Introduction à la modélisation mathématique en biologie

Tamara Servi
Maîtresse de conférences à Université Paris Cité

Pierre Poulain
Maître de conférences à Université Paris Cité

DUNOD

Illustration de couverture : LenaProkopenko/shutterstock.com

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083482-2

Table des matières

Introduction

Un modèle mathématique fournit une représentation simplifiée de la réalité. Modéliser un phénomène c'est donc le simplifier volontairement pour mieux comprendre certaines de ses propriétés. Un modèle est par définition toujours approximatif et n'est utile que dans un domaine d'application limité. En plus d'être un outil descriptif, un modèle mathématique peut être parfois utilisé aussi comme outil prédictif, pour comprendre à quel type d'évolution du phénomène on peut s'attendre. Le scientifique (et le biologiste en particulier) se sert du formalisme mathématique, qui est rigoureux et puissant, tout en gardant un regard critique et en quantifiant à chaque étape la pertinence des hypothèses de travail qu'il a fait. Il s'agit d'une démarche complexe du point de vue conceptuel, qui demande une certaine maturité intellectuelle bien plus qu'une maîtrise des outils techniques.

Ce livre s'adresse à des étudiants des premières années d'un cursus universitaire en sciences appliquées (notamment en sciences du vivant et sciences de la Terre). Notre expérience d'enseignants en première année de licence Sciences du vivant à Université Paris Cité nous a montré que beaucoup d'étudiants rencontrent des difficultés lors des deux premières années de licence à cause d'une mauvaise compréhension des bases du raisonnement scientifique et de l'utilisation du langage et des outils mathématiques en sciences appliquées. Autrement dit, le problème n'est pas seulement, ou pas tellement, le manque de maîtrise des mathématiques élémentaires abordées au lycée, mais plutôt de ne pas avoir perçu le rôle du raisonnement logique dans la formulation d'un problème scientifique, tous domaines confondus.

Ce livre se base sur un cours d'introduction au raisonnement et à la modélisation mathématique, que nous avons conçu, enseigné, et fait évoluer pendant cinq ans en première année de licence Sciences du vivant à Université Paris Cité.

En raison du public auquel il s'adresse (notamment un public peu à l'aise avec certaines manipulations algébriques élémentaires, voire avec des blocages vis-à-vis des mathématiques), tous les exercices et les exemples contenus dans le livre demandent relativement peu d'effort calculatoire. Le but n'est pas celui de développer la performance en calcul des étudiants, qui, en futurs scientifiques, pourront bénéficier d'ordinateurs aussi puissants que nécessaire, mais celui de comprendre le concept de modèle mathématique : formuler un modèle, évaluer sa pertinence, comparer les prédictions du modèle avec les résultats expérimentaux, interpoler des données afin de faire des prédictions à long terme, évaluer la précision des mesures dans une expérience. La pandémie de Covid-19 a montré l'importance de la compréhension des modèles mathématiques, afin d'interpréter correctement les données collectées et d'évaluer la fiabilité des prévisions à court et moyen terme. Nous pensons que tous les étudiants en science appliquée devraient bénéficier d'une formation au raisonnement mathématique dès le début de leurs études universitaires.

Afin de souligner l'intérêt que nous portons sur le raisonnement plutôt que sur l'aspect calculatoire, dans les exercices proposés, tous les calculs sont faisables à la main, sans avoir recours à une calculatrice (dans notre cours nous avions en effet interdit leur usage). Cette démarche encourage les étudiants à reprendre contact avec les bases des mathématiques, sans passer par un intermédiaire (calculatrice, ordinateur), souvent perçu à tort comme un « oracle » capable de poser correctement les termes de la question à la place du scientifique.

Puisque les outils mathématiques introduits dans cet ouvrage sont relativement basiques, et compte tenu des contraintes imposées par les calculs sans calculatrice, les exemples et les exercices proposent des modèles souvent très simplistes, voire imaginés de toute pièce pour le besoin de cet ouvrage. Le but n'est pas ici de représenter toute la complexité de la modélisation en biologie, mais de décortiquer chaque étape de la construction d'un modèle théorique et d'en comprendre la finalité et les limites. Nous considérons en effet que le lecteur est en capacité de faire l'effort d'abstraction nécessaire pour comprendre le mécanisme de raisonnement illustré dans un exercice donné. Il sera ainsi capable de réproduire cette démarche dans des situations différentes, plus complexes et plus proches d'une réalité expérimentale. Notre expérience d'enseignants nous a clairement montré que les étudiants des premières années de cursus universitaires en sciences appliquées ne sont pas, comme on pourrait le croire, totalement refractaires à l'abstraction, au contraire. Ils sont cependant souvent désemparés face à l'accumulation de difficultés techniques et théoriques dans un même problème. Pour franchir ces difficultés, nous pensons qu'il est nécessaire de procéder progressivement, en introduisant les concepts et les outils un par un, et en donnant le temps d'assimiler une étape avant de passer à la suivante. C'est ainsi que nous progressons dans cet ouvrage : on ne procède pas de façon linéaire, en introduisant la totalité d'un thème avant de passer au thème suivant, mais plutôt par approfondissements successifs. On revient souvent sur un thème introduit précédemment, avec des nouveaux outils plus sophistiqués et un regard plus mûr. Par exemple, on introduira d'abord des modèles théoriques auxquels on demandera d'être cohérents avec la totalité des données expérimentales (ce qui est peu réaliste), pour ensuite accepter que les modèles soient cohérents avec les données <u>à une certaine erreur près</u> (ce qui est plus proche de la démarche sur le terrain).

Au vue de la démarche exposée ci-dessus, chaque chapitre de cet ouvrage est pensé comme un cours :

- On commence avec des rappels théoriques des outils mathématiques qui seront utilisés. Il s'agit d'outils dont la plupart a été abordée au lycée et pour lesquels il existe de nombreux ouvrages de référence. Nous rappelons donc les définitions et les théorèmes fondamentaux, sans en fournir la preuve et sans approfondir le contenu purement mathématique.
- On introduit ensuite des exemples d'application de ces outils, en faisant le lien entre le langage abstrait et des situations réelles. On construit ainsi un modèle mathématique pour un phénomène empirique.

