Aurélien Barrau, Julien Grain

Relativité générale

3e ÉDITION

DUNOD

Les auteurs remercient le Laboratoire d'excellence ENIGMASS pour son soutien.

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

© Dunod, Paris, 2011, 2016, 2023
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084799-0

TABLE DES MATIÈRES

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

PRÉFACE

La relativité générale n'est pas une théorie parmi d'autres. Elle est notre meilleure description de l'espace et du temps. Elle est la découverte, d'une part de ce que l'un et l'autre sont susceptibles de se distendre et de se distordre en présence de matière mais surtout de ce qu'ils deviennent des grandeurs dynamiques. Des champs parmi d'autres. Ce qu'on pourrait encore exprimer ainsi : la relativité d'Einstein montre que l'espace-temps est le champ gravitationnel.

Ce livre n'a aucune prétention à l'exhaustivité ni à la rigueur. Il est une première introduction à cet univers fascinant, qui se veut accessible et intuitive. Nous y évitons soigneusement les formalismes trop abstraits et les notions trop complexes. Nous proposons néanmoins de découvrir ce que la relativité a changé à notre compréhension du Cosmos et des trous noirs. Nous esquissons même une ébauche de description des modèles spéculatifs de gravitation quantique. Sans oublier les ondes gravitationnelles qui se trouvent au cœur de l'actualité.

Cette nouvelle édition est enrichie d'un chapitre original dévolu à l'inflation cosmologique et à la thermodynamique dans l'Univers primordial.

La découverte de la relativité générale est un moment privilégié dans la vie des jeunes physiciens et physiciennes. Ce livre tente de le rendre aussi exaltant que possible, en minimisant les rencontres indigestes qui, inévitablement, jalonneront le parcours de celles et ceux qui se destinent à la recherche.

Nous sommes aujourd'hui à l'orée d'une catastrophe civilisationnelle sans précédent qui se manifeste, entre autres, par le désastre écologique en cours. Nous pensons que la science peut jouer un rôle essentiel dans ce drame qui trouve son origine dans nos valeurs et nos symboles nécrosés.

Non pas en proposant d'équilibrer les bilans carbones mais en contribuant à réenchanter le monde et à proposer de nouveaux horizons ontologiques. Nous aimerions que ce petit ouvrage soit une très infime et modeste contribution à cet immense chantier.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

LES IDÉES DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1

INTRODUCTION

Ce chapitre entend donner un premier aperçu rapide des idées fondatrices de la relativité générale. Il s'agit, de façon très qualitative, de comprendre rapidement d'où vient le célèbre adage suivant lequel, dans la théorie d'Einstein, « l'espace-temps est courbe » et cette courbure *est* la gravitation. Il s'adresse au lecteur déjà familier des rudiments de relativité restreinte.

1.1 VERS LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La caractéristique la plus frappante du champ gravitationnel est sans doute la suivante : tous les corps, quelles que soient leurs masses et leurs compositions, s'y meuvent de la même manière pour les mêmes conditions initiales. Autrement dit, quand on écrit la loi fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ pour la force gravitationnelle $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, la masse se simplifie et ne subsiste pas dans l'équation du mouvement : $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Ce résultat demeure évidemment valide même si l'on ne considère pas un champ gravitationnel uniforme. Dans le champ de gravité (et seulement dans le champ de gravité), les trajectoires ne dépendent pas des particularités des corps.

Cette propriété fondamentale du champ gravitationnel permet d'établir un parallèle très important entre le mouvement d'un corps dans le champ de gravité et celui d'un corps libre (non soumis à la force gravitationnelle), mais considéré dans un référentiel accéléré. Si, en effet, on rapporte le mouvement de corps – préparés suivant les mêmes conditions initiales dans un référentiel d'inertie – à un référentiel accéléré, ils s'y déplaceront tous de la même façon. Exactement comme dans un champ de gravitation. C'est le cœur du principe d'équivalence : les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont les mêmes qu'en l'absence de champ mais dans un référentiel accéléré et donc non inertiel. De façon remarquable, nous avons ici déjà fait l'essentiel du chemin menant à la relativité générale !

Il est nécessaire de considérer un référentiel *accéléré* car les trajectoires dans un champ de gravitation ne sont, vues d'un référentiel d'inertie, bien évidemment pas uniformes. Le déplacement du référentiel qui permet de générer des trajectoires équivalentes à celles du champ gravitationnel est donc bel et bien accéléré. Considérons, par exemple, la chute d'objets de masses et de compositions différentes, mais soumis

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

aux mêmes conditions initiales, dans une petite pièce où le champ de gravité peut être considéré comme identique en tous points. Ils suivent une trajectoire uniformément accélérée (avec une accélération g) vers le sol. Si maintenant on considère exactement la même situation, à ce détail près que le champ gravitationnel serait absent mais que la pièce et son référentiel associé seraient accélérés vers le haut (avec, en valeur absolue, la même accélération g), on se trouve bien face à des observations strictement identiques. Les deux circonstances ne peuvent être distinguées. Un référentiel uniformément accéléré est équivalent à un champ gravitationnel homogène. Si l'accélération du référentiel n'est pas uniforme, elle peut rendre compte d'un champ non constant temporellement.

