35.1 : Condition de Lorenz pour les potentiels . . . . .	414
	Encadré 35.2 : Équations de Maxwell pour le champ gravitationnel . . . . .	415
	Encadré 35.3 : Les équations de Lorentz gravitationnelles . . . . .	416
	Encadré 35.4 : Le « moment gravito-magnétique » d'un objet en rotation . . . . .	416
	Encadré 35.5 : Vitesse angulaire de précession d'un gyroscope . . . . .	417
<b>36</b>	<b>Métrie de Kerr</b>	<b>419</b>
	Encadré 36.1 : Développement de $\ \vec{R} - \vec{r}\ ^{-1}$ au premier ordre en $r/R$ . . . . .	423
	Encadré 36.2 : L'intégrale donnant $h^{tx}$ . . . . .	424
	Encadré 36.3 : Pourquoi les autres termes du développement donnent zéro dans l'intégrale . . . . .	425
	Encadré 36.4 : Transformation en coordonnées sphériques de la solution en champ faible . . . . .	426
	Encadré 36.5 : La limite en champ faible de la métrie de Kerr . . . . .	427
<b>37</b>	<b>Orbites des particules dans l'espace-temps de Kerr</b>	<b>429</b>
	Encadré 37.1 : Calcul des expressions de $dt/d\tau$ et $d\phi/d\tau$ . . . . .	433
	Encadré 37.2 : Vérification de la valeur de $[g_{t\phi}]^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$ . . . . .	434
	Encadré 37.3 : Les équations de « conservation de l'énergie » au cours du mouvement . . . . .	435
	Encadré 37.4 : Troisième loi de Kepler . . . . .	436
	Encadré 37.5 : Rayon minimal des orbites circulaires stables quand $a = GM$ . . . . .	437
<b>38</b>	<b>Ergorégion et horizon</b>	<b>439</b>
	Encadré 38.1 : Les rayons où $g_{tt} = 0$ . . . . .	443
	Encadré 38.2 : L'intervalle de vitesses angulaires lorsque $dr$ ou $d\theta \neq 0$ . . . . .	444
	Encadré 38.3 : Limites sur la vitesse angulaire dans le plan équatorial . . . . .	445
	Encadré 38.4 : La métrie de l'horizon des événements . . . . .	446
	Encadré 38.5 : L'aire de l'horizon des événements externe de Kerr . . . . .	447
	Encadré 38.6 : Transformations qui préservent le signe du déterminant des matrices . . . . .	447

<b>39</b>	<b>Orbites d'énergie négative</b>	<b>451</b>
	Encadré 39.1 : Forme quadratique pour la conservation de l'énergie . . . . .	456
	Encadré 39.2 : La racine carrée est nulle sur l'horizon des événements . . . . .	457
	Encadré 39.3 : $e$ ne peut être négatif que dans l'ergorégion . . . . .	458
	Encadré 39.4 : La limite fondamentale sur $\delta M$ en fonction de $\delta S$ . . . . .	459
	Encadré 39.5 : $\delta M \geq 0$ . . . . .	460
	Encadré 39.6 : La contribution de l'énergie de rotation à la masse du trou noir	461