Matthieu Fèvre, Roland Gorlier

Questions de maths

- Mémentos de cours
- Questions et exercices
- Solutions détaillées

PC
PC*

ellipses

Chapitre I
Petits outils

Ce chapitre a pour objectif de réviser quelques notions et techniques usuelles développées pendant l'année de sup. Il ne se veut pas une révision exhaustive du programme de PCSI mais permet un retour sur des notions essentielles ou parfois vite oubliées. On revient en particulier dans ce chapitre sur un certain nombre de points de calculs et sur des méthodes permettant d'obtenir des majorations ou minorations.

I.1 - Cours

I.1.1 - Généralités

[Définition I.1] Segment de $\mathbb{R}$
On appelle **segment** de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme
$[a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$, où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$.

[Définition I.2] Intervalle
On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ les ensembles de l'une des formes suivantes :
$]a,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x < b \right\}$, $[a,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$,
$]a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leq b \right\}$, $[a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$,
$]-\infty,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq b \right\}$, $]-\infty,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < b \right\}$,
$[a,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \right\}$, $]a,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \right\}$,
$]-\infty,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\infty < x < +\infty \right\}$. (Où a et b désignent deux réels).

[Propriété I.3] Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$. Autrement dit, un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall(x,y) \in K^2, [x,y] \subset K$.

✍ *On veillera à bien distinguer les trois notions : sous-ensemble (ou partie de $\mathbb{R}$), intervalle de $\mathbb{R}$, segment de $\mathbb{R}$. On comprendra qu'un intervalle est un type particulier de sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un segment de $\mathbb{R}$ est un exemple d'intervalle de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle fermé et borné.*

[Propriété I.4] Inégalités triangulaires
Si u et v sont deux complexes alors :

$$|u+v| \leq |u| + |v|.$$

$$||u| - |v|| \leq |u-v| \leq |u| + |v|.$$

On a l'égalité $|u+v| = |u| + |v|$ si et seulement si u et v sont positivement liés, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Si $u_1, \ldots, u_n$ sont des complexes, alors : $\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.

I.1.2 - Fonctions continues

Dans toute la suite, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

[Définition I.5] Continuité sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f est **continue** sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

✍ *On évitera de parler de fonctions continues sur des ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des intervalles, on risquerait alors d'être tenté d'utiliser les théorèmes qui suivent dans des cas où ils ne sont pas valables.*

[Propriété I.6] Théorème des valeurs intermédiaires
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$.
Soient α et β deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si α et β appartiennent à $f(I)$ ou sont limites de suites d'éléments de $f(I)$, alors tout réel strictement compris entre α et β appartient à $f(I)$. On retient que l'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

[Propriété I.7] Théorème des bornes atteintes
Toute fonction (réelle ou complexe) continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.

♥ *En particulier, si f est une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment K, alors sa dérivée f' est bornée sur K.*

I.1.3 - Intégration des fonctions continues

[Propriété I.8] Théorème fondamental de l'analyse
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{C}$.
Alors f admet des primitives, et l'on peut, pour tout réel a de I, définir la fonction de I vers $\mathbb{C}$: $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est l'une des primitives de f.
C'est la seule primitive de la fonction f qui s'annule en a.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.8 p. 24]

[Propriété I.9] Intégrale de fonctions positives
Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. Soit f une fonction continue du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

(−) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

(−) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,
alors : $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$.

✍ *On déduit du premier item que si f et g sont continues sur le segment $[a, b]$ et $a \leq b$, alors : $f \leq g \implies \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.*
Il faudra cependant veiller à ce que les bornes a et b soient dans l'ordre croissant. [Q I.7 p. 23], [Q I.8 p. 24]

[Propriété I.10] Sommes de Riemann
Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

♥ *On doit penser à cette formule lorsque l'on s'intéresse aux calculs de limites d'expressions de la forme* $\sum_{k=0}^{n} u_{n,k}$.

♥ *On peut se ramener à* $a = 0$ *et* $b = 1$ *avec une fonction* f *ad hoc.*

I.1.4 - Fonctions dérivables

[Propriété I.11] Dérivabilité d'une fonction
Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. Les propositions suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est dérivable en a.
ii) Il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$.
iii) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire qu'il existe un complexe d tel qu'au voisinage de a on ait :

$$f(x) = f(a) + d(x - a) + \underset{a}{o}(x - a).$$

Dans ce cas, $f'(a) = d$.

