

Matthieu Fèvre, Roland Gorlier

# Questions de maths

- Mémentos de cours
- Questions et exercices
- Solutions détaillées



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Petits outils</b>	<b>15</b>
I.1	Cours . . . . .	15
I.1.1	Généralités . . . . .	15
I.1.2	Fonctions continues . . . . .	16
I.1.3	Intégration des fonctions continues . . . . .	17
I.1.4	Fonctions dérivables . . . . .	18
I.1.5	Convexité . . . . .	20
I.1.6	Formules de Taylor . . . . .	22
I.1.7	Formule de Stirling . . . . .	22
I.2	Questions . . . . .	23
I.3	Éclairages . . . . .	24
I.4	Réponses . . . . .	26
	[R I. 1] (Développement) . . . . .	26
	[R I. 2] (Inégalité triangulaire) . . . . .	27
	[R I. 3] (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ ) . . . . .	27
	[R I. 4] (Calcul d'une somme classique) . . . . .	28
	[R I. 5] (Fonction constante par morceaux) . . . . .	29
	[R I. 6] (Encadrements usuels de $\sin$ ) . . . . .	29
	[R I. 7] (Encadrements usuels de $\cos$ et $\sin$ ) . . . . .	30
	[R I. 8] (Fonction définie par une intégrale) . . . . .	30
	[R I. 9] (Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ) . . . . .	33
	[R I. 10] (Limite usuelle) . . . . .	34
	[R I. 11] (Application de la formule de Taylor reste intégral) . . . . .	35
	[R I. 12] (Calcul classique d'équivalent) . . . . .	36
<b>II</b>	<b>Polynômes</b>	<b>37</b>
II.1	Cours . . . . .	37
II.2	Questions . . . . .	46
II.3	Éclairages . . . . .	48
II.4	Réponses . . . . .	49

[R II. 1]	(Application du théorème de Rolle)	49
[R II. 2]	(Dans $\mathbb{R}[X]$ , $P$ scindé $\implies P'$ scindé)	50
[R II. 3]	(Polynômes de Tchebychev)	50
[R II. 4]	(Racines des polynômes de Tchebychev)	52
[R II. 5]	(Utilisation d'une décomposition en éléments simples)	52
[R II. 6]	(Interpolation de Lagrange : application)	53
[R II. 7]	(Dérivée logarithmique)	54
[R II. 8]	(Interpolation de Lagrange : application)	55
[R II. 9]	(Reste dans une division euclidienne)	55
[R II. 10]	(Interpolation de Lagrange : application)	56
[R II. 11]	(Utilisation des relations coefficients-racines)	57
[R II. 12]	(Application de la formule de Taylor)	58
<b>III</b>	<b>Intégration</b>	<b>59</b>
III.1	Cours	59
III.1.1	Intégrales de fonctions continues par morceaux	59
III.1.2	Intégrales généralisées	61
III.1.3	Propriétés de l'intégrale généralisée	63
III.1.4	Fonctions intégrables	66
III.1.5	Critères de convergence par comparaison	68
III.2	Questions	69
III.3	Éclairages	72
III.4	Réponses	74
[R III. 1]	(Fonctions continues par morceaux)	74
[R III. 2]	(Calculs d'intégrales impropres)	75
[R III. 3]	(Nature d'une intégrale)	77
[R III. 4]	(Convergence d'intégrale et limites)	78
[R III. 5]	(Intégrale d'une fonction impaire)	80
[R III. 6]	(Intégrale semi-convergente)	80
[R III. 7]	(Intégrale semi-convergente)	81
[R III. 8]	(Nature d'une intégrale)	82
[R III. 9]	(Exemples d'études d'intégrabilité)	82
[R III. 10]	(Calcul d'une intégrale)	84
[R III. 11]	(Équivalent d'une intégrale)	85
[R III. 12]	(Intégration de $o$ )	85
[R III. 13]	(Intégration d'équivalents)	86
<b>IV</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>87</b>
IV.1	Cours	87
IV.1.1	Généralités	87
IV.1.2	Séries de référence	90

