

Table des matières

Chapitre 1 Dénombrements dans un ensemble fini

1	Ensembles et opérations	2
1.1	Inclusion	2
1.2	Réunion de deux parties de E	2
1.3	Intersection de deux parties de E	3
1.4	Parties disjointes	4
1.5	Complémentaire d'une partie de E	4
1.6	Partition de E	5
2	Produit d'ensembles	6
3	Cardinal d'un ensemble	6
4	Permutations	8
4.1	Exemple	8
4.2	Définition	8
4.3	Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments	8
4.4	Quelques exemples	9
5	Arrangements de n objets p à p	10
5.1	Exemple	10
5.2	Définition	10
5.3	Calcul du nombre d'arrangements	11

6	Combinaisons de n objets p à p.	12
6.1	Exemple	12
6.2	Définition	12
6.3	Calcul du nombre de combinaisons	12
6.4	Expression de $\binom{n}{p}$ avec les factorielles	14
7	Les formules classiques avec les combinaisons	14
7.1	Valeurs aux bornes	14
7.2	Une forme de symétrie	15
7.3	Le triangle de Pascal	15
7.4	La formule du binôme de Newton	16
7.5	La somme $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$	16
7.6	D'autres sommes du même style	17
8	Dérangements de n éléments	17

Chapitre 2 Probabilités sur un ensemble fini

1	Univers mathématique fini	38
1.1	Description de la situation	38
1.2	Poids d'une partie de E	38
1.3	Propriétés du poids d'une partie	39
1.4	Un peu de sophistication	40
2	Le lancer d'un dé : modélisation	41
2.1	Un seul lancer du dé	42
2.2	Un lancer de deux dés simultanés	42
3	Univers associé à une expérience aléatoire	43
3.1	Définition d'un univers de probabilité	43
3.2	Evènement dans cet univers	44
3.3	Probabilité sur Ω	45
3.4	Seconde définition d'une probabilité sur un univers fini Ω	46
4	Premiers exemples de modélisation	47
5	Le cas fondamental de l'équiprobabilité	52
6	Résolution plus élémentaire des exemples précédents	53
7	Probabilités conditionnelles et évènements indépendants	57
7.1	Idée courante de la probabilité conditionnelle	57
7.2	Définition de la probabilité conditionnelle $P(A/B)$	58

8	Evènements indépendants	59
9	Exemple fondamental de modélisation dans le cas de non-équiprobabilité : lancers successifs d'une pièce truquée	60

Chapitre 3 Probabilités conditionnelles

1	Introduction	78
2	Définition et calcul de la probabilité conditionnelle $P(A/B)$	79
3	Formule élémentaire de Bayes	80
4	Formule élémentaire des probabilités totales	81
	4.1 Exemple	82
	4.2 Formule des probabilités totales	83
	4.3 Application fondamentale	83
5	Formule générale des probabilités totales	84
6	Représentation avec un graphe	86
7	Probabilité conditionnelle sachant plusieurs évènements	87

Chapitre 4 Évènements indépendants - Répétitions indépendantes d'une expérience

1	Deux évènements indépendants. Intuition courante et caractérisation mathématique	106
	1.1 Intuition courante	106
	1.2 Caractérisation mathématique	106
	1.3 Indépendance et évènements contraires	107
2	Indépendance de $N \geq 3$ évènements	108
	2.1 Indépendance de trois évènements	108
	2.2 Un nombre quelconque d'évènements	108
	2.3 Dans la pratique	109
3	Répétition n fois de suite et de façons indépendantes d'une même expérience	109
	3.1 Le cadre et le but	109
	3.2 Probabilité d'avoir k succès parmi les n expériences	110
	3.3 Exemples	111
4	Temps d'attente du premier succès	112
	4.1 Le cadre	112
	4.2 Calcul de la probabilité du temps d'attente	113
	4.3 Le temps d'attente peut-il être infini ?	113
	4.4 Exemples	114

