BERTRAND CLOEZ

RECUEIL DE CURIOSITÉS MATHÉMATIQUES

ellipses

1 L'UNIQUE !

Jeu de cartes · Combinatoire · Lycée

Prenez un jeu de cartes, mélangez-le bien et regardez-le. Savez-vous que l'on peut affirmer sans prendre de risques que vous êtes l'unique personne à n'avoir jamais vu cette disposition de cartes et que vous serez sûrement la dernière !

En effet, le nombre de dispositions possibles d'un jeu de 52 cartes est 52!. Ce nombre se prononce factorielle 52 et vaut :

$$52! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 51 \times 52.$$

Vous aviez donc une chance sur 52! de tomber sur cette disposition.

Même si cela ne paraît pas évident au premier regard, cette probabilité est infime car 52! est colossal. On peut, par exemple, minorer ce nombre grossièrement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 52! &= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \quad \times 10 \times 11 \times \cdots \times 51 \times 52 \\ &\geq 1 \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \quad \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10 \times 10 \\ &= 10^{43}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire un 1 et 43 zéros derrière. Pour illustrer cette grandeur, imaginez que si tous les êtres humains actuels avaient pu regarder un milliard de dispositions différentes d'un jeu de 52 cartes pendant chaque seconde depuis le big bang alors nous n'aurions même pas aperçu 10^{27} dispositions différentes. En effet, on estime le big bang à 14 milliards d'années, une année comprend (environ) $365,24219$ jours et un jour comprend 86400 secondes. On a donc, en reliant ces quantités :

$$10^9 \times 14000000000 \times 365,24219 \times 86400 \approx 4,4 \times 10^{26}.$$

Finalement notons que l'estimation précédente était bien grossière car nous avons les approximations suivantes :

$$32! \approx 2,6 \times 10^{35}, \qquad 52! \approx 8,1 \times 10^{67}.$$

---

40 Mélange américain et tour de magie
49 Mélange par coupes et tour de magie
34 Googol

2 ÉQUATIONS DE DEGRÉ 1 OU 2

Équation · Histoire · Algèbre · Lycée

Une équation polynomiale de degré 2 est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Les nombres a, b et c sont supposés connus et x inconnu. Par exemple, si j'achète deux livres à 10 euros ; trouver le prix du livre revient à résoudre l'équation $2x - 10 = 0$; c'est-à-dire $a = 0$, $b = 2$ et $c = -10$.

La tablette d'argile babylonienne BM 13901 du British Museum illustre que résoudre ce type d'équations motive les humain · e · s depuis au moins 4000 ans ! Cependant, ces problèmes restent motivant aujourd'hui comme le montre la pré-publication scientifique *A Simple Proof of the Quadratic Formula* de Po-Shen Loh en 2019 disponible sur le site arxiv.

Néanmoins l'un des premiers apports majeurs connus est sûrement le livre *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* du mathématicien Al-Khawarizmi vers l'an 830. Dans ce livre, le mathématicien, dont le nom a donné le mot « algorithme » (mais aussi les mots *gaurismo* et *algarismo* relatifs au chiffre en espagnol et portugais), décrit les étapes pour résoudre diverses équations liées à des problèmes concrets de partage de terre ou de commerce. Une particularité de ce livre est qu'il ne contient aucun chiffre ni aucune équation abstraite du type de celle énoncée plus haut. Toutes les équations sont formulées avec des phrases. Il sépare les constantes a, b, c, appelées dirham désignant l'argent à cette époque (et aujourd'hui la monnaie du Maroc), des inconnues simples x qu'il appelle la racine (gezr/jidr en arabe, signifiant aussi ce qui est caché) et de son carré x^2 nommé le bien (au sens actif/capital). Ainsi l'équation $x^2 = x$ deviendrait « la racine vaut le bien ».

Il décrit diverses méthodes comme la « réduction » (ou forçage, restaurer), al jabr en arabe qui a donné le mot algèbre, qui expose comment on additionne des termes à gauche et à droite d'une égalité pour avancer dans la résolution d'une équation.

---

21 Le duo **21 × 29,7**
36 Chère inconnue
44 Équations de degré **3** ou **4**

3 MATHÉMATIQUES DE LA GUITARE

Analyse   Musique   Lycée

Les petites barrettes métalliques sur les manches des guitares s'appellent des frettes. Leur disposition suit la somme d'une suite géométrique de raison $1,059463$ (environ).