- Dans la partie Testez-vous, on demande au lecteur un premier effort actif. Chaque quiz se développe autour d'un seul outil ou concept, de façon à ce que l'effort soit ciblé. En revanche, les thèmes abordés dans les quiz ne suivent pas forcement l'ordre dans lequel ils ont été introduits dans le chapitre, pour que le lecteur puisse vérifier sa compréhension globale du chapitre et pour qu'il puisse revenir à plusieurs reprises sur la même difficulté pendant sa séance d'entraînement. Ainsi, le lecteur aura à chaque fois plusieurs occasions de réussir.
- Dans la partie Entraînez-vous, le lecteur a l'opportunité de tester sa compréhension approfondie des thèmes et des méthodes introduits dans le chapitre, et de faire le lien avec les chapitres précédents. Chaque exercice est articulé en plusieurs questions liées entre elles et de difficulté croissante. La plupart du temps, la dernière question demande au lecteur de donner une interprétation des résultats obtenus par rapport au phénomène physique décrit. On demande aussi régulièrement d'identifier les limites du modèle théorique proposé.
- À la fin du chapitre, on trouve toutes les solutions des quiz et des exercices, avec de nombreux commentaires pour faire le lien avec le contenu théorique introduit auparavant. Les solutions sont une partie fondamentale de cet ouvrage, puisqu'on y fait explicitement le lien entre les notions mathématiques abstraites et les problèmes pratiques. C'est également à cet endroit qu'on attire l'attention du lecteur sur les « pièges » et les erreurs de raisonnement typiques, qui peuvent mèner à une interprétation erronée des données expérimentales.

En construisant le cours sur lequel ce livre est basé nous avons bénéficié des ouvrages cités en bibliographie. En particulier, certains exercices et la présentation de certains thèmes ont été fortement inspirés par l'excellent livre en italien de M. Abate (cf. Bibliographie). Ce dernier, comme la plupart des ouvrages dans ce domaine, utilise cependant des outils mathématiques bien plus avancés que ceux que nous souhaitons utiliser ici (équations différentielles, calcul intégral, probabilité...). Notre démarche, visant un public qui n'a pas nécessairement le bagage mathématique pour faire face à ce niveau complexité, nous a finalement mené dans une direction différente, centrée sur le raisonnement et la compréhension des mécanismes logiques qui sont à la base de tout procédé de modélisation mathématique en sciences appliquées. Pour cela, nous suggèreons que le lecteur lise très rapidement les rappels théoriques (définitions, théorèmes principaux) en se concentrant sur les exemples et les remarques dans le texte, pour ensuite consacrer la plupart de son temps aux quiz et aux exercices. Ces derniers constituent la partie la plus importante (et la plus originale) de cet ouvrage, ceux-ci étant conçus pour guider le lecteur vers un apprentissage actif, graduel et, nous l'espérons, ludique.

La démarche de modélisation en biologie présentée dans cet ouvrage se déroule en quatre étapes :

1. Observation et description du phénomène biologique avec un certains nombre de grandeurs physiques quantifiables comme le temps, le volume, le nombre d'individus, une quantité de produit...

2. Choix du modèle, avec la mise en place des équations qui vont décrire le phénomène biologique.
3. Utilisation des outils mathématiques à disposition pour résoudre les équations et décrire les propriété mathématiques des solutions.
4. Retour à la biologie :
   - Est-ce que les données expérimentales sont cohérentes avec le modèle proposé ?
   - Si oui, avec quelle précision ?
   - À quoi peut-on s'attendre, selon ce modèle, sur l'évolution du phénomène à court et moyen terme ?

Les modèles mathématiques introduits dans cet ouvrage sont de deux types (**modèle continu** et **modèle discret**). Un modèle continu est basé sur le concept mathématique de fonction de variable réelle (il s'agit souvent de fonctions continues), alors qu'un modèle discret utilise comme outils les suites. On utilise un modèle continu par exemple pour comprendre l'évolution d'un phénomène (la variable réelle denote ici le temps) dont les données expérimentales sont suffisamment nombreuses pour suggérer quel type de fonction réelle est le plus adaptée à décrire le phénomène. On utilise un modèle discret, par exemple, pour décrire l'évolution d'un phénomène entre deux unités de temps fixées (une semaine, un mois, un an...), lorsque les données expérimentales ne sont pas suffisamment nombreuses pour suggérer la dépendance explicite de la variable temporelle. Les deux types de modèles sont introduits progressivement (respectivement, dans les chapitres 2 et 3), et développés au cours du livre, en introduisant au fur et à mesure des outils mathématiques et des contraintes de pertinence des modèles de plus en plus poussés.

Chapitre 1 Outils mathématiques de base

Dans ce chapitre, on décrit la structure du langage mathématique, en fixant les notations et les conventions qui seront utilisées tout au long de cet ouvrage. On introduit ensuite les outils mathématiques de base (notamment, les pourcentages) et on en explique l'utilisation en modélisation.

1 Le langage mathématique

Les mathématiques sont un langage, comme le français ou l'anglais.

Il y a un **alphabet** (les nombres, les lettres, les symboles...) qu'on utilise pour construire des mots ou **expressions** ($\frac{3}{4}$; $5,1$; $3x^2 - \frac{1}{2}$; $a+b\cdot c$, ...) en suivant certaines règles de syntaxe (« $a+$ » n'est pas une expression compréhensible). On peut combiner les expressions en **phrases** en utilisant les **verbes** (« être égal à ...», « être plus petit que ...», « appartenir à l'ensemble de ...», ...), en obéissant aux règles de la grammaire. Comme en français, on peut **nier** une phrase, on peut combiner plusieurs phrases en utilisant des **connecteurs** («... et ...», «... ou ...», « si ... alors ...», «... si et seulement si ...») et on peut compléter une phrase en utilisant des **quantificateurs** (« il existe x tel que ...», « pour tout nombre réel, on a ...»).

Une **assertion** est une phrase dont on peut affirmer sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse : « $3 > 0$ » est une assertion (vraie), « $4+5=8$ » est une assertion (fausse !), « $x-y=3$ » n'est pas une assertion car sa vérité dépend des valeurs de x et y.

Nous n'allons pas insister ici sur les règles de grammaire et sur la manière d'établir la vérité ou la fausseté d'une assertion. Dans le type de problèmes que nous allons considérer tout cela sera clair de façon intuitive.

Cependant, nous allons utiliser le langage mathématique pour modéliser des problèmes scientifiques. Il est donc important d'apprendre à s'en servir correctement.

Connecteurs

- Comme en français, quand on dit en mathématiques « une chose **et** une autre », on entend aussi que les deux choses sont vérifiées au même temps. Le connecteur « et » s'appelle aussi une **conjonction**.
- En français quand on dit « une chose **ou** une autre » d'habitude on entend que l'une des deux choses est vérifiée mais pas les deux en même temps. Par contre, en mathématiques on n'exclut pas que les deux choses soient vérifiées en même temps. Le connecteur « ou » s'appelle aussi une **disjonction**.

- Soient A et B deux assertions. Pour abréger la phrase « si A est vérifiée, alors B est aussi vérifiée » on dit aussi que « A implique B », et on écrit $A \Rightarrow B$. Pour démontrer que l'**implication** $A \Rightarrow B$ est vraie, on peut procéder de trois façons différentes :
  - Par raisonnement direct : on suppose que A est vraie et on montre, sous cette hypothèse, que B est aussi vraie ;
  - Par contraposée : on suppose que B est fausse et on montre, sous cette assomption, que A est aussi fausse ;
  - Par l'absurde : on suppose que A est vraie et B est fausse, et on déduit une contradiction.
- Soient A et B deux assertions. Pour abréger la phrase « A est vérifiée si et seulement si B est vérifiée » on dit aussi que « A est équivalente à B », et on écrit $A \Leftrightarrow B$. Pour démontrer que l'**équivalence** $A \Leftrightarrow B$ est vraie on peut aussi démontrer que A est fausse si et seulement si B est fausse.