Il est important de bien comprendre dès maintenant que cette démarche ne fonctionne qu'avec la gravitation. Imaginons qu'une charge électrique se déplace entre le plafond chargé positivement et le plancher chargé négativement. On peut évidemment, pour cette trajectoire particulière, considérer que tout se passe comme s'il n'y avait pas de champ électromagnétique mais plutôt un certain déplacement du référentiel. C'est toujours possible et cela semble analogue au raisonnement précédent. Mais, dans ce cas, cette démarche n'aurait aucun sens : une autre charge électrique aurait un autre mouvement (même à conditions initiales identiques) et il n'y a donc pas une accélération *unique* du référentiel qui permette de rendre compte de toutes les trajectoires. L'équation du mouvement est $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$ et les caractéristiques (charge q et masse m) de la charge ne se simplifient pas. C'est le caractère universel de la gravitation, le fait qu'elle se couple identiquement avec tous les corps, quelles que soient leurs caractéristiques intrinsèques, qui rend l'équivalence avec un mouvement accéléré du référentiel fructueuse.

Il faut insister sur un point fondamental dont les conséquences sont centrales en relativité générale : les champs auxquels sont équivalents les référentiels non inertiels ne sont pas rigoureusement identiques aux champs gravitationnels usuels dans les référentiels d'inertie. Les champs « réels » (cette expression ne sous-tend ici aucun « réalisme » philosophique supposant que la physique donnerait accès au « réel » en soi, bien au contraire) sont toujours inhomogènes et l'équivalence n'est donc possible que *localement*. L'élimination du champ ne peut se faire que dans une région de l'espace suffisamment petite pour que le champ soit considéré comme constant à la précision requise.

Fondamentalement, la relativité générale consiste à prendre au sérieux cette analogie. Bien qu'il nous soit très familier (mais la familiarité est parfois le signe d'une aveuglante proximité) le concept de « force à distance » est extrêmement complexe et conceptuellement coûteux. Il tire justement sa légitimité de sa capacité à rendre compte aisément d'effets qui dépendent des caractéristiques des corps. Si, dans le cadre gravitationnel, l'universalité du couplagepermettait de s'affranchir du recours à des « forces » et autorisait un retour à une vision plus « géométrique » – une physique platonicienne en quelque sorte – il s'agirait sans aucun doute d'une simplification considérable de la théorie. Tel est l'enjeu de la relativité générale. Quelles que soient les difficultés calculatoires qui peuvent survenir, il est raisonnable de considérer que la théorie d'Einstein est, conceptuellement, beaucoup plus simple que la gravitation newtonienne.

1.2 Conséquences du point de vue relativiste

En explorant les conséquences du principe d'équivalence dans le cadre de la relativité restreinte, il est aisé de comprendre comment ce que Newton voyait comme un champ gravitationnel va devenir, chez Einstein, un effet géométrique. La quantité fondamentale en relativité restreinte est effectivement l'intervalle[1] $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$. Son invariance par changement de référentiel d'inertie est le cœur de la théorie. C'est ce qui traduit mathématiquement toute la structure de la relativité restreinte et permet de voir émerger immédiatement les effets de dilatation du temps ou contraction des longueurs. Suivant une approche historique, on pourrait aisément montrer que l'intervalle est invariant en utilisant les symétries fondamentales de l'espace-temps. Ou, suivant une approche plus moderne, construire la transformation de Lorentz (ce qui sera fait au prochain chapitre) et vérifier qu'elle laisse effectivement l'intervalle invariant. Quelle que soit l'approche, le fait que l'intervalle ne change pas lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre est le point nodal de la relativité restreinte.

Or, précisément, nous venons d'établir que les champs gravitationnels sont équivalents à des référentiels non inertiels. Et si l'on passe à un référentiel non inertiel, l'intervalle n'a plus aucune raison de garder la même forme ! En général, l'intervalle ne s'écrira plus comme une somme des carrés des différentielles des coordonnées. Puisque l'intervalle encode la géométrie (il est en quelque sorte la généralisation du théorème de Pythagore à un espace quadri-dimensionnel pseudo-euclidien[2]), la modification de sa forme signifie une *modification géométrique*. Le cadre conceptuel de la relativité générale est ici planté.

