Aref Jeribi

Résolution de divers problèmes elliptiques par des méthodes d'éléments finis

Cours, exercices, et problèmes corrigés

ellipses

Chapitre 1

Les espaces de Hilbert

Nous commençons par introduire ici les notations mathématiques et les résultats de base qui seront utilisées à travers l'ensemble de cet ouvrage.

1.1 Norme

Définition 1.1.1. Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. L'application

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est appelée norme, si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\|x\| = 0 \quad \text{implique} \quad x = 0,$
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \;$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \;$ pour tout $x \in X$, et
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \;$ pour tout $x, \; y \in X$. $\diamondsuit$

Exemple 1.1.2. *Pour $X = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit les normes*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Si X est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur X, alors le couple $(X, \|\cdot\|)$ est appelé espace vectoriel normé. Dans la suite on utilise la notation X est un espace vectoriel normé. Si X est un espace vectoriel normé et $\|\cdot\|$ est une norme sur X, alors X reste un espace métrique, si on définit une distance $\mathrm{dist}(\cdot, \cdot)$ par

$$\mathrm{dist}(x, y) := \|x - y\|,$$

pour tout x, $y \in X$.

Définition 1.1.3. Un espace métrique est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense. $\diamondsuit$

1.2 Produit scalaire

Définition 1.2.1. Soit X un espace vectoriel réel. Un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur X est une application

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longrightarrow & \langle u, v \rangle \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes

(i) symétrie $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tout u, $v \in X$,
(ii) linéarité $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ pour tout u_1, u_2, et $v \in X$,
$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ pour tout u, $v \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
(iii) positivité $\langle u, u \rangle \geq 0$ pour tout $u \in X$,
$\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$. $\diamondsuit$

Définition 1.2.2. Un espace vectoriel réel X muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'appelle espace préhilbertien. Si l'espace X est de dimension finie, alors X est appelé espace euclidien. $\diamondsuit$

Exemple 1.2.3. (i) $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ *muni du produit scalaire*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

est un espace préhilbertien ou espace euclidien.

(ii) *Soit l^2 l'espace défini par*

$$l^2 = \left\{ (x_n)_n \text{ suites réelles telle que } \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}.$$

l^2 muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$$

est un espace préhilbertien.

(iii) *L'espace $C^0([a,b],\mathbb{R})$, des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

est un espace préhilbertien.

(iv) Soit $L^2(]a,b[,\mathbb{R})$ l'espace défini par

$$L^2(]a,b[,\mathbb{R}) = \left\{ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables telle que } \int_a^b f^2(x)dx < \infty \right\}.$$

$L^2(]a,b[,\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{0,]a,b[} = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un espace préhilbertien.

1.3 Propriétés élémentaires

1.3.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 1.3.1. *Soit X un espace préhilbertien. Alors, pour tout u, $v \in X$, nous avons*

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle. \tag{1.3.1}$$

$\diamondsuit$

Preuve. Soient u, $v \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $v = 0$, le résultat (1.3.1) est trivial. Si $v \neq 0$, considérons l'équation du second degré en λ

$$\|v\|^2\lambda^2 + 2\langle u, v \rangle \lambda + \|u\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle \geq 0. \tag{1.3.2}$$

Puisque l'équation du seçond degré (1.3.2) a un signe constant, son discriminant $\Delta' := (\langle u, v \rangle)^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0$. Ceci achève la preuve. C.Q.F.D.

1.3.2 Inégalité triangulaire

Proposition 1.3.2. *Soit X un espace préhilbertien. Alors, pour tout u, $v \in X$, nous avons*

$$\langle u + v, u + v \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}. \qquad \diamondsuit$$

Preuve. Soient u, $v \in X$. Nous avons

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle. \tag{1.3.3}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.3.1), l'équation (1.3.3) donne

$$\begin{aligned} \langle u + v, u + v \rangle &\leq \langle u, u \rangle + 2\langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle v, v \rangle \\ &\leq \left(\langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. C.Q.F.D.

Remarque 1.3.3. *Une conséquence de la Proposition 1.3.2 est que l'application*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longrightarrow & \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \end{array}$$

est une norme sur X. $\diamondsuit$

1.3.3 Identité de parallélogramme

Proposition 1.3.4. *Soit* X *un espace préhilbertien. Alors, pour tout* u, $v \in X$, *nous avons*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \qquad \diamondsuit$$

1.3.4 Identité de polarisation

Proposition 1.3.5. *Soit* X *un espace préhilbertien. Alors, pour tout* u, $v \in X$, *nous avons*

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2. \qquad \diamondsuit$$

1.3.5 Relation de Pythagore

Proposition 1.3.6. *Soit* X *un espace préhilbertien. Alors, pour tout* u, $v \in X$, *tels que* $\langle u, v\rangle = 0$, *nous avons*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \qquad \diamondsuit$$

1.3.6 Formule de Sympson

Proposition 1.3.7. (i) *Si* $g \in P_1$, *alors*

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)\frac{g(b)+g(a)}{2}$$

où P_1 *désigne l'espace des polynômes de degré* ≤ 1, *à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

(ii) *Si* $g \in P_2$, *alors*

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(g(b) + 4g\left(\frac{b+a}{2}\right) + g(a)\right)$$

où P_2 *désigne l'espace des polynômes de degré* ≤ 2, *à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