Une fonction est dérivable sur un intervalle si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

[Propriété I.12] Caractérisation des fonctions constantes, monotones
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur I.
($-$) La fonction f est constante sur l'intervalle I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur l'intervalle I.
($-$) La fonction f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est positive sur l'intervalle I.
($-$) La fonction f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est négative sur l'intervalle I.
($-$) Si la fonction f' est strictement positive (respectivement strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I, alors la fonction f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

✍ *Attention, ce théorème ne s'applique pas lorsque l'on remplace l'intervalle* I *par une réunion d'intervalles.* [Q I.5 p. 23]

✍ *Le dernier point permet d'affirmer qu'une fonction est strictement monotone même si sa dérivée s'annule en un nombre fini de points. Par exemple :* $x \mapsto x^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

[Propriété I.13] Théorème de la bijection
Si f est une fonction réelle strictement monotone définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, alors f est bijective.
Les bornes de l'intervalle image sont les limites de f en a et b.
La bijection réciproque est de même monotonie que f, définie et continue sur l'intervalle image.

[Propriété I.14] Théorème de Rolle
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Si
(−) la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,
(−) dérivable (au moins) sur l'ouvert $]a, b[$,
(−) et vérifie $f(a) = f(b)$,
alors,
il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

✍ *Le résultat n'est pas valable pour une application à valeurs complexes.*
♥ *Ce théorème permet de prouver l'existence de zéros des dérivées successives d'une fonction réelle qui s'annule plusieurs fois.*

[Propriété I.15] Inégalité des accroissements finis
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une application de I vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que le réel K soit un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle I. Alors, la fonction f est K-**lipschitzienne** sur I, autrement dit :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq K\,|b - a|\,.$$

♥ *S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'| \leq k$, on dit que f est* ***contractante****, et l'on peut utiliser ce théorème pour prouver que des suites récurrentes vérifiant une relation de type $u_{n+1} = f(u_n)$ convergent.*
On peut aussi en déduire une estimation de l'écart entre u_n et sa limite pour une valeur de n donnée.

[Propriété I.16] Théorème limite de la dérivée
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. Si
(−) la fonction f est continue sur I,
(−) la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$,
(−) il existe un complexe ℓ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$,

alors,

la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.
La fonction f' est donc continue en a et la fonction f est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

♥ *Si f est une fonction à valeurs réelles continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.*

[Propriété I.17] Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit $a \in I$. Si
$(-)$ la fonction f est continue sur I,
$(-)$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$,
$(-)$ si pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, il existe un complexe ℓ_i tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f^{(i)}(x) = \ell_i$,
alors,
la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

♥ *Soit f une fonction définie par une expression de type :*
$$f : x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}.$$
Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, a[\cap I$ et $[a, +\infty[\cap I$, ce théorème permet, s'il s'applique, de prouver rapidement que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I). [Q I.9 p. 24]

I.1.5 - Convexité

[Définition I.18] Fonction convexe, concave
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f est **convexe** sur I si l'on a :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$
La fonction f est **concave** si et seulement si $-f$ est convexe et l'on a :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

[Propriété I.19] Interprétation graphique
La fonction f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x et y de I, pour les abscisses comprises entre x et y, la courbe représentative de f est au-dessous de la corde reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

La fonction f est concave si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de la corde reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

♥ *Cette propriété est rarement utilisée pour prouver qu'une fonction réelle est convexe. Si la régularité de la fonction le permet, on utilise le plus souvent la propriété [P I.21] pour prouver qu'une fonction est convexe.* [Q I.6 p. 23]

[Propriété I.20] Convexité des fonctions dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est convexe sur I.
ii) La fonction f' est croissante sur I.
iii) La courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, \ f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est concave sur I.
ii) La fonction f' est décroissante sur I.
iii) L ; ;t a courbe représentative de la fonction f est en-dessous de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, \ f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.6 p. 23]

[Propriété I.21] Convexité des fonctions deux fois dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur l'intervalle I. On note f'' sa dérivée seconde.
$(-)$ La fonction f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.
$(-)$ La fonction f est concave si et seulement si f'' est négative sur I.

♥ *Ces propriétés permettent d'établir des inégalités assez fines.*
On montre qu'une fonction f donnée est convexe à l'aide du signe de f'', on établit ensuite un encadrement de f à l'aide des propriétés [P I.19] et [P I.20]. [Q I.6 p. 23]

I.1.6 - Formules de Taylor

[Propriété I.22] Formule de Taylor-Young
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a. On a le développement limité suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

✍ *Cette formule, comme le sparadrap, est à usage local. Elle ne permet pas, par exemple, d'établir une égalité sur tout un intervalle.*

[Propriété I.23] Formule de Taylor avec reste intégral
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I. On a l'égalité suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.11 p. 24]

[Propriété I.24] Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I. Soit M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur le segment de bornes a et b. Alors :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}\right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

✍ *la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment de bornes a et b. Le théorème des bornes atteintes [P I.7] garantit l'existence d'un majorant M.*
✍ *Pour ces deux dernières formules, on peut avoir $a \leq b$ ou $b \leq a$.*
✍ *Pour obtenir ces deux dernières formules à l'ordre n, on remarque qu'on utilise une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

I.1.7 - Formule de Stirling

[Propriété I.25] Équivalent de la factorielle

$$n! \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.12 p. 24]