5	Probabilité produit. Univers associé à des évènements indépendants	114
5.1	L'univers Ω^2	115
5.2	L'univers $\Omega^{\mathcal{P}}$	116

Chapitre 5 Univers infinis - Le cas dénombrable

1	Ensemble dénombrable. Notion de série	124
1.1	Ensemble dénombrable	124
1.2	Notion de série	125
1.3	La série géométrique	125
1.4	La série exponentielle	126
1.5	Série absolument convergente	126
1.6	Importance de l'ordre des termes	127
2	Univers dénombrable	128
3	L'univers associé au temps d'attente du premier succès	130
4	Les enfants d'une famille	131
5	Une première idée du cas non dénombrable. Notion de tribu	132

Chapitre 6 Variables aléatoires discrètes

1	Comment ça se passe en pratique	136
1.1	Exemple 1	136
1.2	Exemple 2	137
1.3	En pratique	137
2	Cas d'un univers fini. Définition d'une variable aléatoire. Loi d'une variable aléatoire	138
2.1	Variable aléatoire sur Ω	138
2.2	Loi de probabilité de X	139
2.3	Histogramme en bâton d'une variable aléatoire	142
3	Cas d'un univers dénombrable	143
3.1	Variable aléatoire sur Ω	144
3.2	Loi de la variable aléatoire X	144
4	Les variables aléatoires incontournables	146
4.1	Variable aléatoire suivant une loi uniforme	146
4.2	Variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p	146
4.3	Variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$	146
4.4	Variable aléatoire suivant une loi hypergéométrique	149
4.5	Variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p	150
4.6	Variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ	150

5	Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète	151
6	Somme de variables aléatoires	155
7	Variables aléatoires indépendantes	155
7.1	Deux variables aléatoires indépendantes	155
7.2	Indépendance de n variables aléatoires	157
8	Deux exemples fondamentaux de sommes de variables aléatoires indépendantes	158
8.1	Somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p	158
8.2	Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson	159
9	Utilisation des logiciels commerciaux	160
9.1	Loi binomiale $B(n, p)$	161
9.2	Loi de Poisson $P(\lambda)$	161
9.3	Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, M, n)$	162

Chapitre 7 Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

1	Espérance d'une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs	164
1.1	Définition de l'espérance	164
1.2	Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme	166
1.3	Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli ...	166
1.4	Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$	166
1.5	Remarque : théorème de transfert	167
2	Propriétés de l'espérance	167
3	Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale ou une loi hypergéométrique	168
3.1	Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$	168
3.2	Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, M, n)$	169
4	Espérance d'une variable aléatoire prenant une infinité de valeurs	169
5	Quelques formules mathématiques utiles	171
6	Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou une loi de Poisson	172
6.1	Loi géométrique de paramètre p	172
6.2	Loi de Poisson de paramètre λ	172

7	Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes	173
8	Variance et écart-type d'une variable aléatoire	174
8.1	Définition de la variance	175
8.2	Autre écriture de la variance	175
9	Variances des grandes lois classiques	176
9.1	Loi uniforme	176
9.2	Loi de Bernoulli	177
9.3	Loi binomiale $B(n, p)$	177
9.4	Loi géométrique	177
9.5	Loi de Poisson	178
10	Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes	178
10.1	Expression de la variance d'une somme $X + Y$ quelconque	179
10.2	Variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes	179
10.3	Variance de la somme de n variables aléatoires indépendantes	180
10.4	Variance de la loi binomiale	180
11	Covariance de deux variables aléatoires	181
11.1	Définition	181
11.2	Coefficient de corrélation de X et Y	181
11.3	Variance de la loi hypergéométrique	182
11.4	Un peu d'algèbre	183
12	Récapitulatif des grandes lois classiques	184
13	Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}	186
13.1	Définition	186
13.2	Les exemples fondamentaux	186
13.3	Calcul de l'espérance et de la variance de X	187
13.4	Autre expression de la fonction génératrice	188
13.5	Fonction génératrice et indépendance	188