Exemple Démontrons, selon les trois méthodes différentes, que pour tout nombre réel x, si $x < 0$ alors $x^3 < 0$. Nous utilisons les règles de calcul rappelées dans la section 3.
Méthode directe : supposons que $x < 0$. Par les règles de calcul, on a que $x \cdot x > 0$. Encore par les même règles, $x \cdot (x \cdot x)$ a le même signe que x, donc négatif.
Par contraposée : supposons que $x^3 \geq 0$. Nous avons deux cas : si $x^3 = 0$, alors, par les règles de calcul, $x = 0$. En particulier $x \geq 0$, et nous avons fini ce cas. Si $x^3 > 0$, alors ré-écrivons $x^3 = x^2 \cdot x$. Nous savons, par les règles de calcul, que tout carré est positif. Donc le signe de x est le même que le signe de x^3, et nous avons fini.
Par l'absurde : supposons que $x < 0$ et $x^3 \geq 0$. Clairement x^3 ne peut pas être nul, si $x \neq 0$, donc nous pouvons supposer que $x^3 > 0$. Mais $x^3 = x^2 \cdot x$ et $x^2 > 0$, donc si $x < 0$ on a que le produit $x^2 \cdot x$ est aussi négatif. Ceci contredit notre hypothèse que $x^3 \geq 0$.

Une **équation** est une question, sous forme d'une égalité entre deux expressions qui contiennent une ou plusieurs **variables** (ou **inconnues**). Résoudre l'équation consiste à déterminer les valeurs des variables pour lesquelles l'égalité est vérifiée. Autrement dit, résoudre une équation consiste à chercher toutes ses **solutions**.

Les expressions qui apparaissent à droite et à gauche du symbole «=» dans une équation contiennent, en plus des variables, des constantes numériques et parfois des **paramètres**. Un paramètre est un symbole (habituellement, une lettre d'un alphabet latin ou grec) qui désigne une valeur numérique que l'on suppose connue et fixée.

Exemple Considérons l'équation $ax = 2b$, où a et b sont deux nombres réels fixés (avec $a \neq 0$) et x est une variable. Cette équation a une unique solution, c'est-à-dire la valeur $\frac{2b}{a}$. En effet, si on remplace la variable x par le nombre réel $\frac{2b}{a}$, nous obtenons une assertion vraie et si on remplace la variable x par n'importe quel autre nombre réel nous obtenons une assertion fausse. Les nombres réels a et b (qui sont fixés mais pas donnés de façon explicite dans notre problème) sont des paramètres. Pour tout choix de a et de b, nous avons une équation et la solution associée : si $a = b = 2$ alors la solution est $x = 2$, si $a = 2$ et $b = 3$ alors la solution est $x = 3$, etc.

Une **inéquation** est aussi une question, cette fois sous la forme d'une inégalité entre deux expressions qui contiennent des variables, des valeurs numériques et des paramètres. À nouveau, résoudre une inéquation consiste à trouver toutes ses solutions, c'est-à-dire, toutes les valeurs des variables pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Exemple L'inéquation $ax < b$, où x est une variable et a, b sont des paramètres, a comme solution tous les nombres réels qui sont strictement plus petits que le nombre réel $\frac{b}{a}$. Tout nombre qui est plus grand ou égal à $\frac{b}{a}$ n'est pas solution de cette inéquation.

2 L'alphabet

Pour débuter, nous allons étudier les différents types de **nombres** que nous utilisons pour décrire des phénomènes biologiques.

Les nombres les plus simples sont les nombres **naturels**, que nous utilisons pour compter :

$$0, 1, 2, 3, 4, ..., 25, ..., 117, ..., 10000, ...$$

L'ensemble des nombres naturels est désigné par le symbole $\mathbb{N}$.

On se rend compte tout de suite que pour mesurer la température en hiver ou le niveau d'endettement d'un compte bancaire, on a aussi besoin de nombres négatifs. Plus généralement, si l'on soustrait deux nombres naturels dont le second est plus grand que le premier, le résultat sera négatif.

Pour cette raison on introduit les nombres **entiers** :

$$-200, ..., -1, 0, 1, ..., 450, ...$$

L'ensemble des nombres entiers est désigné par le symbole $\mathbb{Z}$.

Si l'on fait la somme, la soustraction ou le produit de deux nombres entiers, le résultat est à nouveau un nombre entier :

$$3 + 6 = 9\ ;\quad 5 + (-8) = -3\ ;\quad 4 \times 5 = 20$$
$$3 \times (-2) = -6\ ;\ (-2) \times (-2) = 4\ ;\ (-2) - 8 = -10$$

Mais si l'on divise deux nombres entiers on peut obtenir comme résultat un nombre qui n'est pas entier, c'est-à-dire, une **fraction** :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{75}{11}, ...$$

Les fractions sont aussi appelées nombres **rationnels** et l'ensemble des nombres rationnels est désigné par le symbole $\mathbb{Q}$.

Un nombre rationnel peut être représenté comme une fraction mais aussi par sa **représentation décimale** :

$$\frac{1}{2} = 0{,}5\ ;\qquad \frac{3}{4} = 0{,}75\ ;$$
$$\frac{7}{5} = 1{,}4\ ;\ \frac{75}{11} = 6{,}81818181...$$

En France, les développements décimaux s'écrivent avec une virgule comme séparateur : par exemple, $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Dans les pays anglo-saxons on utilise plutôt un point comme séparateur décimal : $\frac{1}{2} = 0.5$. Il est important de bien connaître ces deux notations.

La représentation décimale d'un nombre rationnel a la propriété suivante : soit elle est finie (c'est-à-dire qu'il y a un nombre fini de chiffres non-nuls après la virgule ; par exemple, $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}5000...$), soit elle est périodique (c'est-à-dire qu'à partir d'un certain point, les chiffres après la virgule se répètent ; par exemple, $\frac{75}{11} = 6{,}818181...$, que l'on écrit aussi comme $6{,}\overline{81}$, pour indiquer que le groupe « 81 » se répète indéfiniment).

Il existe aussi des nombres dont la représentation décimale est ni finie ni périodique. Il s'agit des nombres **irrationnels**, et ceux-ci ne peuvent pas être représentés par une fraction.

L'ensemble de **tous** les nombres qui ont une représentation décimale, qu'ils soient rationnels ou irrationnels, s'appelle l'ensemble des nombres **réels** et il est désigné par le symbole $\mathbb{R}$.