IV.1.3	Séries à termes positifs . . . . .	91
IV.1.4	Comparaisons séries-intégrales . . . . .	92
IV.1.5	Étude des séries complexes ou de signe quelconque . . . . .	93
IV.1.6	Théorème spécial des séries alternées . . . . .	94
IV.1.7	Produit de Cauchy de deux séries . . . . .	95
IV.2	Questions . . . . .	96
IV.3	Éclairages . . . . .	99
IV.4	Réponses . . . . .	104
[R IV. 1]	(Découpage et epsilon) . . . . .	104
[R IV. 2]	(Étude d'une suite récurrente) . . . . .	105
[R IV. 3]	(Étude d'une suite implicite) . . . . .	106
[R IV. 4]	(Condition de convergence de $\sum u_n v_n$ ) . . . . .	108
[R IV. 5]	(Nature de séries) . . . . .	108
[R IV. 6]	(Utilisation du critère de d'Alembert) . . . . .	109
[R IV. 7]	(A propos du théorème d'équivalence) . . . . .	111
[R IV. 8]	(Utilisation d'un développement limité) . . . . .	111
[R IV. 9]	(Transformation d'Abel) . . . . .	112
[R IV. 10]	(Comparaison série-intégrale) . . . . .	113
[R IV. 11]	(Utilisation d'un lien suite-série) . . . . .	114
[R IV. 12]	(Groupement de termes) . . . . .	114
[R IV. 13]	(Calcul d'une intégrale) . . . . .	115
[R IV. 14]	(Sommes de séries exponentielles et géométriques) . . . . .	117
[R IV. 15]	(Un produit de Cauchy) . . . . .	118
[R IV. 16]	(Estimation de la série harmonique) . . . . .	119
[R IV. 17]	(Transformation d'Abel : le retour) . . . . .	119
[R IV. 18]	(Somme de la série harmonique alternée) . . . . .	121
[R IV. 19]	(Impact de l'ordre des termes) . . . . .	121
[R IV. 20]	(Équivalent d'un reste de série exponentielle) . . . . .	122
[R IV. 21]	(Valeur approchée d'une somme) . . . . .	123
[R IV. 22]	(Amélioration du critère de d'Alembert) . . . . .	123
[R IV. 23]	(Série-intégrale pour une fonction non monotone) . . . . .	124
<b>V</b>	<b>Compléments d'algèbre linéaire</b>	<b>127</b>
V.1	Cours . . . . .	128
V.1.1	Produits d'espaces vectoriels . . . . .	128
V.1.2	Sommes de sous-espaces vectoriels . . . . .	128
V.1.3	Sommes directes . . . . .	129
V.1.4	En dimension finie . . . . .	130
V.1.5	Projecteurs et symétries . . . . .	132
V.1.6	Matrices par blocs et sous-espaces stables . . . . .	134

V.1.7	Matrices semblables . . . . .	137
V.1.8	Formes linéaires et hyperplans . . . . .	138
V.1.9	Trace . . . . .	139
V.1.10	Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	140
V.2	Questions . . . . .	142
V.3	Éclairages . . . . .	145
V.4	Réponses . . . . .	147
[R V. 1]	(Caractérisation d'une symétrie) . . . . .	147
[R V. 2]	(Caractérisation d'un projecteur dans $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	147
[R V. 3]	(Dimension de $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	148
[R V. 4]	(Déterminant d'un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	149
[R V. 5]	(Inverse d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	149
[R V. 6]	(Propriétés de la somme de deux projecteurs) . . . . .	150
[R V. 7]	(Matrices par blocs) . . . . .	152
[R V. 8]	(Matrice semblable à une matrice nilpotente) . . . . .	153
[R V. 9]	(Déterminant d'une matrice tridiagonale) . . . . .	154
[R V. 10]	(Chaîne des noyaux) . . . . .	155
[R V. 11]	(Chaîne des images) . . . . .	155
[R V. 12]	(Inverse et endomorphisme nilpotent) . . . . .	156
[R V. 13]	(Bijection réciproque et polynôme annulateur) . . . . .	156
[R V. 14]	(Isomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ vers son dual) . . . . .	157
[R V. 15]	(Caractérisation d'un isomorphisme de $E^*$ dans $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	157
[R V. 16]	(Matrice de trace nulle) . . . . .	158
[R V. 17]	(Puissances d'une matrice et polynôme annulateur) . . . . .	160
<b>VI</b>	<b>Réduction</b> . . . . .	<b>161</b>
VI.1	Cours . . . . .	161
VI.1.1	Éléments propres d'un endomorphisme . . . . .	161
VI.1.2	Éléments propres d'une matrice carrée . . . . .	163
VI.1.3	Éléments propres des endomorphismes en dimension finie . . . . .	165
VI.1.4	Théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	166
VI.1.5	Multiplicité d'une valeur propre . . . . .	167
VI.1.6	Diagonalisation en dimension finie . . . . .	168
VI.1.7	Diagonalisation des matrices carrées . . . . .	169
VI.1.8	Trigonalisation en dimension finie . . . . .	171
VI.2	Questions . . . . .	172
VI.3	Éclairages . . . . .	175
VI.4	Réponses . . . . .	178
[R VI. 1]	(Exemples de réductions de matrices) . . . . .	178
[R VI. 2]	(Diagonalisation d'une matrice de $M_2(\mathbb{C})$ ) . . . . .	180