Si l'on considère, par exemple, la transformation des coordonnées lors du passage d'un système inertiel à un système en rotation à vitesse angulaire constante, il est très simple de montrer que l'expression de $\mathrm{d}s^2$ dans le second système ne *peut pas*

1. Nous utilisons ici, comme dans l'essentiel du livre (sauf quand il est utile de procéder autrement), les unités naturelles. C'est-à-dire que la vitesse de la lumière est prise à $c = 1$. Quelle autre unité de vitesse serait en effet plus naturelle que celle de la lumière ?
2. « Pseudo »-euclidien signifie simplement qu'il y a des signes « - » devant les termes $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}y^2$ et $\mathrm{d}z^2$. À ce détail près la structure est bien celle de l'espace euclidien usuel à 4 dimensions (3 dimensions d'espace et 1 dimension de temps).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

se réduire à une somme des différentielles des quatre coordonnées. Dans un système non inertiel, il faut donc écrire l'intervalle sous une forme plus générale :

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \tag{1.1}$$

où $g_{\mu\nu}$ se nomme la *métrique* de l'espace temps. Pour des raisons dimensionnelles, il est bien clair que cette forme quadratique est l'écriture la plus générale possible (pour retrouver l'intervalle de la relativité restreinte dans un référentiel d'inertie, il ne peut pas y avoir de termes du type dx^3 ou $dtdy^2$ par exemple). Les quantités $g_{\mu\nu}$ (qu'on peut à ce stade voir comme des coefficients) déterminent toutes les propriétés géométriques. On comprend dès lors très simplement l'importance cruciale de cette métrique : son caractère non trivial (*i.e.* différent de la valeur particulière, notée $\eta_{\mu\nu}$, qu'elle acquiert dans un espace pseudo-euclidien) est engendré par le passage à un référentiel non inertiel, lui même imposé pour rendre compte de la gravitation dans l'optique du principe d'équivalence. Cela témoigne de l'apparition d'une géométrie elle aussi non triviale où la somme des angles d'un triangle ne vaut plus 180 degrés et où la circonférence d'un cercle ne vaut plus 2π fois son rayon.

Il apparaît ainsi non seulement que la géométrie n'est plus aussi simple que ce dont nous étions coutumiers mais surtout qu'elle devient fondamentalement dynamique. Les corps se déplacent et induisent donc une géométrie sans cesse mouvante. La masse dicte la courbure qui, en retour, dicte les mouvements suivis par les masses. Qu'on ne s'y trompe pas : cette description n'est nullement récursive : elle constitue au contraire l'une des propositions sur le monde les plus cohérentes et les mieux testées dont nous disposons à l'heure actuelle. La trame spatiotemporelle devient malléable et dynamique.

L'enjeu de cet ouvrage – celui de la relativité générale – consiste donc simplement à :

- comprendre comment s'écrit la physique déjà connue (par exemple l'électromagnétisme) dans un espace muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$ arbitraire et généralement différente de la forme $\eta_{\mu\nu}$ de la relativité restreinte ;
- comprendre comment la masse impose un choix particulier de métrique $g_{\mu\nu}$. Ou, plus exactement, quelles sont les équations d'évolution de la métrique compte tenu de la présence de corps.

1.3 Retour sur le principe d'équivalence

La présentation précédente est sans doute la plus immédiatement accessible. Elle permet de « sentir » en quelques minutes les idées fondatrices de la relativité générale et d'introduire l'immense bouleversement conceptuel qu'elles constituent sans, justement, violer aucune des intuitions et connaissances déjà acquises. Il est néanmoins bénéfique de proposer dès maintenant une présentation alternative et complémentaire de la problématique[3] (qui ne diffère évidemment pas de la précédente quant au contenu formel).

Dans la relation fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, le terme m qui intervient est la masse inertielle. Elle n'a rien à voir avec la gravitation. Elle témoigne du fait qu'il est, par exemple, plus difficile de mettre en mouvement un wagon de train de 20 tonnes qu'un modèle réduit de 20 grammes, même si une lubrification parfaite permettait de négliger les frottements. L'inertie est cette tendance des corps, d'autant plus marquée que m est grande, à s'opposer à toute modification de leur état précédent : accélérer ou décélérer un corps demande un effort.

Au contraire, dans la relation $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, le terme m qui intervient est la masse gravitationnelle. Elle n'a rien à voir avec l'inertie. Elle témoigne de l'intensité du couplage entre un champ $\mathbf{g}$ et un objet dont la masse gravitationnelle vaut m, exactement comme la charge électrique q témoigne de l'intensité de la force générée par un champ $\mathbf{E}$ sur un corps chargé. Ici, m doit être vue comme une *charge gravitationnelle*.