Exemples

- Le nombre $0{,}\overline{3}$ est rationnel. Il correspond à la fraction $\frac{1}{3}$.
- Le nombre $0{,}294\overline{01} = 0{,}29401010101...$ est rationnel. En effet, à partir du quatrième chiffre après la virgule, il y a un groupe, le «01», qui se répète périodiquement.
- Le nombre $1{,}756$ est rationnel. Puisque il a un développement décimal fini, il est possible de trouver facilement une fraction qui lui correspond. Comment ?
- Les nombres

$$\sqrt{2} = 1{,}4...$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7...$$
$$\sqrt{5} = 2{,}2...$$

  sont irrationnels.
  $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.
  $\sqrt{3}$ est la longueur de la hauteur d'un triangle équilatère de côté 2.
  $\sqrt{5}$ intervient dans le **nombre d'or**, qui apparaît dans plusieurs manifestation de la nature.
- Le nombre

$$\pi = 3{,}141592653...$$

  est irrationnel.
  π est la longueur de la circonférence d'un cercle de diamètre 1.
- Le nombre

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + ... = 2{,}718281828459045...$$

  est irrationnel. Le nombre e est appelé **nombre de Néper** et joue un rôle fondamentale dans la définition de la fonction exponentielle et du logarithme naturel.

3 Les expressions

3.1 Opérations arithmétiques

Nous connaissons déjà quelques opérations élémentaires entre nombres réels.

La somme, la soustraction, la multiplication (ou produit) et la division (ou quotient) sont des **opérations arithmétiques**.

Rappelons quelques propriétés de ces opérations et quelques **règles de calcul**.

- Quand on additionne des nombres réels, l'ordre dans lequel on fait la somme n'est pas important : $4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 4$.
- De même pour la multiplication : $5 \times 1{,}2 = 1{,}2 \times 5$.
- De plus, si l'on additionne plusieurs nombres réels, on peut le faire en plusieurs étapes, et le choix de l'ordre de ces étapes ne change pas le résultat. Pour calculer $2+4{,}5+\frac{6}{5}$, je peux d'abord calculer $2+4{,}5$ et en suite ajouter $\frac{6}{5}$ au résultat obtenu. Mais on peut aussi d'abord calculer la somme $4{,}5+\frac{6}{5}$ et ensuite ajouter 2. Avec les deux méthodes on obtient le même résultat à la fin.
- De même pour la multiplication : $2 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 = 2 \times 15$.
- Si dans une même expression on a des sommes et des soustractions, on peut choisir librement dans quel ordre exécuter les opérations : $7 - 5 + 3 = 2 + 3 = 7 - 2$. En effet, si a et b sont deux nombres réels, alors faire la soustraction $a - b$ est la même chose que faire la somme $a + (-b)$. Pour tout nombre réel a, on a : $a + (-a) = 0$.
- De même si l'expression contient des produits et des divisions : $\frac{2\times 3}{4} = \frac{2}{4} \times 3 = \frac{6}{4}$. En effet, si a et b sont deux nombres réels, alors faire la division $\frac{a}{b}$ est la même chose que faire le produit $a \times \frac{1}{b}$. Pour tout nombre réel a différent de zéro, on a : $a \times \frac{1}{a} = 1$.
- Par contre, si l'expression contient des sommes/soustractions et des multiplications/divisions, il existe des règles de priorité : pour calculer l'expression $3 \times 4 + 5$, je dois d'abord exécuter la multiplication 3×4 et ensuite additionner au résultat obtenu le nombre 5. Les multiplications/divisions ont la priorité sur les additions/soustractions. Pour donner la priorité à la somme, il faut ajouter des **parenthèses** : dans l'expression $3 \times (4 + 5)$, je dois d'abord exécuter la somme $4 + 5$ et ensuite multiplier par 3 le résultat obtenu.
- On peut multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction par la même quantité non nulle, sans changer la valeur de la fraction : le nombre rationnel $0{,}5$ s'écrit comme la fraction $\frac{1}{2}$, mais aussi comme la fraction $\frac{1\times 5}{2\times 5} = \frac{5}{10}$ ou comme la fraction $\frac{1\times 1{,}5}{2\times 1{,}5} = \frac{1{,}5}{3}$, ou encore comme la fraction $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}}$, etc. La fraction $\frac{1}{2}$ est **réduite**, car il n'est plus possible de simplifier le numérateur et le dénominateur par des produits et des divisions.
- Pour faire la somme/différence de deux fractions, il faut trouver un **dénominateur commun**. La façon la plus simple d'y parvenir est de faire le produit des dénominateurs et la somme/différence des produits croisés des numérateurs et dénominateurs : $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{1\times 5+4\times 2}{2\times 5} = \frac{5+8}{10} = \frac{13}{10}$.
- Pour faire le produit de deux fractions, il suffit de faire le produit des numérateurs et le produit des dénominateurs : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2\times 4}{3\times 5} = \frac{8}{15}$.

- Pour faire le quotient de deux fractions, il suffit de multiplier la première fraction par l'inverse de la deuxième : $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Notation. À partir de maintenant, nous utiliserons aussi le symbole « · » pour indiquer la multiplication. Quand on fait des calculs avec des expressions symboliques, on peut aussi omettre le symbole de multiplication : si a et b sont deux nombres réels, alors on écrit de façon interchangeable $a \times b$ ou $a \cdot b$, ou tout simplement ab, pour indiquer le produit de a et b.

3.2 Valeur absolue

Exemple Un couple a deux enfants : une fille, Anne, et un garçon, Pierre. L'écart entre leurs âges respectifs est de trois ans, mais nous ne savons pas lequel des deux enfants est l'aîné. Si a_A est l'âge de Anne et a_P est l'âge de Pierre, alors $a_A - a_P = \pm 3$ ans. La différence d'âge est habituellement considérée commun nombre positif (ce serait bizarre de dire que leur différence d'age est de -3 ans !). Nous cherchons donc une façon d'indiquer la valeur de cette différence sans nous occuper du signe. Pour cela nous pouvons utiliser la valeur absolue.

DÉFINITION

La **valeur absolue** d'un nombre réel a est définie comme suit :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Dans l'exemple ci-dessus nous indiquerons donc que la différence d'âge entre les deux enfants est $|a_A - a_P|$.

4 Les phrases

4.1 Manipulations arithmétiques des égalités et des inégalités

Étant donnés deux nombres réels a et b, nous savons dire s'ils sont égaux ou distincts. S'ils sont distincts, nous savons dire lequel des deux est le plus grand.

Notation. Si a est **égal** à b, alors on écrit $a = b$. On utilise la notation $a < b$ pour dire que a est **strictement plus petit que** b. Si a est **strictement plus grand que** b, alors on écrit $a > b$. La notation $a \leq b$ signifie que a est **plus petit ou égal à** b. De façon analogue, on définit la notation $a \geq b$.

Rappelons comment les opérations arithmétiques se comportent par rapport aux égalités et aux inégalités entre nombres ou entre expressions symboliques.