[R VI. 3]	(Diagonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ) . . . . .	180
[R VI. 4]	(Liberté d'une famille de fonctions) . . . . .	181
[R VI. 5]	(Utilisation d'un polynôme annulateur) . . . . .	182
[R VI. 6]	(Trigonalisation dans $M_3(\mathbb{R})$ ) . . . . .	182
[R VI. 7]	(Diagonalisation d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	183
[R VI. 8]	(Diagonalisation d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	184
[R VI. 9]	(Étude d'une suite récurrente linéaire) . . . . .	185
[R VI. 10]	(Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ) . . . . .	187
[R VI. 11]	(Résolution d'une équation matricielle) . . . . .	187
[R VI. 12]	(Réduction d'une matrice circulante) . . . . .	189
[R VI. 13]	(Diagonalisabilité d'un endomorphisme nilpotent) . . . . .	191
[R VI. 14]	(Réduction d'une matrice définie par blocs) . . . . .	191
[R VI. 15]	(Polynôme caractéristique du produit $AB$ ) . . . . .	192
[R VI. 16]	(Matrice $A^2$ diagonalisable, $A$ non diagonalisable) . . . . .	193
[R VI. 17]	(Diagonalisabilité du carré d'un endomorphisme) . . . . .	193
[R VI. 18]	(Puissance d'une matrice $A$ et utilisation de $\chi_A$ ) . . . . .	194
[R VI. 19]	(Codiagonalisation) . . . . .	195
[R VI. 20]	(Matrice compagnon) . . . . .	196
[R VI. 21]	(Densité dans $M_n(\mathbb{C})$ ) . . . . .	197
[R VI. 22]	(Codiagonalisation d'endomorphismes) . . . . .	198
[R VI. 23]	(Localisation des valeurs propres) . . . . .	199
[R VI. 24]	(Un critère de diagonalisabilité) . . . . .	199

<b>VII</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>201</b>
VII.1	Cours . . . . .	201
VII.1.1	Convexité . . . . .	201
VII.1.2	Normes et distances . . . . .	202
VII.1.3	Parties bornées . . . . .	205
VII.1.4	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . . .	205
VII.1.5	Éléments de topologie dans un espace vectoriel normé . . . . .	207
VII.1.6	Applications entre espaces vectoriels normés . . . . .	209
VII.1.7	Continuité des applications multilinéaires . . . . .	217
VII.2	Questions . . . . .	217
VII.3	Éclairages . . . . .	220
VII.4	Réponses . . . . .	223
[R VII. 1]	(Normes non équivalentes) . . . . .	223
[R VII. 2]	(Norme euclidienne sur $M_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	224
[R VII. 3]	(Espace des suites réelles de carré sommable) . . . . .	224
[R VII. 4]	(Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	226
[R VII. 5]	(Matrices commutant avec tout élément de $GL_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	226
[R VII. 6]	(Divergence d'une suite de matrices) . . . . .	227

