Martin Aigner - Günter M. Ziegler
Traduction : Nicolas Puech

Raisonnements divins

Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes

Troisième édition

Lavoisier
Hermes

Martin Aigner
Günter M. Ziegler

Raisonnements divins

Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes

Traduit de l'anglais par Nicolas Puech

Illustrations de Karl H. Hofmann

Troisième édition

Lavoisier
Hermes

editions.lavoisier.fr

Martin Aigner

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik II
Arnimallee 3
14195 Berlin, Germany
aigner@math.fu-berlin.de

Günter M. Ziegler

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Arnimallee 2
14195 Berlin, Germany
ziegler@math.fu-berlin.de

Traduction de la quatrième édition anglaise de :
Proofs from THE BOOK by Martin Aigner, Günter M. Ziegler
ISBN : 978-3-642-00855-9

ISBN : 978-2-7462-4798-7

Traduction de la première édition par Nicolas Puech et Jean-Marie Morvan
Traduction des deuxième, troisième et quatrième éditions par Nicolas Puech
Mise en page des première, deuxième et troisième éditions françaises par Nicolas Puech

Couverture : Jean-François Montmarché

Préface

Paul Erdős aimait parler du Grand Livre, dans lequel Dieu inscrit les preuves parfaites des théorèmes mathématiques, suivant ainsi la remarque de Hardy : il n'y a pas de lieu permanent pour les mathématiques laides. Erdős disait aussi que l'on n'a pas besoin de croire en Dieu, mais qu'en tant que mathématicien, on doit croire au Grand Livre. Il y a quelques années, nous lui avions suggéré d'écrire une première (et très modeste) ébauche du Grand Livre. L'idée l'enthousiasma et, comme à son habitude, il se mit immédiatement au travail, remplissant des pages et des pages de suggestions. Notre livre devait paraître en mars 1998 comme cadeau pour le 85^{e} anniversaire d'Erdős. Malheureusement, la mort de Paul durant l'été 1996 n'a pas permis qu'il en soit l'un des co-auteurs. Ce livre est dédié à sa mémoire.

Paul Erdős

Nous n'avons pas de définition ni de caractérisation de ce qui constitue une preuve du Grand Livre : nous ne faisons qu'offrir les exemples que nous avons sélectionnés, en espérant que nos lecteurs partageront notre enthousiasme pour des idées brillantes, des points de vue ingénieux et de magnifiques observations. Nous espérons aussi que nos lecteurs ne nous tiendront pas rigueur des imperfections de notre exposé. La sélection est essentiellement due à Paul Erdős lui-même. Il a suggéré un grand nombre de sujets, plusieurs preuves lui reviennent directement, d'autres ont été amorcées par la bonne question ou la bonne conjecture qu'il a su proposer. On peut donc considérer que, dans une grande mesure, cet ouvrage reflète le point de vue de Paul Erdős à propos de ce qui devrait être considéré comme une preuve du Grand Livre.

« Le Grand Livre ».

Nous avons limité notre sélection de sujets de sorte que le livre tout entier soit accessible aux lecteurs dont les connaissances mathématiques se restreignent à un premier cycle universitaire. Un peu d'algèbre linéaire, quelques notions fondamentales d'analyse et de théorie des nombres, et une bonne maîtrise des concepts élémentaire de mathématiques discrètes devraient suffire pour comprendre ce livre dans son intégralité et en tirer profit.

Nous sommes extrêmement reconnaissants envers certaines personnes qui nous ont aidés et soutenus dans ce projet ; on compte notamment parmi elles les étudiants d'un séminaire pendant lequel nous avons discuté d'une version préliminaire de l'ouvrage. Merci à Benno Artmann, Stephan Brandt, Stefan Felsner, Eli Goodman, Torsten Heldmann et Hans Mielke. Nous remercions également Margrit Barrett, Christian Bressler, Ewgenij Gawrilow, Michael Joswig, Elke Pose et Jörg Rambau pour leur aide technique dans la composition de ce livre. Nous devons beaucoup à Tom Trotter qui a lu le manuscrit de la première à la dernière page, à Karl H. Hofmann pour ses magnifiques illustrations, et surtout au grand Paul Erdős.

Berlin, Mars 1998 *Martin Aigner · Günter M. Ziegler*

Préface de la deuxième édition

La première édition de ce livre a été très bien accueillie. Nous avons reçu un nombre inhabituel de lettres contenant des commentaires et des corrections, quelques raccourcis, d'intéressantes suggestions de preuves différentes et de nouveaux sujets à traiter. Bien que nous essayions de répertorier des preuves *parfaites*, notre exposé ne l'est pas.