Supposons que a, b soient deux nombres réels. Alors $a \cdot b = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$. De plus, $a \cdot b > 0$ si et et seulement si a et b ont le même signe et $a \cdot b < 0$ si et seulement si a et b sont de signes différents.

Supposons maintenant que a, b soient deux nombres réels, avec $b \neq 0$. Alors $\dfrac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$. De plus, $\dfrac{a}{b} > 0$ si et seulement si a et b ont le même signe et $\dfrac{a}{b} < 0$ si et seulement si a et b sont de signes différents.

Rappelons aussi que pour tous nombres réels a, b, c nous avons

$$c\,(a + b) = ca + cb.$$

L'expression de gauche est **factorisée**, l'expression de droite est **développée**.

Soient a, b, c des nombres réels. Supposons que $a \leq b$. Nous pouvons alors déduire que :

- $-a \geq -b$;
- $a \pm c \leq b \pm c$, pour tout c ;
- $ac \leq bc$, pour tout $c > 0$;
- $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$, si $a, b > 0$.

Pour conclure, soient a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres réels. Si $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$, alors :

- $a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2$.
- $a_1 - b_2 \leq a_2 - b_1$. Par contre, nous ne pouvons rien dire sur les différences $a_1 - b_1$ et $a_2 - b_2$.
- $a_1 b_1 \leq a_2 b_2$, si tous les nombres sont > 0.

4.2 Équations et inéquations avec valeurs absolues

Dans cette section nous illustrons le rôle de la conjonction et de la disjonction dans un problème mathématique très courant.

Soient $A\,(x)$ et $B\,(x)$ deux expressions qui contiennent la variable x.

- un nombre réel x est solution du **système** d'équations

$$\begin{cases} A\,(x) = 0 \\ B\,(x) = 0 \end{cases}$$

  si x satisfait les deux équations en même temps :

$$A\,(x) = 0 \textbf{ ET } B\,(x) = 0.$$

  De façon analogue ondéfinit les systèmes d'inéquations.

- un nombre réel x est solution de l'équation $|A(x)| = B(x)$ si et seulement si x satisfait l'un des deux systèmes ci-dessous :

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad \textbf{OU} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) = B(x) \end{cases}$$

- un nombre réel x est solution de l'inéquation $|A(x)| > B(x)$ si et seulement si x satisfait l'un des deux systèmes ci-dessous :

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \quad \textbf{OU} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases}$$

- un nombre réel x est solution de l'équation $|A(x)| < B(x)$ si et seulement si x satisfait le système ci-dessous :

$$\begin{cases} A(x) < B(x) \\ A(x) > -B(x) \end{cases}$$

Exemples

- x est solution de l'équation $|3x - 5| = 7x - 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ 3x - 5 = 7x - 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x - 5 < 0 \\ -3x + 5 = 7x - 1 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 4x = -4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{3} \\ 10x = 6 \end{cases}$$

Le premier système n'a pas de solution, car la solution de l'équation, $x = -1$, ne satisfait pas l'inéquation $x \geq \frac{5}{3}$. Le deuxième système a comme solution $x = \frac{3}{5}$. En effet, telle est la solution de l'équation, qui s'avère aussi vérifier l'inégalité $x < \frac{5}{3}$. Donc l'équation $|3x - 5| = 7x - 1$ a une unique solution $x = \frac{3}{5}$.

- x est solution de l'équation $|2x - 5| = x^2 - 4$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 2x - 5 = x^2 - 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -2x + 5 = x^2 - 4 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

Le premier système n'a pas solution et le deuxième a deux solutions, $x = 1 + \sqrt{10}$ et $x = 1 - \sqrt{10}$.

- x est solution de l'inéquation $|4x - 1| > 2x$ si et seulement si

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 4x - 1 > 2x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 4x - 1 < 0 \\ -4x + 1 > 2x \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{6} \end{cases}$$

Le premier système a comme solutions tous les x tels que $x > \frac{1}{2}$ et le deuxième système a comme solutions tous les x tels que $x < \frac{1}{6}$. Donc les solutions de l'inéquation initiale sont tous les x qui sont plus petits que $\frac{1}{6}$ ou plus grands que $\frac{1}{2}$.

- x est solution de l'inéquation $|2x+3| < 4$ si et seulement si, en appliquant la définition de la valeur absolue,

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 2x+3 < 4 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2x+3 < 0 \\ -2x-3 < 4 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x > -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Donc tous les x qui vérifient $-\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}$ sont solutions. En effet, on obtient le même résultat en appliquant la règle générale ci-dessus : x est solution si et seulement si $-4 < 2x+3 < 4$.

- x est solution de l'inéquation $|3x+9| < -1$ si et seulement si ... cette inéquation n'a pas de solution, car la valeur absolue de n'importe quelle quantité est toujours ≥ 0 !

5 Ensembles et opérations ensemblistes

5.1 Les ensembles

Nous avons déjà utilisé de façon un peu informelle la notion d'ensemble. Un **ensemble** est tout simplement une collection d'objets.

Exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont des ensembles de nombres. Une population est un ensemble d'individus. Un cercle, une droite, un triangle sont des ensembles de points du plan et une sphère est un ensemble de points de l'espace.

Nous allons maintenant introduire un peu de terminologie liée aux ensembles.

Si A est un ensemble et a est un objet qui fait partie de l'ensemble A, nous allons écrire

$$a \in A \ \ (a \textbf{ appartient } \text{à } A,\ a \text{ est un élément de l'ensemble } A)\,.$$

Nous écrivons $a \notin A$ si a n'est pas un élément de l'ensemble A.

Si B est un autre ensemble et tout élément de B appartient aussi à A, alors nous allons écrire

$$B \subseteq A \ \ (B \text{ est un sous-ensemble de } A,\ B \text{ est } \textbf{inclu} \text{ dans } A,\ A \text{ contient } B)\,.$$

Si de plus B n'est pas égal à A (c'est-à-dire, A a des éléments qui ne sont pas dans B), alors nous allons dire que B est un sous-ensemble propre de A. Pour souligner que $B \neq A$, nous pouvons écrire $B \subsetneq A$.

Deux ensembles A et B sont égaux (et on écrit $A = B$) si et seulement si ils ont exactement les mêmes éléments.

L'**ensemble vide** est l'ensemble qui n'a pas d'élément et on le note $\emptyset$.

Exemples

- Le nombre 2 est un nombre naturel, et donc il appartient à $\mathbb{N}$: en symboles, $2 \in \mathbb{N}$ (2 est un **élément** de l'ensemble $\mathbb{N}$). Par contre, le nombre -2 n'est pas naturel, donc $-2 \notin \mathbb{N}$. Tout nombre naturel est aussi un nombre entier, donc $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$est un **sous-ensemble** de $\mathbb{Z}$). Les entier négatifs ne sont pas des nombres naturels, donc pour être précis, $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble propre** de $\mathbb{Z}$). Il n'y a pas de nombres naturels strictement négatifs : si V est l'ensemble des nombres naturels strictement négatifs, alors $V = \emptyset$.

