

Table des matières

1	Introduction	1
2	Rappels de relativité restreinte	13
	Encadré 2.1 : Les référentiels inertiels qui se chevauchent ont des vitesses relatives constantes	19
	Encadré 2.2 : Conversions entre les unités SI et les unités RG	20
	Encadré 2.3 : Une démonstration de la transformation de Lorentz	21
	Encadré 2.4 : Transformations de Lorentz et rotations	25
	Encadré 2.5 : L'intervalle d'espace-temps ne dépend pas du référentiel	26
	Encadré 2.6 : L'ordre des événements ne dépend pas du référentiel	26
	Encadré 2.7 : Temps propre le long d'un chemin	27
	Encadré 2.8 : Contraction des longueurs	27
	Encadré 2.9 : Transformation relativiste des vitesses	28
3	Quadri-vecteurs	31
	Encadré 3.1 : Le produit scalaire est indépendant du référentiel	36
	Encadré 3.2 : La norme invariante de la quadri-vitesse	36
	Encadré 3.3 : La limite de \mathbf{u} à faible vitesse	37
	Encadré 3.4 : Conservation de la quantité de mouvement ou de la quadri-quantité de mouvement ?	38
	Encadré 3.5 : Exemple : la coupure GZK sur l'énergie des rayons cosmiques	40
4	Notation indicielle	43
	Encadré 4.1 : Comportement du delta de Kronecker	48
	Encadré 4.2 : Unité du champ électromagnétique dans le système d'unités RG	48
	Encadré 4.3 : Les équations de l'électromagnétisme en notation indicielle	49
	Encadré 4.4 : Identifier les indices libres et les indices muets	50
	Encadré 4.5 : Violations des règles	50
	Encadré 4.6 : Exemples de démonstrations	51
5	Coordonnées arbitraires	53
	Encadré 5.1 : La base naturelle en coordonnées polaires	58
	Encadré 5.2 : Démonstration de la loi de transformation de la métrique	59
	Encadré 5.3 : Un exemple 2D : les coordonnées paraboliques	60
	Encadré 5.4 : Les transformations de Lorentz comme transformations générales	62
	Encadré 5.5 : Transformation de la métrique en espace plat	62
	Encadré 5.6 : Une métrique pour la sphère	63
6	Équations tensorielles	65
	Encadré 6.1 : Exemples de covecteurs gradient	70
	Encadré 6.2 : Descendre les indices	71
	Encadré 6.3 : L'inverse de la métrique	72
	Encadré 6.4 : Le delta de Kronecker est un tenseur	73
	Encadré 6.5 : Opérations sur les tenseurs	73
7	Équations de Maxwell	77
	Encadré 7.1 : Équation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss	82
	Encadré 7.2 : La dérivée de m^2	83
	Encadré 7.3 : Monter et descendre des indices en coordonnées cartésiennes	83
	Encadré 7.4 : L'équation tensorielle de conservation de la charge	84
	Encadré 7.5 : L'antisymétrie de \mathbf{F} entraîne la conservation de la charge	85
	Encadré 7.6 : Le potentiel vecteur	86
	Encadré 7.7 : Démonstration des équations de Maxwell dans le vide (équation 7.20)	87