Le fait que deux objets de masses différentes chutent de la même façon dans le champ gravitationnel s'interprète dans le cadre newtonien comme une sorte de « miracle » : compte tenu de l'égalité – étrange – entre masse gravitationnelle et masse inertielle, le fait qu'un corps plus massif soit évidemment plus difficile à mettre en mouvement (c'est l'inertie) est exactement compensé par le fait qu'il est aussi plus intensément couplé avec le champ gravitationnel.

Cette « universalité de la chute libre » signifie que si l'on s'intéresse, localement, à un « repère en chute libre » en utilisant des corps et des horloges de référence soumis à la seule gravitation, tous les objets à proximité du repère sembleront n'être pas accélérés par rapport à lui. Un tel repère « efface » donc le champ gravitationnel. Là encore, cette procédure n'est possible que localement.

Puisque tout champ de gravitation est pratiquement constant dans une région suffisamment petite de l'espace-temps, il peut être effacé dans cette région. Or, en l'absence de gravitation, les lois de la physique sont valables dans les systèmes inertiels. Il est donc raisonnable de supposer que les référentiels qui effacent localement la gravitation – les référentiels en chute libre – sont aussi les systèmes inertiels, dans lesquels les lois de la physique locale sont valables. Ce postulat est le principe d'équivalence.

3. Il nous semble important que le lecteur se départisse d'une vision unitaire de la physique comme science purement déductive. Sentir la *diversité* des théories possibles et des manières de penser et de présenter une théorie donnée est aussi fondamental que d'en comprendre les vertèbres mathématiques. Les tensions et divergences (parfois cohérentes) qui se rencontrent au sein même d'un modèle ne devraient pas être escamotées : elles sont le cœur de la *praxis* scientifique.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Le principe d'équivalence permet de formuler toutes les lois (non gravitationnelles) de la physique, en présence d'un champ de gravitation, dans des régions suffisamment petites. Pour disposer d'une description macroscopiquement signifiante des phénomènes, il faut donc relier ces zones possédant des référentiels d'inertie locaux différents. C'est lors de cette opération que les effets de la gravitation sur la matière se révèlent en relativité générale. Afin de relier entre eux les différents référentiels, on peut introduire un système de coordonnées unique, qui n'est évidemment pas partout inertiel, et exprimer les lois de la physique dans ce système.

Soit x^μ les coordonnées dans un référentiel localement inertiel où les lois de la relativité restreinte s'appliquent donc. L'intervalle s'y écrit

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta, \tag{1.2}$$

avec

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Quand on change de référentiel localement inertiel (au voisinage du même point) par une transformation de Lorentz, $\mathrm{d}s^2$ est naturellement invariant (dans sa valeur et dans sa forme). En revanche, les transformations qui conduisent au référentiel non inertiel étendu, de coordonnées x'^μ, sont en général non linéaires. La valeur de l'invariant $\mathrm{d}s^2$ calculée dans le système étendu x'^μ s'écrit, en utilisant (c'est la définition de la différentielle quand on considère les anciennes coordonnées comme des fonctions nouvelles) $\mathrm{d}x^\alpha = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\mathrm{d}x'^\mu$ et $\mathrm{d}x^\beta = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\mathrm{d}x'^\nu$:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu, \tag{1.4}$$

avec

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \tag{1.5}$$

Les coefficients $g_{\mu\nu}$ dépendent du point d'espace-temps : $g_{\mu\nu}(x'^\mu, x'^\nu)$. La métrique n'est plus minkowskienne (elle diffère de $\eta_{\mu\nu}$) : l'espace-temps est devenu riemannien !

Exercices

Dans la totalité de cet ouvrage, il est nécessaire de lire l'énoncé complet de chaque exercice, y compris les remarques finales, avant de commencer à le résoudre.

1.1 Idée centrale de la relativité générale

1. Sur quel principe la construction de la relativité générale est-elle fondée ?
2. Pourquoi ne s'applique-t-il qu'au champ de gravitation ?

1.2 Invariance sous action du groupe de Poincaré

Dans cet exercice, nous nous intéressons à l'invariance, sous l'action du groupe de Poincaré, de l'intervalle en relativité restreinte. Ce groupe correspond à l'ensemble des symétries de la relativité restreinte et nous considérons ici quelques exemples de transformations constituant ce groupe. On munit l'espace-temps d'un repère R avec les vecteurs de base $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ et des coordonnées cartésiennes (t, x, y, z). L'intervalle est $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$.

1. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' dont les axes sont parallèles aux axes de R, et dont l'origine dans R se situe en $(t, x, y, z) = (T, X, Y, Z)$.
2. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' situé en $(0, 0, 0, 0)$ dans R mais dont l'axe $\mathbf{e}_{t'}$ est de sens opposé à $\mathbf{e}_t$. Qu'en est-il pour un repère R' dont l'axe $\mathbf{e}_{x'}$ est de sens opposé à $\mathbf{e}_x$.
3. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' situé en $(0, 0, 0, 0)$ dans R mais dont les axes $(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'})$ sont tournés d'un angle θ par rapport à $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.
4. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' situé en $(0, 0, 0, 0)$ dans R mais dont les axes sont tels que $t' = t\cosh(\psi) + x\sinh(\psi)$ et $x' = t\sinh(\psi) + x\cosh(\psi)$.

Considérons maintenant un système de coordonnées (τ, r, y, z) tel que l'intervalle est donné par $\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}r^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$. (On retrouve l'intervalle relativiste usuel en posant $t = r\sinh(\tau)$ et $x = r\cosh(\tau)$.) Sans entrer dans les détails, le référentiel associé à ce système de coordonnées (dit de Rindler) correspond à un référentiel uniformément accéléré.

5. L'intervalle *dans ce système* de coordonnées est-il toujours invariant sous l'action des transformations précédemment proposées ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

1.3 Un premier pas vers la relativité générale

On appelle ξ^μ les coordonnées dans un référentiel localement inertiel. Les lois de la relativité s'appliquent donc localement :

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\xi^\mu \mathrm{d}\xi^\nu \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2\xi^\mu}{\mathrm{d}s^2} = 0.$$

1. Écrivez ces deux lois pour un changement de coordonnées *non inertiel* $\xi^\mu \to x^{\mu'}$.
2. Si la seconde loi mentionnée ci-dessus s'interprète comme l'équation du mouvement dans un référentiel localement inertiel, commenter quant aux effets d'accélération et de gravitation.

Remarque

On notera que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \sum_{\mu'=0}^{3} \frac{\mathrm{d}x^{\mu'}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}$ ainsi que $\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\mu'}} \times \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial \xi^\mu} = \delta_{\mu'\nu'}$. Pour un changement de coordonnées non inertiel, le lien entre ξ^μ et $x^{\mu'}$ n'est *a priori* pas linéaire.

Corrigés

1.1

1. Le principe d'équivalence est au cœur de la relativité générale. En vertu de celui-ci, les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont identiques au mouvement dans un référentiel accéléré (donc non inertiel).
2. Le mouvement dans un champ de gravitation est identique pour toutes les particules (il ne dépend pas des propriétés comme la masse ou la charge). Pour tout champ gravitationnel, il est possible de définir un référentiel accéléré, *indépendamment* des particules considérées, dans lequel les trajectoires sans gravité sont identiques aux trajectoires avec gravité vues depuis un référentiel inertiel. L'existence « universelle » d'un tel référentiel *indépendant* des particules n'a lieu que pour le cas de la gravitation et ne s'applique à aucune autre forme connue d'interaction.

1.2 En appelant (t', x', y', z') les coordonnées dans R', l'intervalle dans ce référentiel s'écrit $\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2$. On cherchera à savoir si $\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$.

1. Puisque $(t', x', y', z') = (t - T, x - X, y - Y, z - Z)$, on trouve

$$(\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z') = (\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z).$$

   On a bien $\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$. Cette transformation est une translation d'espace-temps.

2. On a cette fois-ci $(t', x', y', z') = (-t, x, y, z)$. Ainsi

$$(\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z') = (-\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

et l'intervalle est identique dans les deux référentiels. De même, nous avons

$$(\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z') = (\mathrm{d}t, -\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

et l'intervalle est identique dans les deux référentiels. La première transformation est le renversement du temps et la seconde le renversement d'une dimension d'espace (liée à la transformation de parité).

3. Sous une rotation d'angle θ, on a

$$\begin{aligned} x' &= x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ y' &= y\cos(\theta) - x\sin(\theta), \end{aligned}$$

tandis que $t' = t$ et $z' = z$. En injectant ces relations dans $\mathrm{d}s'^2$, on trouve $\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$. Cette transformation est un *exemple* de rotation d'espace (une rotation d'angle θ et d'axe $\mathbf{e}_z$).

4. En injectant les expressions de t' et x' dans $\mathrm{d}s'^2$ et en utilisant

$$\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1,$$

on montre de nouveau que $\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$. Cette dernière transformation est une transformation de Lorentz (aussi appelée *boost*) écrite en fonction de la *rapidité* ψ. Il est intéressant de noter qu'avec une telle écriture, une transformation de Lorentz prend l'apparence d'une « rotation hyperbolique » entre une dimension d'espace et la dimension de temps.