(iii) *Si deux polynômes* p *et* q *de* P_3 *coincident en deux points et en leurs dérivées, alors ils sont égaux* $p = q$, *où* P_3 *désigne l'espace des polynômes de degré* ≤ 3, *à coefficients dans* $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

1.4 Orthogonalité

1.4.1 Définitions

Définition 1.4.1. On dit que deux vecteurs u et v de X sont orthogonaux si

$$\langle u, v \rangle = 0$$

et on écrit $u \perp v$. $\diamondsuit$

Définition 1.4.2. Une famille $F = \{v_1, \cdots, v_n\}$ d'un espace vectoriel X sur le corps $\mathbb{R}$ est dite libre, et ses vecteurs sont dits linéairement indépendants, lorsque pour tout $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, nous avons $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Une famille qui n'est pas libre est dite liée. $\diamondsuit$

Définition 1.4.3. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthogonale si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux. $\diamondsuit$

Une famille orthogonale constituée de vecteurs non-nuls est une famille libre.

Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est une famille orthogonale, on a la relation de Pythagore

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2.$$

Définition 1.4.4. Soit $u \in X$. On appelle orthogonale de u l'ensemble

$$u^{\perp} = \{v \in X \text{ tel que } \langle u, v \rangle = 0\}.$$ $\diamondsuit$

L'application

$$\begin{aligned} \langle u, \cdot \rangle : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue. Donc $u^{\perp}$ est un sous-espace fermé de X.

Définition 1.4.5. Soit M un sous-espace vectoriel de X. On appelle orthogonale de M l'ensemble

$$M^{\perp} = \{v \in X \text{ tel que } \langle u, v \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in M\}.$$ $\diamondsuit$

Remarque 1.4.6. *Soit M un sous-espace vectoriel de X. Alors,*

(i) $M^{\perp} = \bigcap_{u \in M} u^{\perp}$ *est un sous-espace fermé de X.*

(ii) $M \bigcap M^{\perp} = \{0\}$. $\diamondsuit$

1.4.2 Bases orthonormées

Définition 1.4.7. Un vecteur $x \in X$ est dit unitaire ou normé si $\|x\| = 1$. Une famille $(x_i)_i$ est une famille orthonormale si c'est une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont normés. $\diamondsuit$

On suppose dans cette partie que X est euclidien de dimension n. Une base orthonormée de X est une famille orthogonale $(e_1, \cdots, e_n)$ dont tous les vecteurs sont unitaires. C'est en particulier une base de X. X possède des bases orthonormées. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de X, alors tout $x \in X$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Le réel $\langle x, e_i \rangle$ s'appelle coordonnée de x par rapport à e_i dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

• Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de X, si

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,$$

alors on peut calculer le produit scalaire et la norme par les formules suivantes :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Maintenant, étant donnée une base orthonormale d'un espace euclidien, on a les identités suivantes (à vérifier en exercice, voir [6, 7, 8, 9, 17]) :

Proposition 1.4.8. *Soient X un espace euclidien et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de X. Alors, pour tout x, y de X, nous avons*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

et

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle. \qquad \diamondsuit$$

1.4.3 Projection orthogonale

On suppose dans cette partie que F est un sous-espace de X de dimension finie.

• $F^{\perp}$ est un sous-espace supplémentaire de F appelé supplémentaire orthogonal de F. Si X est lui-même de dimension finie, on a en particulier

$$\dim(F^{\perp}) = \dim(X) - \dim(F).$$

• Soit $x \in X$, qui s'écrit uniquement $x = y + z$ dans la somme directe $F \bigoplus F^{\perp}$. Alors, y s'appelle le projeté orthogonal de x sur F, et est noté $p_F(x)$.

• Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

• Pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in F$, nous avons

$$\|x - f\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

avec égalité si et seulement si $f = p_F(x)$. La quantité

$$\mathrm{dist}(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

s'appelle distance de x à F.

• Puisque la projection, $p_F(x)$, d'un élément x est orthogonale à $x - p_F(x)$ et en utilisant la relation de Pythagore, nous avons

$$\mathrm{dist}(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}.$$

• Notons que la projection, $P_F(x)$, d'un point x sur un sous-espace vectoriel de dimension finie F se calcule facilement à l'aide d'une base orthonormale de F (preuve laissée en exercice) :

Proposition 1.4.9. *Soient X un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie avec $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de F. Alors, pour tout $x \in X$, nous avons*

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i. \qquad \diamondsuit$$

Théorème 1.4.10. *(Inégalité de Bessel). Soit X un espace préhilbertien et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormale. Alors, pour tout $x \in X$,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \qquad \diamondsuit$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La projection de x sur l'espace vectoriel engendré par $e_1, \cdots, e_n$ est égale à $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ et est orthogonale à $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Cette orthogonalité entraîne que :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

est convergente. Ce qui achève la preuve. C.Q.F.D.

1.5 Matrice

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1.5.1 Matrice définie positive

Définition 1.5.1. (i) On dit que la matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive si

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
(ii) On dit qu'elle est définie positive si, de plus,

$$\langle Ax, x \rangle = 0 \text{ implique } x = 0.$$

Ceci implique donc qu'une matrice symétrique est définie positive si et seulement si $\langle Ax, x \rangle > 0$, pour tout $x \neq 0$. $\diamondsuit$

Lemme 1.5.2. *Une matrice A est définie positive si et seulement si $tr(A) > 0$ et $\det A > 0$, avec $tr(A)$ est la trace de la matrice A et $\det A$ est le déterminant de la matrice A.* $\diamondsuit$