8	Géodésiques	89
	Encadré 8.1 : La ligne d'univers de temps propre maximal en espace-temps plat	93
	Encadré 8.2 : Dérivation de l'équation d'Euler-Lagrange	94
	Encadré 8.3 : Dérivation de la seconde forme de l'équation des géodésiques	95
	Encadré 8.4 : Géodésiques de l'espace plat en coordonnées paraboliques	96
	Encadré 8.5 : Géodésiques pour la surface d'une sphère	98
	Encadré 8.6 : L'équation des géodésiques ne détermine pas l'échelle de τ	100
	Encadré 8.7 : Géodésiques de la lumière en espace-temps plat	101
9	Métrie de Schwarzschild	105
	Encadré 9.1 : Distance radiale	110
	Encadré 9.2 : Chute libre depuis le repos dans l'espace-temps de Schwarzschild	111
	Encadré 9.3 : Valeur de GM pour la Terre et pour le Soleil	112
	Encadré 9.4 : Décalage vers le rouge gravitationnel en champ faible	112
10	Orbites de particules	115
	Encadré 10.1 : Les orbites de Schwarzschild doivent être planes	120
	Encadré 10.2 : L'équation de « conservation de l'énergie » de Schwarzschild	121
	Encadré 10.3 : Conservation de l'énergie des orbites newtoniennes	122
	Encadré 10.4 : Les rayons des orbites circulaires	122
	Encadré 10.5 : La troisième loi de Kepler	124
	Encadré 10.6 : L'orbite stable de plus faible rayon	125
	Encadré 10.7 : Énergie rayonnée par une particule spiralant vers l'intérieur	126
11	Précession du périhélie	129
	Encadré 11.1 : Vérification de l'équation orbitale pour $u(\phi)$	135
	Encadré 11.2 : Vérification de l'équation orbitale newtonienne	135
	Encadré 11.3 : Vérification de l'équation sur la perturbation orbitale	136
	Encadré 11.4 : Application à Mercure	136
	Encadré 11.5 : Construction du diagramme de plongement de Schwarzschild	137
	Encadré 11.6 : Calcul du secteur angulaire δ	138
	Encadré 11.7 : Calcul numérique des orbites de Schwarzschild	138
12	Orbites de photons	143
	Encadré 12.1 : Interprétation du paramètre d'impact b	148
	Encadré 12.2 : Démonstration de l'équation du mouvement pour un photon	148
	Encadré 12.3 : Propriétés de l'énergie potentielle pour la lumière	149
	Encadré 12.4 : Mouvement d'un photon en espace-temps plat	149
	Encadré 12.5 : Évaluation des composantes d'un quadri-vecteur dans le référentiel d'un observateur	150
	Encadré 12.6 : Une base orthonormée en coordonnées de Schwarzschild	150
	Encadré 12.7 : Angles critiques pour l'émission de photons	151
13	Déviation de la lumière	153
	Encadré 13.1 : Vérification de l'équation 13.2	159
	Encadré 13.2 : L'équation différentielle donnant la forme de l'orbite des photons	160
	Encadré 13.3 : L'équation différentielle donnant la perturbation de l'orbite des photons	160
	Encadré 13.4 : La forme de la solution $u(\phi)$ dans la limite de grand r	161
	Encadré 13.5 : L'angle de déviation maximale de la lumière par le Soleil	161
	Encadré 13.6 : L'équation des lentilles	162
	Encadré 13.7 : Rapport entre la luminosité des images et celle de la source	163
14	Horizon des événements	167
	Encadré 14.1 : La distance jusqu'à $r = 2GM$ est finie.	172
	Encadré 14.2 : Temps propre lors d'une chute libre de $r = R$ à $r = 0$.	174
	Encadré 14.3 : Le futur est fini à l'intérieur de l'horizon des événements.	175

15	Coordonnées alternatives	179
	Encadré 15.1 : Calcul de $\partial \hat{t} / \partial r$	184
	Encadré 15.2 : La métrique de pluie globale	185
	Encadré 15.3 : Les limites de $dr/d\hat{t}$ à l'intérieur de l'horizon des événements	185
	Encadré 15.4 : Obtention des coordonnées de Kruskal-Szekeres	186
16	Thermodynamique des trous noirs	189
	Encadré 16.1 : Temps de chute libre sur l'horizon depuis $r = 2GM + \epsilon$	194
	Encadré 16.2 : Calcul de E_∞	195
	Encadré 16.3 : Calcul de k_B , \hbar et T pour un trou noir solaire	196
	Encadré 16.4 : Temps de vie d'un trou noir	197
17	Dérivée covariante	199
	Encadré 17.1 : Dérivée covariante d'un vecteur	204
	Encadré 17.2 : Dérivée covariante d'un covecteur	204
	Encadré 17.3 : Symétrie des symboles de Christoffel	205
	Encadré 17.4 : Les symboles de Christoffel en fonction de la métrique	205
	Encadré 17.5 : Vérification de l'équation des géodésiques	206
	Encadré 17.6 : Une astuce pour calculer les symboles de Christoffel	206
	Encadré 17.7 : Le théorème de platitude locale	207
18	Déviations des géodésiques	211
	Encadré 18.1 : Déviation de marée newtonienne près d'un objet sphérique	216
	Encadré 18.2 : Démonstration de l'équation 18.9	217
	Encadré 18.3 : La dérivée covariante de \mathbf{n}	217
	Encadré 18.4 : Démonstration de l'équation 18.14	218
	Encadré 18.5 : Exemple de calcul du tenseur de Riemann	218
19	Tenseur de Riemann	221
	Encadré 19.1 : Le tenseur de Riemann dans un référentiel localement inertiel	224
	Encadré 19.2 : Symétries du tenseur de Riemann	225
	Encadré 19.3 : Comptage des degrés de liberté indépendants du tenseur de Riemann	226
	Encadré 19.4 : Identité de Bianchi	227
	Encadré 19.5 : Le tenseur de Ricci est symétrique	228
	Encadré 19.6 : Le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci pour une sphère	228
20	Tenseur énergie-impulsion	231
	Encadré 20.1 : Pourquoi la source de la gravitation doit être l'énergie et non la masse	237
	Encadré 20.2 : Interprétation de T^{ij} dans un référentiel localement inertiel	237
	Encadré 20.3 : Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait dans son référentiel au repos	238
	Encadré 20.4 : L'équation 20.16 se ramène à l'équation 20.15	240
	Encadré 20.5 : La dynamique des fluides à partir de la conservation de la quadri-quantité de mouvement	240
21	L'équation d'Einstein	245
	Encadré 21.1 : Divergence du tenseur de Ricci	250
	Encadré 21.2 : Détermination de la valeur de b	251
	Encadré 21.3 : Démonstration de $-R + 4\Lambda = \kappa T$	252
22	Interprétation de l'équation	255
	Encadré 22.1 : La conservation de la quadri-impulsion entraîne que $0 = \nabla_\nu(\rho_0 u^\mu)$	260
	Encadré 22.2 : L'inverse de la métrique en champ faible	260
	Encadré 22.3 : Le tenseur de Riemann dans la limite de champ faible	261
	Encadré 22.4 : Le tenseur de Ricci dans la limite de champ faible	262
	Encadré 22.5 : Les sources d'énergie-impulsion des perturbations de la métrique	263
	Encadré 22.6 : L'équation des géodésiques pour une particule lente dans un champ faible	264