Cela signifie que si on divise la longueur entre deux frettes par la longueur des deux frettes qui suivent, on trouve 1,059463. C'est-à-dire quasiment 1 et pourtant on peut voir sur le manche à quel point les frettes se séparent de plus en plus vite : les guitares illustrent bien la vitesse de la croissance exponentielle !

Pourquoi $1,059463$?

Le son est une onde et une note est un simple signal périodique (comme la courbe cosinus). Si on considère un autre signal dont la fréquence est un multiple de la première, alors ces deux signaux oscillent à la même période. Cela donne donc quelque chose d'harmonieux à l'oreille. Si au contraire, on multiplie cette fréquence, par exemple, par un nombre irrationnel alors « la consistance » du son change continuellement et le son associé nous brusque. Pour un son de fréquence f, les sons de fréquence $2f$, $4f$, $8f$ mais donc aussi $f/2$, $f/4\dots$ sont donc très harmonieux. C'est pour cette raison, que l'on a choisi de nommer par la même note ces deux sons. Cependant, de manière similaire, les sons $3f$, $9f$, $f/3$, $f/9$ ou $5f$, $25f$, $f/5\dots$ nous paraissent harmonieux. Enfin des sons de fréquences f, $3f/2$, $3f/4\dots$ donnent aussi des sons harmonieux lorsqu'ils sont combinés. En conclusion, pour passer d'une note à une autre, il faut multiplier la fréquence par un nombre rationnel, dont les numérateurs et dénominateurs sont plutôt des petits entiers, pour avoir une cohérence harmonieuse à l'oreille.

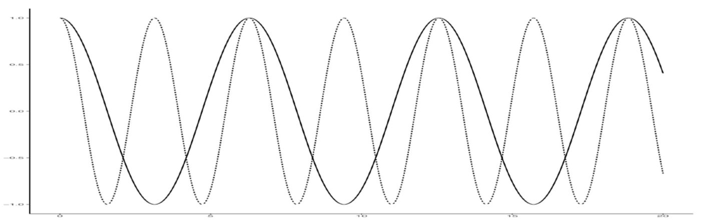


FIGURE 1 – Deux signaux de fréquences f et $2f$: les deux courbes oscillent selon la même période.

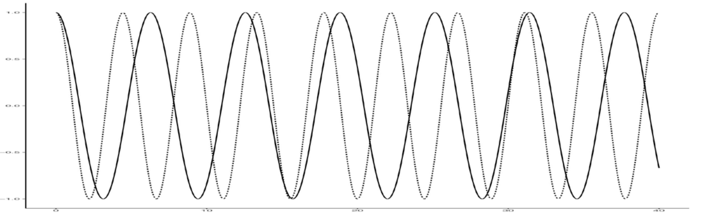


FIGURE 2 – Deux signaux de fréquences f et $\sqrt{2}f$: les deux courbes oscillent de manière désordonnée

À partir de là, une longue histoire débute sur comment passer du Do au Ré que je ne vais pas décrire ici. Le problème est qu'en multipliant successivement une fréquence f par $3/2$ ou $3/4$ alors il est impossible de retomber sur $2f$. C'est-à-dire que l'on ne peut pas retrouver notre note de départ en passant par plusieurs notes intermédiaires harmonieusement. Pour faire face à ce problème, il est possible d'utiliser la gamme pythagoricienne. Dans cette dernière, une mauvaise note est laissée sur l'instrument (i.e. la fameuse quinte du loup). Il est aussi possible de choisir de jouer faussement toutes les notes, mais en les jouant moins faussement qu'avec la quinte du loup. C'est ce que l'on fait lorsque l'on utilise le tempérament égal. Dans ce dernier système musical, on passe d'une note à une autre en la multipliant par le même nombre q. Pour avoir 12 notes différentes, on a donc des notes de fréquences f, $q \times f$, $q^2 \times f, q^3 \times f \dots$ Pour retomber sur nos pattes, on doit avoir $q^{12} = 2$ c'est-à-dire $q = \sqrt[12]{2} \approx 1,059463$.

Pour revenir à la guitare, notons qu'en frottant une corde, pour doubler la fréquence du son qu'elle produit, il suffit de diviser la taille de la corde par 2. Pour résumer mon explication, en posant ses doigts sur ces frettes, on ne joue donc pas une note qui est parfaitement juste à l'oreille mais presque. Par exemple la 7e note a une fréquence de $\sqrt[12]{2}^7$ (fois celle de la première note) et possède donc une fréquence d'environ $1,498$. Presque $3/2$!
De même, la 4e note a une fréquence multipliée par $\sqrt[12]{2}^4 \approx 1,26 \approx 5/4$.

