

Sabin Lessard

Processus stochastiques

Cours et exercices corrigés

2^e édition



Table des matières

| | |
|--|----------|
| 1. Chaînes de Markov à temps discret..... | 1 |
| 1.1 Introduction | 1 |
| 1.2 *Exemples..... | 2 |
| 1.2.1 Modèle d'Ehrenfest en mécanique statistique..... | 2 |
| 1.2.2 Modèle de Wright-Fisher en génétique des populations..... | 5 |
| 1.2.3 Modèle de bonus-malus en assurance automobile..... | 6 |
| 1.2.4 Modèle de maintenance en théorie de la fiabilité..... | 7 |
| 1.3 Définitions | 8 |
| 1.3.1 Chaîne de Markov à temps discret | 8 |
| 1.3.2 Matrice de transition en n pas..... | 9 |
| 1.3.3 Exemple : le temps d'un jour au suivant | 11 |
| 1.3.4 Exemple : le temps sur deux jours consécutifs | 12 |
| 1.3.5 Chaîne de Markov sur deux états..... | 13 |
| 1.4 Méthode de conditionnement..... | 15 |
| 1.4.1 Exemple : promenade aléatoire dans un labyrinthe..... | 15 |
| 1.4.2 Exemple : jeu de pile ou face | 17 |
| 1.4.3 Exemple : ruine du joueur..... | 19 |
| 1.5 Processus de branchement | 22 |
| 1.5.1 Probabilité d'extinction..... | 22 |
| 1.5.2 Distribution limite de la taille de la population | 27 |
| 1.5.3 Ruine du joueur contre un adversaire infiniment riche..... | 30 |
| 1.6 Classification des états | 32 |
| 1.6.1 Définitions..... | 32 |
| 1.6.2 Exemples..... | 32 |
| 1.6.3 Critères de classification | 35 |
| 1.6.4 Partition des états..... | 35 |
| 1.6.5 Exemple de partition des états | 37 |
| 1.7 Théorème ergodique et distribution stationnaire..... | 38 |
| 1.7.1 Théorème ergodique..... | 38 |
| 1.7.2 Distribution stationnaire..... | 40 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1.7.3 | Matrice de transition doublement stochastique | 40 |
| 1.7.4 | Théorème sur la distribution stationnaire | 40 |
| 1.7.5 | Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini | 41 |
| 1.7.6 | Exemple : retour sur le temps d'un jour au suivant | 41 |
| 1.7.7 | Exemple : modèle de maintenance | 42 |
| 1.7.8 | Exemple : bonus-malus en assurance automobile..... | 43 |
| 1.7.9 | Exemple : marche aléatoire sur les entiers | 45 |
| 1.7.10 | Exemple : chaîne avec plusieurs classes d'états..... | 46 |
| 1.7.11 | Exemple : promenade aléatoire sur un échiquier..... | 49 |
| 1.8 | *Démonstrations..... | 51 |
| 1.8.1 | Critères de classification | 51 |
| 1.8.2 | Proposition 1 sur la partition des états | 53 |
| 1.8.3 | Proposition 2 sur la partition des états | 54 |
| 1.8.4 | Proposition 3 sur la partition des états | 56 |
| 1.8.5 | Théorème sur la distribution stationnaire | 56 |
| 1.8.6 | Théorème ergodique..... | 58 |
| 1.8.7 | Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini | 63 |
| 1.9 | *Annexe..... | 65 |
| 1.9.1 | Lemme sur la limite d'une moyenne | 65 |
| 1.9.2 | Lemme sur la limite d'une somme | 66 |
| 1.9.3 | Lemme sur la condition d'apériodicité | 67 |
| | Exercices du chapitre 1..... | 68 |
| 2. | Chaînes de Markov à temps continu | 81 |
| 2.1 | Description générale | 81 |
| 2.1.1 | Retour sur les chaînes à temps discret | 81 |
| 2.1.2 | Chaînes à temps continu | 83 |
| 2.1.3 | Minimum de variables de lois exponentielles..... | 86 |
| 2.1.4 | Conditionnement sur le premier changement d'état..... | 87 |
| 2.1.5 | Exemple : maintenance de rampes mobiles | 88 |
| 2.1.6 | Hypothèse supplémentaire sur les changements d'état | 89 |
| 2.1.7 | Probabilités de transition infinitésimales | 91 |
| 2.2 | Chaînes à espace d'états fini | 91 |
| 2.2.1 | Générateur et probabilités de transition..... | 92 |
| 2.2.2 | Exemple : retour sur la maintenance de rampes mobiles..... | 95 |
| 2.3 | Processus de Poisson | 97 |
| 2.3.1 | Description générale..... | 97 |
| 2.3.2 | Nombre d'arrivées dans un intervalle de temps | 98 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 2.3.3 | Distribution des temps d'arrivée..... | 100 |
| 2.3.4 | Arrivée d'événements d'un type donné | 100 |