23	La solution de Schwarzschild	267
	Encadré 23.1 : Diagonalisation d'une métrique à symétrie sphérique	272
	Encadré 23.2 : Les composantes du tenseur de Ricci	273
	Encadré 23.3 : Détermination de B	276
	Encadré 23.4 : Détermination de $\alpha(r)$	277
	Encadré 23.5 : Les symboles de Christoffel ayant pour indices tt	277
24	L'Univers observé	281
	Encadré 24.1 : Mesure des distances astronomiques dans le Système solaire	286
	Encadré 24.2 : Détermination de la distance des amas stellaires	288
	Encadré 24.3 : Relation entre décalage Doppler et vitesse radiale	289
	Encadré 24.4 : Valeurs de la constante de Hubble	290
	Encadré 24.5 : Tout point est le « centre » de l'expansion	290
	Encadré 24.6 : Indications de la présence de matière noire	291
25	Une métrique pour le Cosmos	295
	Encadré 25.1 : Le tenseur de Ricci de l'Univers	300
	Encadré 25.2 : Montrer un indice du tenseur de Ricci de l'Univers	300
	Encadré 25.3 : Le tenseur énergie-impulsion avec un indice en bas	300
	Encadré 25.4 : L'équation d'Einstein avec un indice en bas	303
	Encadré 25.5 : Vérification de la solution pour g	304
26	Évolution de l'Univers	307
	Encadré 26.1 : Les autres composantes de l'équation d'Einstein	312
	Encadré 26.2 : Conservation locale de l'énergie et de la quantité de mouvement	313
	Encadré 26.3 : Relation densité/échelle pour le rayonnement	314
	Encadré 26.4 : Démonstration de l'équation de Friedmann	314
	Encadré 26.5 : L'équation de Friedmann pour le temps présent	315
	Encadré 26.6 : L'équation de Friedmann en fonction des Omegas	315
	Encadré 26.7 : Comportement d'un Univers dominé par la matière	316
27	Implications cosmiques	319
	Encadré 27.1 : Relation entre le redshift z et la constante de Hubble	324
	Encadré 27.2 : La loi de Hubble en fonction du redshift z	324
	Encadré 27.3 : Distance de luminosité	325
	Encadré 27.4 : L'équation différentielle sur $a(\eta)$	325
	Encadré 27.5 : Résolution numérique de l'équation 27.18	326
28	L'Univers primordial	329
	Encadré 28.1 : Univers à une composante	334
	Encadré 28.2 : Transition vers l'Univers dominé par la matière	335
	Encadré 28.3 : Relation temps/température	335
	Encadré 28.4 : Découplage des neutrinos	337
	Encadré 28.5 : La densité numérique des photons	339
29	Fluctuations du CMB et inflation	341
	Encadré 29.1 : La taille angulaire des plus grandes fluctuations du CMB	347
	Encadré 29.2 : L'équation sur $\Omega_k(t)$	348
	Encadré 29.3 : Platitude cosmique à la fin de la nucléosynthèse primordiale	349
	Encadré 29.4 : La formule de l'inflation exponentielle	349
	Encadré 29.5 : Calculs d'inflation	350
30	Liberté de jauge	353
	Encadré 30.1 : L'équation d'Einstein en champ faible en fonction de $h_{\mu\nu}$	357
	Encadré 30.2 : Inversion de la trace de $h_{\mu\nu}$	358
	Encadré 30.3 : L'équation d'Einstein en champ faible en fonction de $H_{\mu\nu}$	359
	Encadré 30.4 : Transformations de jauge des perturbations de la métrique	360
	Encadré 30.5 : Une transformations de jauge qui n'affecte pas $R_{\alpha\beta\mu\nu}$	361
	Encadré 30.6 : Jauge de Lorenz	362
	Encadré 30.7 : Liberté de jauge additionnelle	363