Pour finir sur une note positive, on peut toujours pincer la corde d'une guitare à n'importe quel endroit et donc jouer parfaitement toutes les notes !

---

64 Entendre la forme du tambour
10 Précoce, le prince des mathématiciens !
26 Calcul de $\sqrt{2}$

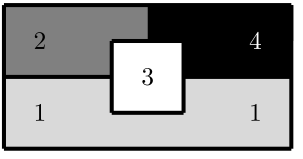
4 THÉORÈME DES 4 COULEURS

Mathématiciens Ordinateur Activité Théorie des graphes Primaire

Un beau théorème est un théorème qui s'énonce et se comprend simplement, mais dont la démonstration est non triviale.

Le théorème des 4 couleurs en est un parfait exemple.

Prenez une carte, par exemple celle de la France subdivisée en départements ou celle du monde subdivisée en pays. Combien faut-il de couleurs pour colorier tous les départements (ou pays) sans que deux départements qui se touchent ne possèdent la même couleur ?



En essayant un peu, on trouve facilement que 4 couleurs sont généralement nécessaires. Existe-t-il cependant des géométries de cartes complexes qui nécessiteraient plus de couleurs ? Non. C'est ce qu'énonce le théorème des 4 couleurs : il suffit de 4 couleurs maximum pour colorier n'importe quelle carte. L'énoncé est très simple, mais la démonstration l'est moins. En effet, ce théorème fût une conjecture formulée par Francis Guthrie, en 1852/1879. Cela signifie qu'il avait trouvé l'énoncé mais n'avait pas trouvé de démonstration. Après plusieurs fausses démonstrations ou démonstrations de condition plus simple (par exemple au moins 5 ou 6 couleurs sont nécessaires) deux Américains, Kenneth Appel et Wolfgang Haken, le démontrent à l'aide d'un ordinateur en 1976. Celui-ci, avec 1200 heures de calcul, étudie autour de 1500 cas critiques qu'il fallait étudier particulièrement. Ce fût la première fois de l'histoire qu'un nouveau résultat mathématique a été démontré à l'aide d'un ordinateur. Cela posa la question de la validité du résultat ! En effet, les mathématiciens relisent les démonstrations de leurs collègues pour valider leur justesse mais comment vérifier tous les calculs d'un ordinateur ?

Pour illustrer la complexité de ce type de problèmes, pour un graphe donné, savoir s'il est coloriable en 3 couleurs est un problème NP-complet : il est très rapide numériquement de vérifier qu'un graphe comporte toutes ces régions coloriées avec seulement 3 couleurs [*] mais les méthodes connues pour colorier un tel graphe aujourd'hui sont numériquement très longues si le nombre de régions est grand [†].

*. Sans avoir deux mêmes couleurs limitrophes.

†. Mathématiquement, Le nombre d'étapes des possibles algorithmes, en fonction du nombre de régions à colorier n, croît plus vite que tout polynôme n^p.

61 G. Kasparov : des échecs et des réussites
24 Tangram et Pythagore
92 Un jeu et des ponts

5 LE PLI CACHETÉ 11-668

Mathématicien Citation Probabilités Supérieur

D'après l'éminent probabiliste Marc Yor,

« Wolfgang Dœblin a traversé le monde, et le monde des mathématiques en particulier, tel une étoile filante. »

Wolfgang Döblin, également connu sous les noms de Vincent Doblin ou Wolfgang Doeblin, est un mathématicien naturalisé français d'origine allemande et mort pendant la Seconde Guerre mondiale, à l'âge de 25 ans, pour défendre la France. Alors qu'il était mobilisé en tant que soldat, il continue de faire des mathématiques [*]. Juste avant de mourir, il envoie à l'académie des sciences ses résultats dans le manuscrit *Sur l'équation de Kolmogoroff* sous pli cacheté.

Les règles administratives liés à ce mode d'envoi ont fait que cette lettre n'a été ouverte qu'en 2000 !

Nous avons pu voir l'étendu de son talent mathématique. Parmi ses résultats, on retrouve le cœur du calcul stochastique redécouvert par le japonais Kiyoshi Itô dans les années 60.