Chapitre 8 Majorations et convergences

1	Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale	226
2	Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson	229
3	Autres approximations	231
4	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	232
4.1	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	232
4.2	Exemple fondamental	234

5	Bienaimé-Tchebychev, Bernoulli et Binomiale	235
6	Loi faible des grands nombres	236
6.1	Enoncé de la loi	236
6.2	Cas particulier des variables de Bernoulli.....	236
6.3	Généralisation à p caractères	237
7	Convergence en probabilité	238

Chapitre 9 La loi normale - Approximation par la loi normale - Lois du χ^2 et de Student

1	Préambule mathématique	248
2	Variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}	249
3	Variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$	250
3.1	Définition.....	250
3.2	Table de valeurs numériques	251
3.3	Espérance et variance	252
4	Variables aléatoires suivant la loi normale d'espérance m et de variance σ^2	253
4.1	Définition.....	253
4.2	Calculs numériques avec $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	254
5	Utilisation des logiciels commerciaux	255
6	Combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales	255
7	Théorème de la limite centrée	257
8	Approximation de la loi binomiale par la loi normale	258
9	Comment appliquer cette approximation binomiale-normale	259
10	Loi du χ^2 à n degrés de liberté	261
10.1	La définition qui nous sera utile dans la suite	261
10.2	La définition comme loi continue, mais que nous n'utiliserons pas	262
10.3	Espérance et variance du $\chi^2(n)$	262
10.4	Un théorème de Cochran	263
10.5	Calculs numériques par table et logiciels	264
10.6	Asymétrie de la distribution du χ^2	264
10.7	Approximation du $\chi^2(n)$ pour n grand	265

11	Loi de Student à n degrés de liberté	265
11.1	La définition que nous utiliserons	265
11.2	Autre définition que nous n'utiliserons pas	266
11.3	Symétrie de la distribution	266
11.4	Valeurs numériques et logiciels	266
11.5	Approximation de la loi de Student pour n grand	267
12	Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$	267

Chapitre 10 Intervalle de fluctuation - Intervalle de confiance d'une proportion

1	Introduction	284
2	Seuil de risque et niveau de confiance	285
3	Intervalle de fluctuation d'une proportion	286
4	Intervalle de confiance d'une proportion	289
4.1	Modélisation théorique	289
4.2	Obtenir numériquement l'intervalle de confiance de p	291
4.3	Commentaire sur la modélisation	292
5	Première approche de la notion d'estimateur	292

Chapitre 11 Estimateurs - Espérance ou variance

1	Position du problème	302
2	Définition	302
3	Estimateur biaisé ou non biaisé	303
4	Estimateur consistant	304
4.1	Définition	304
4.2	Une condition suffisante	304
5	Estimateur de l'espérance	305
6	Estimateurs de la variance	306
6.1	Cas particulier où l'espérance m est connue	306
6.2	Cas général où l'espérance m est inconnue	308

Chapitre 12 Intervalle de confiance de l'espérance et de la variance

1	Intervalle de confiance de l'espérance lorsque la variance est connue	312
----------	--	-----

2	Intervalle de confiance de l'espérance lorsque la variance est inconnue	313
3	Intervalle de confiance de la variance lorsque l'espérance est connue	316
4	Intervalle de confiance de la variance lorsque l'espérance est inconnue	317