31	Détection des ondes gravitationnelles	365
	Encadré 31.1 : Contraintes sur notre solution d'essai	370
	Encadré 31.2 : Transformation vers la jauge transverse de trace nulle	371
	Encadré 31.3 : Une particule au repos reste au repos dans les coordonnées TT.	373
	Encadré 31.4 : Effet d'une onde gravitationnelle sur des particules disposées en cercle.	374
32	Énergie des ondes gravitationnelles	377
	Encadré 32.1 : Le tenseur de Ricci	381
	Encadré 32.2 : Le scalaire de courbure moyen	381
	Encadré 32.3 : Densité d'énergie des ondes gravitationnelles, dans le cas général	381
33	Sources des ondes gravitationnelles	385
	Encadré 33.1 : H^{tt} pour une source compacte dont le centre de masse est au repos	390
	Encadré 33.2 : Une identité utile	390
	Encadré 33.3 : Les composantes transverses et de trace nulle de $A^{\mu\nu}$	392
	Encadré 33.4 : Comment trouver \ddot{I}^{jk}_{TT} pour des ondes se déplaçant dans la direction \vec{n}	393
	Encadré 33.5 : Le flux en fonction de I^{jk}	395
	Encadré 33.6 : Évaluation des intégrales dans le calcul de la puissance	396
34	Astronomie des ondes gravitationnelles	399
	Encadré 34.1 : Le I^{jk} de l'haltère	404
	Encadré 34.2 : Puissance rayonnée par l'haltère	405
	Encadré 34.3 : Énergie totale d'un couple binaire en orbite	406
	Encadré 34.4 : Vitesse de variation de la période orbitale	406
	Encadré 34.5 : Caractéristiques de ι Bootis	407
35	Gravitomagnétisme	409
	Encadré 35.1 : Condition de Lorenz pour les potentiels	414
	Encadré 35.2 : Équations de Maxwell pour le champ gravitationnel	415
	Encadré 35.3 : Les équations de Lorentz gravitationnelles	416
	Encadré 35.4 : Le « moment gravito-magnétique » d'un objet en rotation	416
	Encadré 35.5 : Vitesse angulaire de précession d'un gyroscope	417
36	Métrie de Kerr	419
	Encadré 36.1 : Développement de $\ \vec{R} - \vec{r}\ ^{-1}$ au premier ordre en r/R	423
	Encadré 36.2 : L'intégrale donnant h^{tx}	424
	Encadré 36.3 : Pourquoi les autres termes du développement donnent zéro dans l'intégrale	425
	Encadré 36.4 : Transformation en coordonnées sphériques de la solution en champ faible	426
	Encadré 36.5 : La limite en champ faible de la métrie de Kerr	427
37	Orbites des particules dans l'espace-temps de Kerr	429
	Encadré 37.1 : Calcul des expressions de $dt/d\tau$ et $d\phi/d\tau$	433
	Encadré 37.2 : Vérification de la valeur de $[g_{t\phi}]^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$	434
	Encadré 37.3 : Les équations de « conservation de l'énergie » au cours du mouvement	435
	Encadré 37.4 : Troisième loi de Kepler	436
	Encadré 37.5 : Rayon minimal des orbites circulaires stables quand $a = GM$	437
38	Ergorégion et horizon	439
	Encadré 38.1 : Les rayons où $g_{tt} = 0$	443
	Encadré 38.2 : L'intervalle de vitesses angulaires lorsque dr ou $d\theta \neq 0$	444
	Encadré 38.3 : Limites sur la vitesse angulaire dans le plan équatorial	445
	Encadré 38.4 : La métrie de l'horizon des événements	446
	Encadré 38.5 : L'aire de l'horizon des événements externe de Kerr	447
	Encadré 38.6 : Transformations qui préservent le signe du déterminant des matrices	447

39	Orbites d'énergie négative	451
	Encadré 39.1 : Forme quadratique pour la conservation de l'énergie	456
	Encadré 39.2 : La racine carrée est nulle sur l'horizon des événements	457
	Encadré 39.3 : e ne peut être négatif que dans l'ergorégion	458
	Encadré 39.4 : La limite fondamentale sur δM en fonction de δS	459
	Encadré 39.5 : $\delta M \geq 0$	460
	Encadré 39.6 : La contribution de l'énergie de rotation à la masse du trou noir	461