- On a que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Puisque $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, nous avons $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$. Puisque $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$, nous avons $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Nous avons deux façons de représenter la composition d'un ensemble :

- Nous pouvons faire une liste des éléments de l'ensemble entre accolades, en séparant un élément de l'autre par une virgule :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots\}$$
$$\mathbb{R} = \left\{\ldots,\ -e, \ldots,\ -1, \ldots,\ \pi, \ldots,\ \frac{27}{2}, \ldots,\ e^{45}, \ldots\right\}$$

Cette façon de procéder n'est pas très appropriée si l'ensemble a un nombre élevé ou infini d'éléments : dans ce cas on est forcé de mettre des «...», ce qui ne correspond pas à une notation mathématique précise.

- Nous pouvons caractériser les éléments de l'ensemble par la propriété, ou les propriétés, qu'ils partagent :

$$P = \{x \in \mathbb{N} \text{ tels que } x \text{ est pair}\}$$
$$\mathbb{R}^{>0} = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > 0\}$$

Plus généralement, si A est un ensemble et B est le sous-ensemble de A des objets caractérisés par la propriété p, nous écrivons

$$B = \{x \in A \text{ t.q. } x \text{ a la propriété } p\}\,.$$

Dans cette écriture x est une variable (on peut choisir n'importe quelle lettre à la place de x) et à la place de « tel que » on écrit souvent une barre verticale « | » ou les deux points « : ». Donc l'ensemble B ci-dessus est aussi désigné par l'écriture

$$B = \{x \in A \mid x \text{ a la propriété } p\}\,, \text{ ou}$$
$$B = \{x \in A\ : x \text{ a la propriété } p\}$$

Remarque. Attention aux ensembles composés d'un seul élément : l'ensemble $\{2\}$ est différent du nombre 2. Cette différence se voit bien dans la notation que nous avons introduite : alors que $2 \in \mathbb{N}$, car 2 est un nombre naturel, nous devons écrire $\{2\} \subseteq \mathbb{N}$, puisque l'ensemble qui contient comme élément le seul nombre 2 est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

5.2 Opérations ensemblistes

Comme pour les nombres, on peut aussi faire des opérations élémentaires sur les ensembles. Celles qui nous concernent sont les suivantes :

- L'**intersection** $A \cap B$ des ensembles A et B est l'ensemble qui a comme éléments tous les objets qui sont à la fois dans A et dans B, c'est-à-dire
$$A \cap B = \{x : \ x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$
Ici le « et » est le connecteur logique de conjonction.
Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont **disjoints**.
- L'**union** $A \cup B$ des ensembles A et B est l'ensemble qui a comme éléments tous les objets qui sont dans A et tous les objets qui sont dans B, c'est-à-dire
$$A \cup B = \{x : \ x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$
Ici le « ou » est le connecteur logique de disjonction.
On remarque que si x est un élément à la fois de A et de B, alors en particulier x appartient à A. Donc :
$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$
- La **différence** $A \setminus B$ des ensembles A et B est l'ensemble qui a comme éléments tous les objets qui sont dans A mais pas dans B, c'est-à-dire
$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \textbf{ et } x \notin B\}.$$
- Le **produit cartésien** $A \times B$ des ensembles A et B est l'ensemble de toutes les paires ordonnées de la forme (a, b) telles que a est un élément quelconque de A et b est un élément quelconque de B, c'est-à-dire
$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \textbf{ et } b \in B\}.$$

ATTENTION !

Les éléments d'un produit cartésien sont des **paires ordonnées** d'objets.

Notation. On utilise aussi la notation abrégée
$$A \times A = A^2 \text{ et } \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}} = A^n.$$

Exemple Considérons les ensembles suivants
$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ est pair et } n < 8\} = \{0, 2, 4, 6\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} : \ n < 3\} = \{0, 1, 2\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ est impair et } n < 5\} = \{1, 3\}.$$

On a :

- $A \cap B = \{0, 2\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6\}$, $A \setminus B = \{4, 6\}$, $B \setminus A = \{1\}$
- $A \cap C = \emptyset$, $B \subseteq A \cup C$, $A \setminus C = A$, $B \setminus C \subseteq A$
- $B \times C = \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$
$C \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

Exemple Quand nous résolvons un système d'équations et inéquations, l'ensemble de toutes les solutions du système est l'intersection des ensembles des solutions de chaque équation/inéquation du système. Par exemple, considérons le système

$$\begin{cases} 4x^2 - 25 = 0 & \text{(éq. 1)} \\ x > -1 & \text{(inéq. 2)} \\ x \leq 5 & \text{(inéq. 3)} \end{cases}.$$

La première équation a comme ensemble des solutions $S_1 = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{2}\right\}$.
La deuxième inéquation a comme ensemble des solutions $S_2 = \{x \in \mathbb{R} :\ x > -1\}$.
La troisième inéquation a comme ensemble des solutions $S_3 = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq 5\}$.
Le système a comme ensemble des solutions l'ensemble
$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \left(x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{2}\right) \text{ et } -1 < x \leq 5\right\} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Dans l'exemple ci-dessus nous avons implicitement utilisé certaines des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{cc} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, & A \cup B = B \cup A \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, & A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,, & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset \end{array}.$$

Astuce. Une façon de se souvenir des règles ci-dessus est la suivante : on peut faire une analogie entre les opérations ensemblistes et les opérations sur les nombres, où on considère l'union comme la somme de nombres et l'intersection comme le produit de nombres (et en considérant l'ensemble vide comme le nombre zéro).

Question. Cette analogie marche pour toutes les propriétés ci-dessus, sauf une : laquelle ?

6 Pourcentages

6.1 Définitions

L'écriture « p % », où p est un nombre réel, est un raccourci pour représenter la fraction $\frac{p}{100}$.

On utilise les pourcentages pour comparer la taille respective de deux entités du même type :

$$y \text{ est le } p\,\% \text{ de } x$$
$$\text{si et seulement si}$$
$$y = \frac{p}{100}x. \tag{1.1}$$

En particulier, pour trouver le p % d'une quantité x il faut multiplier x par $\frac{p}{100}$.

Exemple La phrase « Une solution saline contient 15 % de sel. » veut dire que, si x est le poids en grammes de la solution, alors la solution contient $y = \frac{15}{100}x$ grammes de sel.

Pour indiquer un pourcentage d'une certaine quantité on utilise aussi le mot « **taux** ». Ainsi, la solution saline de l'exemple ci-dessus a un taux de sel de 15 %.

Si on connaît deux quantités du même type x et y, comment calculer quel pourcentage de x est constitué par y ? Autrement dit, comment établir quel est le taux de y dans x ?