Chapitre 13 Tests d'hypothèses - Principes généraux

1	Un exemple simple complet	328
1.1	Résolution du dilemme « la pièce est-elle correcte ? »	328
1.2	Analyse détaillée de la démarche	329
2	Exemples de tests d'hypothèse	330
3	Hypothèse nulle et hypothèse alternative	331
4	Fixer un risque maximal d'erreur de la conclusion	332
5	Fixer un paramètre à tester et une variable de test	333
6	Fixer la règle de décision. Zone de rejet et zone d'acceptation	334
6.1	Le principe	334
6.2	Zone de rejet bilatère de H_0	335
6.3	Zone de rejet unilatère à gauche de H_0	337
6.4	Zone de rejet unilatère à droite de H_0	338
7	Les risques de se tromper. La puissance du test	340
7.1	Erreur (ou risque) de première espèce d'un test	340
7.2	Erreur (ou risque) de deuxième espèce d'un test	341
7.3	Comment retenir ces définitions sans se tromper	341
7.4	Puissance d'un test	342

Chapitre 14 Tests d'hypothèses - La pratique

1	Tests d'hypothèse sur une proportion	344
1.1	Test $p = p_0$ contre $p \neq p_0$ avec la loi binomiale proprement dite ..	344
1.2	Test $p = p_0$ contre $p \neq p_0$ avec l'approximation par la loi normale	346
1.3	Test $p = p_0$ contre $p < p_0$ avec la loi binomiale proprement dite ..	347
1.4	Test $p = p_0$ contre $p < p_0$ avec l'approximation par la loi normale	348
1.5	Test $p = p_0$ contre $p > p_0$ avec la loi binomiale proprement dite ..	349
1.6	Test $p = p_0$ contre $p > p_0$ avec l'approximation par la loi normale	350
1.7	Utilisation de la loi de Poisson	352
1.8	Exemple de test $p = p_0$ contre $p = p_1$ et calcul de la puissance ..	354

2	Tests d'hypothèse sur une espérance	355
2.1	Test $m = m_0$ contre $m \neq m_0$ lorsque la variance est connue	356
2.2	Test de $m = m_0$ contre $m \neq m_0$ lorsque la variance est inconnue .	358
2.3	Test $m = m_0$ contre $m < m_0$ lorsque la variance est connue	360
2.4	Test de $m = m_0$ contre $m < m_0$ lorsque la variance est inconnue .	361
2.5	Test $m = m_0$ contre $m > m_0$ lorsque la variance est connue	363
2.6	Test de $m = m_0$ contre $m > m_0$ lorsque la variance est inconnue .	365
2.7	Le test « $m < m_0$ » contre « $m > m_0$ »	367
2.8	Comparaison des espérances de deux échantillons indépendants de même variance connue ou inconnue. Principe général	367
2.9	Comparaison des espérances de deux échantillons indépendants de même variance connue	368
2.10	Comparaison des espérances de deux échantillons indépendants de même variance inconnue	371
3	Tests d'hypothèse sur une variance	375
3.1	Test $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma \neq \sigma_0$	375
3.2	Test $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma < \sigma_0$	378
3.3	Test $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma > \sigma_0$	381
3.4	Test $\sigma \leq \sigma_0$ contre $\sigma > \sigma_0$	383
4	Comparaison de deux variances - Test de Fisher	384
4.1	Le cadre	384
4.2	Le test $H_0 : \sigma_x = \sigma_y$ contre $H_1 : \sigma_x > \sigma_y$	385
4.3	Le test $H_0 : \sigma_x = \sigma_y$ contre $H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y$	386
5	Test d'hypothèse ou intervalle de confiance	388
5.1	Cas de l'espérance	388
5.2	Cas de la variance	389

Chapitre 15 Variables aléatoires continues - Densité de probabilité

1	Univers infini quelconque	424
2	Probabilité sur \mathbb{R} ayant une densité	425
3	Variable aléatoire à densité	426
3.1	Définition	426
3.2	Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue	427
3.3	Espérance	428
3.4	Variance	428
3.5	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	429