---

78 Le formalisateur
93 Codage : avocat, cassis et tueur en série
62 Équations de degré ≥ **5**

6 THÉORÈME DU SCRUTIN

Démocratie Probabilités Éducation civique Lycée

Le théorème du scrutin de Bertrand (*ballot theorem* en anglais) énonce que si durant une élection un · e candidat · e gagne avec un score p (par

∗. L'engouement de certaines personnes pour les mathématiques est tellement fort qu'il a poussé quelqu'un à faire la blague suivante : un avocat, un médecin et un mathématicien discutent des avantages et inconvénients à être marié ou posséder une maîtresse. L'avocat trouve qu'un mariage possède trop d'inconvénients au niveau légal. Au contraire la sérénité et la sécurité d'un mariage pousse le médecin à préférer celui-ci. Le mathématicien quant à lui pense que les deux ont tort. Il faut avoir une femme et une maîtresse : pendant que l'une croit que l'on est chez l'autre, on peut tranquillement faire des mathématiques.

exemple 82% comme Chirac en 2002) contre $q = 1 - p$ (*e.g.* 18%) pour son adversaire alors la probabilité que lors du dépouillement la personne gagnante ait toujours été en tête est $\frac{p-q}{p+q}$. C'est-à-dire qu'en dépouillant les quelques millions de bulletins de vote, il y avait 64% de chance que J. Chirac soit toujours resté en tête pendant le décompte des voix.

Ce qui est remarquable dans ce résultat est que ce nombre ne dépend pas du tout du nombre d'électeurs et électrices ! On pourrait penser justement que plus il y a de bulletins de vote moins cela est probable, mais ce n'est pas le cas !

C'est le mathématicien Joseph Bertrand qui a énoncé ce résultat à la fin du XIX^e siècle, même si l'Anglais William Allen Whitworth l'avait énoncé avant. Désiré André en a fait une jolie démonstration en 1887.

---

52 Collection d'œufs en chocolat
79 Théorème de la dictature et libéralisme
46 Paradoxe électoral

7 PARADOXE DES AMIS

Paradoxe · Théorie des graphes · Grand public

En 1991, donc assez récemment, le sociologue Scott L. Feld remarque qu'une majorité de personnes ont moins d'amis que leurs amis. Faites l'expérience avec des réseaux sociaux comptabilisant un nombre d'amis, comme Facebook par exemple.

Cela peut s'expliquer par le fait qu'il y a toujours une personne possédant beaucoup d'ami · e · s. On a peu de chance d'être cette personne* mais beaucoup de chances d'être son ami · e.

La démonstration de ce résultat est très simple et similaire à celle de la positivité d'une variance.

---

17 Paradoxe de Simpsons
106 Petit monde
89 Faut-il se fier à ce que l'on constate ?

*. Attention, je ne pense pas à travers cette phrase que vous, qui lisez ce livre, ayez des problèmes de sociabilité. C'est simplement le cas, si vous êtes une personne choisie uniformément au hasard.

8 LA MÉDAILLÉE FIELDS

Mathématicienne · Prix · Géométrie · Grand public

La médaille Fields est connue comme l'équivalent du prix Nobel de mathématiques. Cependant, cela n'est vrai que pour la renommée du prix. Voici par exemple quelques différences notables :

— Le Nobel est décerné à une personne tous les ans au contraire du prix mathématique qui en récompense au maximum 4 tous les 4 ans.

— La médaille Fields récompense un mathématicien ou une mathématicienne ayant 40 ans maximum.

— Le prix canadien est beaucoup moins généreux que le suédois autour de 10 000 € pour une Fields contre 1 000 000 € pour un Nobel.

Le prix Abel est plus proche du Nobel [*]. Notez que la France est très bien classée en terme de médailles Fields : en 2020, elle ne comptait qu'une médaille de moins que les États-Unis et était à la deuxième place mondiale (face donc à des pays bien plus peuplés).

Il y a plusieurs anecdotes autour de la médaille Fields.

Parlons par exemple de Maryam Mirzakhani : jusqu'à aujourd'hui, la seule femme récipiendaire de ce prix (le 13 août 2014). Malheureusement, cette dernière est décédée le 14 juillet 2017. Au moment où j'écris ce livre, on peut donc rencontrer de nombreux lauréats du prix alors qu'il est impossible d'en croiser une.

Avec Alex Eskin, Maryam Mirzakhani démontra par exemple le théorème de « la baguette magique » sur les billards mathématiques. Ce dernier aide à répondre à la question : dans une salle dont les murs sont des miroirs, pouvez-vous atteindre tous les points de la salle avec un laser ?

La réponse dépend de la géométrie de la salle et de ses angles. Ce théorème simplifie ce problème et généralise notamment un résultat d'une autre mathématicienne importante : Marina Ratner. Signe du destin, cette dernière décéda 7 jours avant M. Mirzakhani.

---

35 Des camps au champs
96 Prix Nobel de mathématiques
62 Équations de degré ≥ **5**

∗. Pas seulement dans le nom, mais aussi sur les règles d'attribution.