Il suffit d'inverser la formule (1.1) : y constitue p % de x, où

$$p = \frac{y}{x} \times 100.$$

Exemple En France, le taux maximal d'alcool dans le sang autorisé pour le conducteur d'un véhicule est de 0,5 grammes par litre de sang. Un litre de sang a, en moyenne, une masse de 1,06 kg, donc le taux d'alcool dans le sang permis par la loi est de p %, où

$$p = \frac{0{,}5 \text{ g}}{1{,}06 \times 10^3 \text{ g}} \times 100 \approx 0{,}047.$$

6.2 Taux d'augmentation/diminution

Exemples

- Le prix du ticket de métro a augmenté de 10 % cette année. On dit aussi que le **taux d'augmentation** du prix du ticket de métro cette année est de 10 %. Ceci veut dire que, si l'année dernière un ticket de métro coûtait x euros, cette année il va coûter x plus les 10 % de x. Le nouveau prix du ticket de métro est donné par
$$x + \frac{10}{100}x = \left(1 + \frac{10}{100}\right)x = 1{,}1 \cdot x.$$
Ainsi, si le prix était, l'année dernière, de 1,3 euros, cette année le ticket va coûter $1{,}1 \times 1{,}3$ eur $=$ 1,43 eur.
- Le **taux de croissance** d'une population de cerfs est de 20 % par année. Ceci veut dire que si une année il y a une population de x cerfs, l'année suivante on aura une population de $\left(1 + \frac{20}{100}\right)x$ cerfs.
- Une population de cobayes est infectée avec un virus. Le **taux de mortalité** de la population est de 5 % chaque mois. Ceci veut dire que, si en janvier il y avait x cobayes, en février il y aura $y = x - \frac{5}{100}x = \left(1 - \frac{5}{100}\right)x$ cobayes. En mars il y aura donc $z = \left(1 - \frac{5}{100}\right)y = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^2 x$ cobayes qui auront survécu.

Le **taux d'augmentation/diminution** est le rapport, exprimé en pourcentage, entre la partie augmentée/diminuée et la quantité initiale : si une quantité x augmente/diminue d'une quantité x_0 (au cours d'une unité de temps), alors la quantité finale sera $x \pm x_0$ et le taux d'augmentation/diminution sera de $\left(\frac{x_0}{x} \times 100\right)$ %.

Exemple Un capital de 5000 euros est placé dans une banque. Après un an, le capital disponible est de 5150 euros. Quel est le taux d'intérêt ?
En un an, le capital a augmenté de $x_0 = 5150 - 5000 = 150$ euros. Donc le taux d'intérêt est de $\left(\frac{150}{5000} \times 100\right)\% = 3\,\%$.
Si une quantité x augmente d'abord de p % et en suite de q %, la quantité finale sera, si on applique la règle,

$$y = \left(1 + \frac{q}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)x = \left(1 + \frac{p+q}{100} + \frac{pq}{10^4}\right)x.$$

Donc le taux d'augmentation final n'est pas la somme des deux taux d'augmentation !

Exemple Une population de cerfs augmente de 20 % chaque année. Après deux ans la population de cerfs n'a pas augmenté de 40 %, mais de $\left(20 + 20 + \frac{400}{10^4}\right)\% = 40{,}04\,\%$. En effet, au bout de la première année la quantité de cerfs avait déjà augmenté par rapport à la quantité initiale x, et donc pour calculer l'augmentation la deuxième année on a calculé le 20% d'une quantité plus grande que x. Le taux de croissance totale sur deux ans s'avère donc être supérieur à la somme des deux pourcentages.

En particulier, une augmentation de 50 % suivie par une diminution de 50 % ne ramène pas au résultat initial ! En effet,

$$y = \left(1 - \frac{50}{100}\right)\left(1 + \frac{50}{100}\right)x = \left(1 - \left(\frac{50}{100}\right)^2\right)x = \frac{75}{100}x.$$

En effet, lors de l'augmentation nous arrivons à avoir la quantité $\frac{3}{2}x$, que nous allons ensuite, lors de la diminution, multiplier par $\frac{1}{2}$: ainsi nous retrouvons que 75 % de x.

Remarque. Puisque dans un produit l'ordre des facteurs n'est pas important, augmenter une quantité x de $p\,\%$ et ensuite effectuer une diminution de $q\,\%$ nous donne le même résultat que si on fait d'abord une diminution de $q\,\%$ puis une augmentation de $p\,\%$.

7 La droite réelle

Les nombres réels ont une propriété fondamentale : il y a une correspondance entre les nombres réels et les points d'une droite. De plus, cette correspondance est **bijective** : à tout nombre réel correspond un et un seul point de la droite, et inversement.

Ceci nous permet de donner une interprétation géométrique à des concepts algébriques.

Par exemple, si a et b sont deux nombre réels et $a < b$, alors l'ensemble des nombres réels strictement compris entre a et b est le segment de la droite qui rejoint le point associé à a avec le point associé à b (sans les deux extrémités). Cet ensemble s'appelle aussi un **intervalle ouvert**, et il sera désigné par le symbole $]a, b[$:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}.$$

De façon similaire, on définit l'**intervalle fermé** $[a, b]$ comme le même segment mais cette fois en incluant aussi les deux extrémités, et les deux intervalles **demi-ouverts** $]a, b]$ et $[a, b[$ respectivement.

Si maintenant on considère tous les nombres réels strictement plus grands que a, on obtient la **demi-droite** $]a, +\infty[$, c'est-à-dire le segment infini qui a a comme extrémité gauche et qui s'étend indéfiniment vers la droite. On définit de façon similaire la demi-droite $]-\infty, a[$, qui s'étend indéfiniment à la gauche de a.

Testez-vous

Quiz 1.1 Le nombre de contaminations quotidiennes au Covid 19 dans la ville de Florence a augmenté de 60 % pendant le mois de novembre. Il a ensuite baissé de 30 % au cours du mois de décembre. Au total, depuis octobre, le taux de contamination depuis octobre a changé (augmenté ou baissé) de $r\%$, ou $r = ?$

Quiz 1.2 Un commercial perçoit une commission de 5 % sur les ventes réalisées. Si sa commission est de 1250 euros, quel est le montant des ventes réalisées ?

Quiz 1.3 Soient a, b, c, d des nombres réels. On va supposer que $a < b$ et que $c \leq d$. Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en produisant une preuve ou un contre-exemple.
1. $\dfrac{a+c}{b+c} = \dfrac{a}{b}$, si $b \neq 0$. **2.** $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$, si $c \neq 0$. **3.** $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{c}$, si $a, b, c, d > 0$.

Quiz 1.4 Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation

$$|3x - 1| > 4x.$$

Quiz 1.5 Exprimer sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :
1. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{b^2}$ **2.** $\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{3}{a-b}$ **3.** $\dfrac{1}{a\,(a+b)} + \dfrac{2}{b\,(a+b)}$

Quiz 1.6 La surface latérale S et le volume V d'un cône de rayon r et hauteur h valent, respectivement :

a) $S = \pi r^2 h\,;\ V = \dfrac{1}{3}\pi^2 r h^2.$ **b)** $S = \pi r h\,;\ V = \dfrac{1}{3}\pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$

c) $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}\,;\ V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h.$ **d)** $S = \pi r h\,;\ V = \pi r^2 h.$

Quiz 1.7 Si $f(x) = 2\cos(\pi\ (x-2)) + 1$, alors combien vaut $f(1)$?