4	Comment montrer qu'une variable aléatoire a une densité, et la calculer	429
5	Variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	431
5.1	Loi normale centrée réduite	431
5.2	Espérance et variance	432
5.3	Variables aléatoires suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ d'espérance m et de variance σ^2	432
6	Variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ	433
6.1	Définition mathématique et paramètres	433
6.2	Variable aléatoire sans mémoire	434
7	Variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$	435
8	Loi du χ^2 à n degrés de liberté	437
8.1	La définition qui nous sera la plus utile dans la suite	437
8.2	La densité de la loi du $\chi^2(n)$	438
8.3	Espérance et variance du $\chi^2(n)$	438
9	Loi de Student à n degrés de liberté	439
9.1	La définition que nous utiliserons	439
9.2	La densité de la loi de Student	439
10	Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$	440
11	Variables aléatoires indépendantes	441
11.1	Définition et propriétés immédiates	441
11.2	Densité de la somme $X + Y$ de deux variables indépendantes	442
11.3	Deux exemples typiques	443
12	Loi faible des grands nombres et théorème central limite	443

Chapitre 16 Couples de variables aléatoires discrètes ou continues

1	Couple de variables aléatoires sur un univers fini	468
2	Le cas d'un univers dénombrable	470
3	Couple de variables aléatoires à densité	472
4	Fonction de répartition. Calcul de la densité	475
4.1	Définition	475
4.2	Calcul de la densité à partir de la fonction de répartition	476

5	Lois marginales d'un couple de variables aléatoires	478
5.1	L'idée de base	478
5.2	Le cas discret	479
5.3	Le cas des variables aléatoires à densité	481
5.4	Remarque fondamentale de non-unicité	483
6	Lois conditionnelles dans un couple de variables aléatoires	484
7	Couple de variables aléatoires indépendantes	486
7.1	Variables discrètes	486
7.2	Cas des variables continues à densité	488
8	Récapitulatif	490
9	Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes continues	491
10	Somme de deux variables aléatoires discrètes	493
11	Le théorème de transfert pour les variables discrètes	494
11.1	Théorème pour une variable discrète	495
11.2	Théorème pour un couple de variables discrètes	495
12	Le théorème de transfert et sa grande application pour les variables à densité	496
12.1	Enoncé du théorème de transfert dans \mathbb{R}	497
12.2	Utilisation de ce théorème pour calculer la densité de $h(X)$	497
12.3	Théorème de transfert pour un couple de variables à densité	498
12.4	Calcul de la densité de $Z = h(X, Y)$ connaissant la loi du couple (X, Y)	499
13	Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes	501
14	Retour sur la covariance de deux variables quelconques	502

Chapitre 17 Chaînes de Markov élémentaires - Le cas irréductible en détail

1	Un premier exemple qui converge	538
2	Un deuxième exemple qui ne converge pas	541
3	Définition d'une chaîne de Markov	541
4	Graphe associé à une chaîne de Markov	543
5	La matrice de transition de la chaîne	545
6	Utilisation de la matrice de transition P pour passer du temps n au temps $n + 1$	547
6.1	Ecriture avec des vecteurs lignes	547
6.2	Ecriture avec des vecteurs colonnes	548

7	Transition de l'état n à l'état $n + m$. La matrice P^m	549
8	A propos des matrices stochastiques. Une remarque obscure pour le moment	550
	8.1 Définition	550
	8.2 Une remarque obscure pour le moment	551
9	Chaîne de Markov irréductible	552
10	Chaîne de Markov régulière	553
11	Loi invariante d'une chaîne irréductible	554
12	Convergence d'une chaîne irréductible	556
	12.1 Quelle est la limite éventuelle?	557
	12.2 En terme de matrices	557
13	Les conditions nécessaires et suffisantes de convergence d'une chaîne irréductible	558
	13.1 Enoncés et exemples	558
	13.2 Indications de démonstration	560
14	Calcul explicite de l'état au temps général n	561
15	Chaînes de Markov irréductibles périodiques	562
	15.1 Définition	563
	15.2 Exemples	564
	15.3 Plus généralement	568
16	Chaînes de Markov réductibles	569