[R VII. 7] (Continuité de la distance à une partie)	228
[R VII. 8] (Norme dans $\mathcal{L}(E)$ )	228
[R VII. 9] (Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ fermé, borné et convexe)	230
[R VII. 10] (Limite d'une suite de matrices)	231
[R VII. 11] (Norme $p$ sur l'espace des fonctions continues)	231
[R VII. 12] ( $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ sont des fermés)	233
[R VII. 13] (Exponentielle de matrice)	234
[R VII. 14] (Propriétés topologiques de $O_n(\mathbb{R})$ )	235
[R VII. 15] (Norme sur $M_n(\mathbb{C})$ invariante par similitude)	236
[R VII. 16] (Des propriétés topologiques de $SL_n(\mathbb{R})$ )	236
[R VII. 17] (Théorème de Hahn-Banach)	237
<b>VIII Dérivation</b>	<b>239</b>
VIII.1 Cours	239
VIII.1.1 Dérivabilité	239
VIII.1.2 Opérations sur les dérivées	241
VIII.1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	243
VIII.2 Questions	246
VIII.3 Éclairages	247
VIII.4 Réponses	248
[R VIII. 1] (Dérivée d'une fonction matricielle)	248
[R VIII. 2] (Dérivée d'une fonction matricielle)	249
[R VIII. 3] (Dérivée d'une application)	250
[R VIII. 4] (Calcul d'un vecteur tangent)	250
[R VIII. 5] (Équation différentielle vectorielle)	251
[R VIII. 6] (Wronskien)	252
<b>IX Suites et séries de fonctions</b>	<b>253</b>
IX.1 Cours	253
IX.1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions	253
IX.1.2 Modes de convergence d'une série de fonctions	255
IX.1.3 Régularité de la limite d'une suite de fonctions	257
IX.1.4 Régularité de la somme d'une série de fonctions	259
IX.1.5 Dérivation terme à terme d'une série de fonctions	260
IX.2 Questions	262
IX.3 Éclairages	265
IX.4 Réponses	267
[R IX. 1] (Convergences de suites de fonctions)	267
[R IX. 2] (Convergences de séries de fonctions)	269
[R IX. 3] (Preuve de non-convergence uniforme)	271
[R IX. 4] (Non-permutabilité des symboles $\lim$ et $f$ )	271

[R IX. 5] (Limite usuelle) . . . . .	272
[R IX. 6] (Somme d'une série d'intégrales) . . . . .	273
[R IX. 7] (Régularité de la somme d'une série de fonctions) . . . . .	274
[R IX. 8] (Somme de classe $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions) . . . . .	275
[R IX. 9] (Continuité de la somme d'une série de fonctions) . . . . .	276
[R IX. 10] (Étude d'une somme de série de fonctions) . . . . .	277
[R IX. 11] (Étude d'une somme de séries de fonctions) . . . . .	278
[R IX. 12] (Étude d'une somme d'une série de fonctions) . . . . .	280
[R IX. 13] (Une série de fonctions non monotones) . . . . .	282

## X Endomorphismes des espaces

<b>euclidiens</b>	<b>285</b>
X.1 Cours . . . . .	285
X.1.1 Rappels de PCSI . . . . .	285
X.1.2 Isométries vectorielles . . . . .	292
X.1.3 Matrices orthogonales . . . . .	294
X.1.4 Isométries vectorielles en dimension 2 . . . . .	296
X.1.5 Angles et rotations vectorielles . . . . .	296
X.1.6 Réflexions vectorielles du plan . . . . .	298
X.1.7 Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques . . . . .	299
X.1.8 Autoadjoints positifs et définis positifs . . . . .	300
X.2 Questions . . . . .	301
X.3 Éclairages . . . . .	304
X.4 Réponses . . . . .	307
[R X. 1] (Un produit scalaire dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ) . . . . .	307
[R X. 2] (Application linéaire conservant la distance) . . . . .	309
[R X. 3] (Polynômes de Tchebychev et produit scalaire) . . . . .	309
[R X. 4] (Produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$ ) . . . . .	311
[R X. 5] (Famille orthogonale de polynômes) . . . . .	312
[R X. 6] (Un sous-espace vectoriel de $S(\mathbb{R}_n[X])$ ) . . . . .	313
[R X. 7] (Distance à un sous-espace) . . . . .	314
[R X. 8] ("Racine carrée" d'un endomorphisme de $S^+(E)$ ) . . . . .	316
[R X. 9] ("Racine carrée" d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) . . . . .	318
[R X. 10] (Coefficients d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) . . . . .	319
[R X. 11] (Endomorphismes préservant l'orthogonalité) . . . . .	319
[R X. 12] (Spectre d'une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	320
[R X. 13] (Co-réduction dans $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) . . . . .	321
[R X. 14] (Déterminants de matrices de $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) . . . . .	321
[R X. 15] (Une bijection de $A_n(\mathbb{R})$ vers $SO_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	322
[R X. 16] (Condition de stabilité de $O_n(\mathbb{R})$ par similitude) . . . . .	323