5. En appliquant le même jeu de transformations que précédemment, on pourra vérifier que l'intervalle est invariant par translation, renversement du temps et renversement d'une dimension d'espace. Cependant, l'intervalle n'est pas invariant sous l'action d'une rotation dans les plans (r, y) et (r, z) (bien qu'il soit invariant sous l'action d'une rotation dans le plan (y, z)). En effet, si $r' = r\cos(\theta) + y\sin(\theta)$ et $y' = y\cos(\theta) - r\sin(\theta)$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s'^2 &= r'^2\mathrm{d}\tau'^2 - \mathrm{d}r'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 \\ &= [r\cos(\theta) + y\sin(\theta)]^2\,\mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}r^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \\ \mathrm{d}s'^2 &\neq \mathrm{d}s^2. \end{aligned}$$

De même, l'intervalle n'est pas invariant sous l'action d'une transformation de Lorentz. Par exemple pour une transformation de Lorentz dans le plan (τ, r),

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

$\tau' = \tau\cosh(\psi) + r\sinh(\psi)$ et $r' = r\cosh(\psi) + \tau'\sinh(\psi)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s'^2 &= r'^2\mathrm{d}\tau'^2 - \mathrm{d}r'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 \\
&= \left[(\tau\cosh(\psi) + r\sinh(\psi))^2\cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi)\right]\mathrm{d}\tau^2 \\
&\quad - \left[\cosh^2(\psi) - (\tau\cosh(\psi) + r\sinh(\psi))^2\sinh^2(\psi)\right]\mathrm{d}r^2 \\
&\quad -\mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + \left[(\tau\cosh(\psi) + r\sinh(\psi))^2 - 1\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Clairement $\mathrm{d}s'^2 \neq \mathrm{d}s^2$. On pourra vérifier que l'on a aussi $\mathrm{d}s'^2 \neq \mathrm{d}s^2$ pour des transformations de Lorentz dans les plans (τ, y) et (τ, z). Ces résultats ne sont pas étonnants car le référentiel considéré est accéléré.

1.3

1. On utilise le fait que pour un changement de coordonnées $\mathrm{d}\xi^\mu = \sum_{\mu'=0}^{3} \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^{\mu'}}\mathrm{d}x^{\mu'}$. On trouve alors pour la première loi :

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu'=0}^{3}\sum_{\nu'=0}^{3}\left(\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^{\nu'}}\right)\mathrm{d}x^{\mu'}\mathrm{d}x^{\nu'}.$$

Pour la seconde loi, on utilise $\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s} = \sum_{\mu'=0}^{3}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu'}}{\mathrm{d}s}$:

$$\sum_{\mu'=0}^{3}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu'}}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{\mu'=0}^{3}\sum_{\nu'=0}^{3}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\left(\frac{\mathrm{d}x^{\mu'}}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{dx^{\nu'}}{ds}\right) = 0.$$

En multipliant par $\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial\xi^\mu}$, on trouve finalement

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\lambda'}}{\mathrm{d}s^2} = -\sum_{\mu'=0}^{3}\sum_{\nu'=0}^{3}\left(\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^{\mu'}}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^{\nu'}}{\mathrm{d}s}\right).$$

Le membre de droite ne s'annule pas car le lien entre ξ^μ (localement inertiel) et $x^{\mu'}$ (non inertiel) est en général non linéaire (i.e. $\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} \neq 0$).

2. On voit que l'équation du mouvement dans un référentiel non-inertiel possède un terme de « force ». Dans le cas particulier d'un référentiel accéléré, ce terme correspond aux forces d'inertie. Puisque les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont identiques au mouvement dans un référentiel accéléré (non inertiel), ce terme supplémentaire peut donc s'interpréter comme l'action de la gravitation sur le mouvement.

RELATIVITÉ RESTREINTE 2

INTRODUCTION

Ce chapitre n'est pas une introduction *ex nihilo* à la relativité restreinte. Le lecteur est supposé déjà familier avec les notions élémentaires de la théorie. Nous insistons plutôt sur les éléments spécifiques permettant la construction du modèle et ses conséquences les plus frappantes. Par-delà ses prédictions sur la structure de l'espace-temps, la relativité restreinte a ouvert la porte à une nouvelle manière de penser la physique en érigeant les symétries en principes.