La seconde édition nous donne l'occasion de présenter une nouvelle version de notre livre : il contient trois chapitres supplémentaires, des modifications substantielles, de nouvelles preuves, ainsi que des améliorations mineures suggérées par nos lecteurs. Le chapitre consacré au « problème des treize sphères » a été supprimé. La démonstration reposait sur des détails que nous ne pouvions pas rédiger de manière succincte et élégante.

Merci à tous les lecteurs qui nous ont écrit et aidés ; parmi eux, Stephan Brandt, Christian Elsholtz, Jürgen Elstroth, Daniel Grieser, Roger Heath-Brown, Lee L. Keener, Christian Lebœuf, Hanfried Lenz, Nicolas Puech, John Scholes, Bernulf Weißbach et *beaucoup* d'autres. Merci encore pour leur aide et leur soutien à Ruth Allewelt et Karl-Friedrich Koch de Springer Heidelberg, à Christoph Eyrich et Torsten Heldmann de Berlin, et à Karl H. Hofmann pour les nouvelles superbes illustrations.

Berlin, Septembre 2000 *Martin Aigner · Günter M. Ziegler*

Préface de la troisième édition

Lors de la préparation de la première édition, nous n'aurions jamais osé rêver d'un tel succès : le livre a été traduit dans plusieurs langues et nous avons reçu de nombreux courriers de lecteurs enthousiastes avec des suggestions d'améliorations et des propositions pour développer de nouveaux thèmes si nombreuses qu'elles pourraient nous occuper pendant plusieurs années.

Ainsi, cette troisième édition comporte deux nouveaux chapitres (sur les partitions d'entiers d'Euler et sur les manières de mélanger un jeu de cartes), le regroupement de trois démonstrations pour le calcul de la série d'Euler au sein d'un chapitre à part entière. Il présente aussi de nombreuses améliorations comme le procédé de Calkin-Wilf-Newman pour « énumérer les rationnels ».

Nous remercions tous ceux qui ont soutenu ce projet pendant les cinq dernières années et dont les indications ont permis les améliorations que l'on trouve dans cette nouvelle édition. Plus particulièrement, merci à David Bevan, Anders Björner, Dietrich Braess, John Cosgrave, Hubert Kalf, Günter Pickert, Alistair Sinclair et Herb Wilf.

Berlin, Juin 2003 *Martin Aigner · Günter M. Ziegler*

Préface de la quatrième édition

Lorsque nous avons entrepris ce projet il y a près de quinze ans, nous n'avions pas imaginé l'accueil enthousiaste qu'il a reçu et qui s'est traduit par de nombreux courriers chaleureux, des commentaires intéressants, de nouvelles éditions et des traductions en treize langues différentes. Il n'est pas exagéré de dire que ce livre est devenu une partie de nos vies.

Outre de nombreuses améliorations, en partie suggérées par nos lecteurs, cette quatrième édition comporte cinq nouveaux chapitres. Deux thèmes classiques sont abordés : la loi de réciprocité quadratique et le théorème fondamental de l'algèbre ; deux chapitres traitent des pavages ; enfin un chapitre s'intéresse au nombre chromatique des graphes de Kneser.

Nous remercions tous ceux qui nous ont aidés et encouragés tout au long de ces années. Pour la deuxième édition, nous sommes reconnaissants à Stephan Brandt, Christian Elsholtz, Jürgen Elstrodt, Daniel Grieser, Roger Heath-Brown, Lee L. Keener, Christian Lebœuf, Hanfried Lenz, Nicolas Puech, John Scholes, Bernulf Weißbach, et de nombreux autres encore. La troisième édition bénéficia des suggestions de David Bevan, Anders Björner, Dietrich Braess, John Cosgrave, Hubert Kalf, Günter Pickert, Alistair Sinclair, and Herb Wilf. Pour la présente édition, nous sommes particulièrement reconnaissants pour les contributions de France Dacar, Oliver Deiser, Anton Dochtermann, Michael Harbeck, Stefan Hougardy, Hendrik W. Lenstra, Günter Rote, Moritz Schmitt, and Carsten Schultz. Nous remercions aussi Ruth Allewelt de Springer à Heidelberg ainsi que Christoph Eyrich, Torsten Heldmann et Elke Pose de Berlin pour leur aide et leur soutien tout au long de ce projet. Enfin, cet ouvrage n'aurait certainement pas la même allure sans les conseils prodigués par Karl-Friedrich Koch pour la mise en page et sans les superbes illustrations réalisées pour chaque édition par Karl H. Hofmann.