<b>XI</b>	<b>Séries entières</b>	<b>325</b>
XI.1	Cours . . . . .	325
XI.1.1	Définition et rayon de convergence . . . . .	325
XI.1.2	Calcul du rayon de convergence . . . . .	326
XI.1.3	Régularité de la somme d'une série entière . . . . .	328
XI.1.4	Développement en série entière . . . . .	330
XI.1.5	Développements usuels . . . . .	331
XI.1.6	Fonctions exponentielles et fonctions rationnelles d'une variable complexe . . . . .	333
XI.2	Questions . . . . .	334
XI.3	Éclairages . . . . .	336
XI.4	Réponses . . . . .	339
[R XI. 1]	(Calculs de rayons de convergence) . . . . .	339
[R XI. 2]	(Calculs de sommes) . . . . .	341
[R XI. 3]	(Fonctions de classe $C^\infty$ ) . . . . .	343
[R XI. 4]	(Utilisation de la série de Taylor associée) . . . . .	344
[R XI. 5]	(Utilisation d'une équation différentielle) . . . . .	345
[R XI. 6]	(Détermination d'un rayon de convergence) . . . . .	346
[R XI. 7]	(Continuité en $R$ ) . . . . .	347
[R XI. 8]	(Utilisation d'une équation) . . . . .	348
[R XI. 9]	(Utilisation d'une équation différentielle) . . . . .	350
[R XI. 10]	(Série entière à coefficients entiers) . . . . .	351
<b>XII</b>	<b>Intégration avancée</b>	<b>353</b>
XII.1	Cours . . . . .	353
XII.2	Questions . . . . .	359
XII.3	Éclairages . . . . .	360
XII.4	Réponses . . . . .	362
[R XII. 1]	(Interversion limite-intégrale) . . . . .	362
[R XII. 2]	(Interversion limite-intégrale) . . . . .	363
[R XII. 3]	(Interversion limite-intégrale) . . . . .	364
[R XII. 4]	(Interversion limite-intégrale) . . . . .	365
[R XII. 5]	(Interversion limite-intégrale) . . . . .	366
[R XII. 6]	(Interversion somme infinie-intégrale) . . . . .	367
[R XII. 7]	(Interversion somme infinie-intégrale) . . . . .	368
[R XII. 8]	(Continuité de la transformée de Fourier) . . . . .	370
[R XII. 9]	(Équivalent d'une intégrale) . . . . .	370
[R XII. 10]	(Dérivation et intégrale à paramètre) . . . . .	371
[R XII. 11]	(Dérivées successives et intégrale à paramètre) . . . . .	374