2.1 CONSTRUCTION DE LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

La théorie de la relativité restreinte constitue sans aucun doute l'une des révolutions épistémologiques les plus importantes de la science du XXe siècle. Non seulement par ce qu'elle propose sur le monde mais aussi, et surtout, par ce qu'elle a changé dans la structure de la science elle-même. Pour la première fois dans l'histoire, une théorie allait se fonder sur une *symétrie* en tant que principe organisateur. Techniquement, on pourrait considérer que la relativité restreinte est de peu de conséquences puisqu'elle se traduit simplement par le passage d'un groupe de symétrie d'espace-temps à 10 paramètres (celui de Galilée) à un autre groupe de symétrie d'espace-temps à 10 paramètres (celui de Lorentz). Pourtant, pour la première fois, un principe de symétrie fut érigé au rang d'hypothèse fondatrice pour élaborer une théorie scientifique. C'est cette démarche qui s'est révélée extraordinairement fructueuse dans le développement des théories de jauge qui ont permis de colossales avancées en physique des particules élémentaires. Une théorie de jauge est une théorie fondée sur une symétrie. En théorie des champs, on réfère sous ce nom à un modèle où le Lagrangien[1] est invariant sous l'action d'un groupe de symétrie locale.

Comme tout modèle, la relativité restreinte repose sur un certain nombre d'hypothèses constitutives. Outre les suppositions usuelles de la physique classique, à commencer par l'existence d'un espace tridimensionnel et d'un temps unidimensionnel formant le cadre dans lequel les phénomènes peuvent être décrits, elle se distingue donc par des considérations de symétrie spécifiques.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

1. Le Lagrangien d'un système est une fonction qui résume sa dynamique.

a) Homogénéité du temps

Les lois physiques sont invariantes par translation temporelle. Il ne s'agit pas ici de nier l'« écoulement du temps » (encore que cette formulation soit sujette à caution, nous y reviendrons) et l'évolution des phénomènes, mais simplement de noter la constance des lois qui les régissent. Quand Isaac Newton, par exemple, publie les *Principia Mathematica*, il ne spécifie pas que les propositions exposées ne sont valables qu'en l'an 1687 : bien au contraire, elles sont implicitement supposées justes depuis le passé le plus reculé jusqu'au futur le plus lointain. Les solutions des lois dépendent du temps mais *pas* les lois elles-mêmes.

b) Homogénéité de l'espace

Les lois physiques sont invariantes par translation spatiale. Là encore, il ne saurait être question de contester les irrégularités du contenu de l'espace, mais simplement de souligner la constance des lois par rapport à un déplacement dans l'espace. Newton, pour reprendre le même exemple, ne spécifie pas non plus que les *Principia* ne sont valables qu'à Cambridge : bien au contraire, les propositions sont implicitement supposées justes partout sur Terre et au-delà. Les solutions des lois dépendent de la position mais *pas* les lois elles-mêmes.

c) Isotropie de l'espace

Les lois physiques sont invariantes par rotation spatiale du référentiel d'origine. Il n'existe pas de direction privilégiée dans l'espace.

En résumé, l'énoncé d'une *loi* ne suppose ni l'énoncé du lieu ni celui du temps auquel elle est supposée valide. Cette propriété peut être considérée comme définitoire d'une loi. Elle est une sorte de condition de possibilité à l'intelligibilité physico-mathématique du réel (ou, plus exactement, d'une manière de composer le réel).

À ces symétries fondamentales, s'ajoutent les hypothèses suivantes :

- Le principe de relativité. Aucun système de référence n'est privilégié. Les grandeurs physiques ont une signification intrinsèque (sans qu'aucun contenu ontologique ne soit associé à cette idée) qui dépasse la manière de les décrire. Il existe des référentiels équivalents (au sens mathématique d'une relation d'équivalence) dans lesquels les lois physiques ont la même forme. On les nomme référentiels d'inertie et le mouvement libre des corps (c'est-à-dire soumis à aucune force) s'y effectue à vitesse vectoriellement constante.
- Le principe de causalité. Implicitement, toute la physique suppose que la cause précède la conséquence et cette propriété doit être conservée en relativité restreinte. Si un phénomène est antérieur à un autre dans un système de référence, il doit également l'être dans tous les autres. Cette propriété est à rapprocher de l'inégalité

de traitement entre l'espace et le temps dans les symétries fondamentales : le temps n'est pas isotrope.

Bien que cela ait joué un rôle historique important, il est fondamental de souligner que l'adjonction d'une hypothèse supplémentaire concernant l'existence d'une vitesse limite (définie par rapport à la lumière mais étrangement liée à toutes les forces) n'est pas nécessaire. Au contraire, cette vitesse (et son invariance par changement de référentiel d'inertie) apparaît comme une conséquence des hypothèses précédentes et peut être rigoureusement démontrée. Ce résultat central est l'objet des calculs qui suivent.

On considère deux référentiels R et R' en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre suivant l'axe des x et on cherche la relation entre les coordonnées (x, t) dans le premier et les coordonnées (x', t') dans le second. Il est important de noter dès à présent que l'enjeu de cette démarche est bien plus profond qu'un simple exercice formel de cinématique. La forme de la transformation résultante, dite de Lorentz, fixe la structure d'objets fondamentaux en relativité restreinte : les tenseurs.