Berlin, Juillet 2009 *Martin Aigner · Günter M. Ziegler*

Préface de la troisième édition française

Compte tenu du succès rencontré par l'ouvrage anglais, et afin de le mettre à la portée de tous, nous avons souhaité qu'il soit traduit en français. Nous sommes heureux qu'une nouvelle édition rende accessible au lectorat français les améliorations de la plus récente édition anglaise.

Cette édition française correspond à la quatrième édition anglaise (et corrige même certaines coquilles ou erreurs subsistant dans celle-ci). Ces modifications font de cet ouvrage la version la plus à jour de ce texte à la date de publication.

Nous sommes très reconnaissants aux traducteurs [1] pour le travail qu'ils ont effectué. Nous souhaitons remercier particulièrement Nicolas Puech pour ses suggestions, pour la rigueur qu'il a apportée à la traduction de certains passages et pour le considérable travail de mise en page accompli afin que puisse être réalisé l'ouvrage français dans sa forme actuelle.

Berlin, Juin 2012 *Martin Aigner · Günter M. Ziegler*

1. Nicolas Puech remercie Laurent Decreusefond, Oivier Hudry, Mohamed Koubàa, Christian Lebœuf, Antoine Lobstein, Philippe Martins, Alain Maruani, Bruno Petazzoni, Hugues Randriambololona et Günter Ziegler pour leur aide dans la mise au point des éditions successives de cet ouvrage.

Sommaire

Théorie des nombres — **1**

1. Six preuves de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers 3
2. Le postulat de Bertrand 7
3. Les coefficients binomiaux ne sont (presque) jamais des puissances 15
4. Représentation des nombres comme somme de deux carrés 19
5. La loi de réciprocité quadratique 27
6. Tout corps fini est commutatif 35
7. Quelques nombres irrationnels 41
8. Trois méthodes pour calculer $\pi^2/6$ 49

Géométrie — **59**

9. Le troisième problème de Hilbert : la décomposition des polyèdres 61
10. Droites du plan et décompositions de graphes 71
11. Le problème des pentes 77
12. Trois applications de la formule d'Euler 83
13. Le théorème de rigidité de Cauchy 91
14. Simplexes contigus 95
15. Tout grand ensemble de points a un angle obtus 101
16. La conjecture de Borsuk 109

Analyse — **117**

17. Ensembles, fonctions et hypothèse du continu 119
18. À la gloire des inégalités 137
19. Le théorème fondamental de l'algèbre 145
20. Un carré et un nombre impair de triangles 149
21. Un théorème de Pólya sur les polynômes 159
22. Sur un lemme de Littlewood et Offord 167
23. La fonction cotangente et l'astuce de Herglotz 171
24. Le problème de l'aiguille de Buffon 177

Combinatoire 181

25. Le principe des tiroirs et le double décompte ... 183
26. Pavages de rectangles ... 195
27. Trois théorèmes célèbres sur les ensembles finis ... 201
28. Mélanger un jeu de cartes ... 207
29. Chemins dans les treillis et déterminants ... 219
30. La formule de Cayley pour le nombre d'arbres ... 225
31. Identités et bijections ... 233
32. Comment compléter un carré latin ... 239

Théorie des graphes 247

33. Le problème de Dinitz ... 249
34. Cinq-coloration des graphes planaires ... 257
35. Comment surveiller un musée ... 261
36. Le théorème de Turán ... 265
37. Communiquer sans erreur ... 271
38. Le nombre chromatique des graphes de Kneser ... 281
39. Amis et politiciens ... 287
40. Les probabilités facilitent (parfois) le dénombrement ... 291

À propos des illustrations 302

Index 304

Martin Aigner - Günter M. Ziegler

Traduction : Nicolas Puech

Raisonnements divins

Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes

Troisième édition

Cet ouvrage regroupe quelques démonstrations mathématiques choisies pour leur élégance. Il expose des idées brillantes, des rapprochements inattendus et des observations remarquables qui apportent un éclairage nouveau sur des problèmes fondamentaux.

Selon le mathématicien Paul Erdös, qui a lui-même suggéré plusieurs des thèmes présentés, les preuves développées ici mériteraient d'être retenues pour figurer dans le Livre où Dieu aurait répertorié les démonstrations parfaites.

Le livre aborde différents domaines (théorie des nombres, géométrie, analyse, combinatoire et théorie des graphes). Il évoque aussi bien des résultats établis depuis longtemps que des théorèmes récemment démontrés. Dans tous les cas, leur compréhension ne fait appel qu'à des connaissances mathématiques de niveau premier cycle.

Cette troisième édition française propose une traduction de la quatrième édition anglaise revue et augmentée. Elle comporte cinq nouveaux chapitres, de nombreuses améliorations et corrections. L'ouvrage séduira tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques.

editions.lavoisier.fr

978-2-7462-4798-7