<b>XIII</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>375</b>
XIII.1	Cours . . . . .	375
XIII.1.1	Différentielle des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	375
XIII.1.2	Différentielle et gradient . . . . .	377
XIII.1.3	Règle de la chaîne . . . . .	378
XIII.1.4	Dérivées partielles d'ordre 2 . . . . .	380
XIII.1.5	Recherches d'extrema . . . . .	382
XIII.2	Questions . . . . .	384
XIII.3	Éclairages . . . . .	386
XIII.4	Réponses . . . . .	388
	[R XIII. 1] (Recherche d'extrema) . . . . .	388
	[R XIII. 2] (Extrema d'une fonction) . . . . .	390
	[R XIII. 3] (Recherche d'extrema sur un fermé) . . . . .	391
	[R XIII. 4] (Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	392
	[R XIII. 5] (Minimum et convexité sur $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	395
	[R XIII. 6] (Fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	395
	[R XIII. 7] (Convexité et matrice hessienne) . . . . .	396
	[R XIII. 8] (Résolution d'une équation aux dérivées partielles) . . . . .	397
	[R XIII. 9] (Extremum relativement à la sphère unité) . . . . .	399
	[R XIII. 10] (Gradient d'une fonction définie sur $M_n(\mathbb{R})$ ) . . . . .	399
	[R XIII. 11] (Minimum d'une fonction convexe) . . . . .	400
<b>XIV</b>	<b>Familles sommables</b>	<b>403</b>
XIV.1	Cours . . . . .	403
XIV.1.1	Dénombrabilité . . . . .	403
XIV.1.2	Sommes de familles de réels positifs . . . . .	404
XIV.1.3	Familles sommables de nombres complexes . . . . .	406
XIV.2	Questions . . . . .	409
XIV.3	Éclairages . . . . .	410
XIV.4	Réponses . . . . .	411
	[R XIV. 1] (Existence d'une somme) . . . . .	411
	[R XIV. 2] (Exemple de famille non sommable) . . . . .	411
	[R XIV. 3] (Une interversion de sommes infinies) . . . . .	413
	[R XIV. 4] (Un calcul de somme double de réels positifs) . . . . .	414
	[R XIV. 5] (Somme double de réels) . . . . .	415
	[R XIV. 6] (Sommabilité d'une famille de réels positifs) . . . . .	416
	[R XIV. 7] (Développement en série entière) . . . . .	417

<b>XV</b>	<b>Variables aléatoires discrètes</b>	<b>419</b>
XV.1	Cours . . . . .	419
XV.1.1	Espaces probabilisés . . . . .	419
XV.1.2	Probabilité . . . . .	421
XV.1.3	Probabilité sur un ensemble dénombrable ou fini . . . . .	423
XV.1.4	Probabilités conditionnelles . . . . .	423
XV.1.5	Indépendance . . . . .	425
XV.1.6	Variables aléatoires discrètes . . . . .	426
XV.1.7	Couples de variables aléatoires . . . . .	428
XV.1.8	Espérance d'une variable aléatoire discrète . . . . .	429
XV.1.9	Variance d'une variable aléatoire réelle discrète . . . . .	432
XV.1.10	Indépendance de variables aléatoires . . . . .	435
XV.1.11	Séries génératrices d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ . . . . .	438
XV.1.12	Lois usuelles . . . . .	439
XV.1.13	Inégalités probabilistes . . . . .	441
XV.2	Questions . . . . .	442
XV.3	Éclairages . . . . .	447
XV.4	Réponses . . . . .	450
[R XV. 1]	(Tirages dans une urne) . . . . .	450
[R XV. 2]	(Fonctions de variables de même loi géométrique) . . . . .	451
[R XV. 3]	(Espérance conditionnelle) . . . . .	454
[R XV. 4]	(Loi binomiale négative) . . . . .	455
[R XV. 5]	(Points fixes d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ) . . . . .	456
[R XV. 6]	(Variables décorrélatées mais non indépendantes) . . . . .	457
[R XV. 7]	(Autour des propriétés de l'espérance) . . . . .	457
[R XV. 8]	(Couplage loi de Poisson - loi binomiale) . . . . .	458
[R XV. 9]	(Fonctions génératrices et lois de Poisson) . . . . .	459
[R XV. 10]	(Les événements rares) . . . . .	459
[R XV. 11]	(Somme d'un nombre variable de termes) . . . . .	461
[R XV. 12]	(Une première inégalité) . . . . .	462
[R XV. 13]	(Encore deux inégalités) . . . . .	463
[R XV. 14]	(Utilisation des fonctions génératrices) . . . . .	464
[R XV. 15]	(Espèce en voie d'extinction) . . . . .	465
[R XV. 16]	(La bestiole se promène sur un triangle) . . . . .	467
[R XV. 17]	(Convergence uniforme d'une suite de polynômes) . . . . .	469
[R XV. 18]	(Somme de variables et fonction génératrice) . . . . .	471
[R XV. 19]	(Convergence presque sûre) . . . . .	473
[R XV. 20]	(Calcul d'un équivalent) . . . . .	474