Quiz 1.8 Votre salaire est d'abord diminué de 50 % puis ensuite augmenté de 80 %. Finalement, la variation globale de votre salaire est :

a) une augmentation de 10 % **b)** une diminution de 10 %

c) une augmentation de 30 % **b)** une diminution de 30 %

Quiz 1.9 Si $f(x) = -2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right) + 5$, combien vaut $f(2)$?

Quiz 1.10 Classer les nombres suivants par ordre croissant (du plus petit au plus grand) :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\ ;\ -0{,}5\ ;\ (-2)^{-4}.$$

Quiz 1.11 Il y a deux ans, j'ai mis un capital de 5000 euros dans une banque où le taux d'intérêt annuel est constant et très avantageux. Aujourd'hui, j'ai un capital de 7200 euros. Le taux d'intérêt annuel est donc $p\%$, où $p = ?$

Entraînez-vous

Exercice 1.1 Un commerçant fait des soldes avec une réduction de 40 %. Vous repérez un service à thé dont le prix initial était de 50 euros, et vous décidez de l'acheter. Au moment de payer, vous vous rendez compte que l'une des tasses est abimée. Vous demandez alors au commerçant d'appliquer une réduction de 45 % sur le prix initial. Le vendeur vous répond qu'il ne peut pas faire cela, et il vous propose en échange une réduction supplémentaire de 10 % sur le prix soldé. Acceptez-vous ?

Exercice 1.2 Pierre et Jacques sont deux frères, nés le même jour mais à huit ans d'écart, et aujourd'hui c'est leur anniversaire. Dans cinq ans, Jacques aura le double de l'âge de Pierre, moins vingt. Quel âge ont Pierre et Jacques aujourd'hui ?

Exercice 1.3 Les soldes vont bientôt commencer et un commerçant malhonnête veut augmenter le prix de sa marchandise, de façon à ce que quand il fera une réduction pendant les soldes, il vendra la marchandise à son prix initial.

1. Supposons que le commerçant vende des plantes. Le nombre total de plantes à vendre est de 150 et le prix à l'unité est de 2 euros. S'il veut pouvoir faire une réduction de q %, de quel pourcentage doit-il augmenter le prix ?
2. Supposons maintenant que le commerçant vende des chaussettes, pour une quantité totale de 200 paires de chaussettes au prix initial de 5 euros la paire. S'il augmente le prix initial de p %, quelle réduction peut-il faire pour revenir au prix initial ?
3. Dans les questions ci-dessus, identifier les constantes numériques, les paramètres et les inconnus. Identifier également les données inutiles du problème.

Exercice 1.4 Soient p, q des nombres réels tels que $0 < p < q < 100$.

Vous préparez 2 litres de solution hydroalcoolique avec un taux d'alcool de q %. Vous oubliez de fermer la bouteille et, l'alcool étant très volatile, une partie de l'alcool présent dans la solution s'évapore (on supposera que les autres éléments de la solution ne s'évaporent pas). Quand vous vous rendez compte de votre erreur et que vous refermez la bouteille, la solution contient désormais seulement p % d'alcool.

1. Quel est le volume de la solution quand vous refermez la bouteille ?
2. Vous n'avez plus d'alcool. Pour rendre la solution plus efficace, vous remplacez l'alcool évaporé par le même volume d'eau de javel. Quel sera le taux d'eau de javel de la solution, exprimé en pourcentage ?

Exercice 1.5 Soient $M, p, q \in \mathbb{R}$, avec $M > 0$ et $0 < p < q < 100$. Une solution saline qui pèse M grammes contient p % de sel. Combien de grammes de sel faut-il ajouter à la solution, pour que le taux de sel devienne q % ?

Exercice 1.6 Paul et Marie ont acheté des fruits. Paul a payé un total de x euros pour des pommes et des kiwi, Marie n'a acheté que des pommes. Le prix au kg des pommes est de 2 euros. Le prix à l'unité des kiwis est de 50 centimes, et Paul en a acheté y.

1. Identifier les paramètres et les constantes numériques dans les données de ce problème. Introduire ensuite des variables et des équations qui permettront de répondre aux questions suivantes.
2. Quel est le poids des pommes achetées par Paul ?

3. Si Paul donne 5 de ses pommes à Marie, elle aura autant de pommes que lui. Par contre, si Marie donne 5 de ses pommes à Paul, il aura 5 fois plus de pommes qu'elle. Combien de pommes Paul et Marie ont-ils achetées, respectivement ?
4. Si une pomme pèse 100 g, combien a payé Marie pour ses courses ? Et dans ce cas, quel est le coût des kiwis achetés par Paul ?

Exercice 1.7 Un commerçant achète en gros un lot de N pulls, au prix de P euros le pull. Une fois l'achat conclus, il se rend compte que $p\,\%$ de la marchandise est abîmé, et donc invendable. Entre temps, le grossiste malhonnête a disparu. Le reste de la marchandise étant de bonne qualité, le commerçant s'attend à la vendre en sa totalité.

1. S'il veut gagner $q\,\%$ de son investissement initial, de quel pourcentage doit-il augmenter le prix initial à l'unité ?
2. Identifier les paramètres et les inconnues du problème. Y a-t-il des données inutiles ?

Exercice 1.8 Considérons les ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{N} |\ 0 < x < 6 \text{ et } x \text{ est un multiple de } 3\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} |\ |x| \leq 2\}$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} |\ 2x^2 = x\right\}.$$

Décrire les ensembles $A \times C$, $B \cap C$, $A \cup B$ et $A^2 \cup \left(C^2 \setminus B^2\right)$ en constituant la liste de leurs éléments.

• Solutions

Quiz 1.1 On a

$$(1 + 60\,\%)\,(1 - 30\,\%) = (1 \pm r\%)$$

Donc

$$\pm r = 100\,(1 + 60\,\% - 30\,\% - 60\,\% \cdot 30\,\% - 1)\,,$$

d'où $r = 60 - 30 - 18 = 12$. On en déduit que le taux de contamination a augmenté de 12 %.

Quiz 1.2 Si x est le montant des ventes, alors 1250 est 5 % de x :

$$1250 = \frac{5}{100}x.$$

Donc $x = \frac{1250 \times 100}{5} = 25000$ euros.

Quiz 1.3

1. On ne peut pas en général faire cette simplification. Par exemple, si $a = 2, b = 3$ et $c = 1$, alors $\dfrac{a+c}{b+c} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$.
2. Cette affirmation est fausse en général : pour voir cela, il suffit de considérer un nombre c négatif. Par exemple, si $a = 2$, $b = 3$ et $c = -1$, alors $\frac{a}{c} = -2$ qui est plus grand que