2.1.1 Symétries

On pose

$$x' = f(x, t; p) \text{ et } t' = g(x, t; p), \tag{2.1}$$

où p est un paramètre qui distingue le référentiel R' du référentiel R (ce qu'il représente exactement dépend de la situation considérée) et f et g sont des fonctions inconnues. En différentiant la relation (2.1) on obtient :

$$\mathrm{d}x' = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t \text{ et } \mathrm{d}t' = \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

L'hypothèse d'homogénéité de l'espace-temps impose que ces lois de transformation ne dépendent pas de la position spatio-temporelle, autrement dit que les dérivées partielles sont indépendantes des coordonnées. Il s'ensuit que f et g dépendent linéairement de x et t. On peut donc écrire :

$$x' = f_1(p)x + f_2(p)t \text{ et } t' = f_3(p)t + f_4(p)x, \tag{2.3}$$

où les fonctions f_i sont à déterminer. L'origine O' de R' (*i.e.* $x' = 0$) se déplaçant à la vitesse V par rapport à R, l'équation (2.3) conduit à $x = -f_2(p)t/f_1(p)$. Avec $V = x/t$, on obtient $V = -f_2(p)/f_1(p)$. Il s'agit donc d'une fonction de p qui peut être, tout aussi bien que p, utilisée pour caractériser les référentiels. C'est évident puisque seule la vitesse relative distingue R de R'. On réécrit alors l'équation (2.3) en fonction de V :

$$x' = f_1(p)\left(x + \frac{f_2(p)}{f_1(p)}t\right) \text{ et } t' = f_1(p)\left(\frac{f_3(p)}{f_1(p)}t + \frac{f_4(p)}{f_1(p)}x\right), \tag{2.4}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

soit

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \text{ et } t' = \gamma(V)(g_1(V)t - g_2(V)x), \tag{2.5}$$

avec $\gamma(V) \equiv f_1(p)$, $g_1(V) \equiv f_3(p)/f_1(p)$ et $g_2(V) \equiv -f_4(p)/f_1(p)$. Trois fonctions inconnues doivent être déterminées : $\gamma(V)$, $g_1(V)$ et $g_2(V)$.

L'hypothèse d'isotropie de l'espace impose que l'orientation des axes des référentiels n'intervient pas. Conséquemment, la transformation représentant le passage de R à R' doit présenter la même forme que celle représentant le passage de $r(R)$ à $r(R')$ où l'opérateur r correspond à une réflexion, c'est-à-dire à un changement de x en $-x$ et de x' en $-x'$. Dans cette opération, le sens des axes change, la vitesse de $r(R')$ par rapport à $r(R)$ vaut donc $-V$. Ce qui conduit à :

$$-x' = \gamma(-V)(-x + Vt) \text{ et } t' = \gamma(-V)(g_1(-V)t + g_2(-V)x). \tag{2.6}$$

En comparant l'équation (2.6) avec (2.5), on obtient :

$$\gamma(V) = \gamma(-V) \;;\; g_1(V) = g_1(-V) \text{ et } g_2(V) = -g_2(-V). \tag{2.7}$$

2.1.2 Structure de groupe

L'équivalence entre référentiels galiléens se traduit mathématiquement par la structure de groupe des transformations recherchées. La loi de composition est effectivement une loi de composition *interne* puisque le passage d'un référentiel R à un référentiel R', puis de R' à R'' est équivalent à un passage de R à R'', lui-même représenté par un élément de l'ensemble des transformations. Tout référentiel étant équivalent à lui-même, il existe un élément neutre trivial. L'associativité est assurée par le simple fait qu'il s'agit d'un ensemble de transformations et non pas d'éléments arbitraires (c'est l'argument déjà donné pour montrer que la loi est interne). Enfin, si l'on considère la transformation de R à R', la transformation de R' à R permet de revenir au référentiel initiale. Il existe donc bien un inverse. L'ensemble des transformations de Lorentz doit donc posséder une structure de groupe qui traduit fondamentalement le principe de relativité.

La transformation de R à R' doit avoir la même forme que la transformation de R' à R en changeant V en $-V$. Ce qui conduit, en reportant cela dans (2.5), à :

$$x = \gamma(-V)(x' + Vt') \text{ et } t = \gamma(-V)(g_1(-V)t' - g_2(-V)x'), \tag{2.8}$$

soit, en utilisant l'écriture (2.7) :

$$x = \gamma(V)(x' + Vt') \text{ et } t = \gamma(V)(g_1(V)t' + g_2(V)x'). \tag{2.9}$$