| 2.3.5 | Arrivée d'événements de deux types..... | 102 |
| 2.3.6 | Distribution conditionnelle des temps d'arrivée | 102 |
| 2.4 | Processus de mort | 103 |
| 2.4.1 | Description générale..... | 103 |
| 2.4.2 | Processus de mort linéaire..... | 104 |
| 2.4.3 | Processus de naissance de Yule | 105 |
| 2.4.4 | *Processus de coalescence..... | 106 |
| 2.5 | Processus de naissance et de mort | 110 |
| 2.5.1 | Description générale..... | 110 |
| 2.5.2 | Processus à temps de vie infini | 110 |
| 2.5.3 | Systèmes d'attente | 111 |
| 2.5.4 | Équation progressive de Kolmogorov | 112 |
| 2.5.5 | Processus linéaire avec immigration | 113 |
| 2.5.6 | *Processus linéaire sans immigration..... | 115 |
| 2.5.7 | *Équation rétrograde de Kolmogorov..... | 118 |
| 2.6 | Distribution stationnaire et théorème ergodique..... | 119 |
| 2.6.1 | Définition d'une distribution stationnaire..... | 119 |
| 2.6.2 | Exemple : promenade aléatoire sur des sous-ensembles..... | 120 |
| 2.6.3 | Exemple : comptoirs de service en série | 120 |
| 2.6.4 | Processus de naissance et de mort stationnaire | 122 |
| 2.6.5 | Système d'attente stationnaire $M=M=1$ | 124 |
| 2.6.6 | Système d'attente stationnaire $M=M=1$ | 126 |
| 2.6.7 | Théorème ergodique..... | 127 |
| 2.7 | *Démonstrations..... | 127 |
| 2.7.1 | Processus à temps de vie infini | 127 |
| 2.7.2 | Théorème ergodique..... | 128 |
| 2.7.3 | Lemme sur la continuité des probabilités de transition..... | 131 |
| | Exercices du chapitre 2..... | 133 |
| 3. | Processus de renouvellement | 143 |
| 3.1 | Description générale | 143 |
| 3.2 | Théorèmes de renouvellement | 144 |
| 3.2.1 | Introduction..... | 144 |
| 3.2.2 | Théorème de renouvellement élémentaire | 144 |
| 3.2.3 | Formule de Wald | 145 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.2.4 | Exemple : réclamations d'assurance..... | 146 |
| 3.2.5 | Exemple : remplacement d'un appareil..... | 146 |
| 3.2.6 | Théorème de renouvellement à temps discret..... | 148 |
| 3.2.7 | Théorème de renouvellement à temps continu..... | 149 |
| 3.3 | Distributions limites..... | 149 |
| 3.3.1 | Âge et temps de vie résiduel et total..... | 149 |
| 3.3.2 | Distributions limites à temps discret..... | 149 |
| 3.3.3 | Distributions limites à temps continu..... | 152 |
| 3.3.4 | Processus de renouvellement à l'état stationnaire..... | 154 |
| 3.3.5 | Exemple : temps inter-arrivées de loi uniforme..... | 155 |
| 3.3.6 | Exemple : temps inter-arrivées de loi exponentielle..... | 156 |
| 3.4 | Processus semi-markovien..... | 156 |
| 3.4.1 | Extension du théorème ergodique..... | 157 |
| 3.4.2 | Exemple : principe de Peter..... | 158 |
| 3.4.3 | Processus de renouvellement avec alternance..... | 158 |
| 3.4.4 | Exemple : compteur de particules..... | 159 |
| 3.4.5 | Système d'attente $M=G=1$ | 159 |
| 3.5 | *Moyennes temporelles limites..... | 163 |
| 3.5.1 | Moyennes temporelles à temps discret..... | 163 |
| 3.5.2 | Moyennes temporelles à temps continu..... | 165 |
| 3.6 | *Démonstrations..... | 167 |
| 3.6.1 | Théorème de renouvellement élémentaire..... | 167 |
| 3.6.2 | Théorème de renouvellement à temps discret..... | 169 |
| 3.6.3 | Théorème de renouvellement à l'état stationnaire..... | 171 |
| 3.6.4 | Théorème ergodique pour un processus semi-markovien..... | 173 |
| | Exercices du chapitre 3..... | 175 |
| 4. | Introduction aux martingales..... | 181 |
| 4.1 | Définitions et exemples..... | 181 |
| 4.1.1 | Définition d'une martingale..... | 181 |
| 4.1.2 | Exemple : marche aléatoire symétrique..... | 182 |
| 4.1.3 | Exemple : prix juste d'une option d'achat..... | 183 |
| 4.1.4 | Exemple : modèle de Wright-Fisher..... | 183 |
| 4.1.5 | Exemple : processus de branchement..... | 184 |
| 4.1.6 | Martingale par rapport à une suite de variables..... | 185 |
| 4.1.7 | Exemple : marche aléatoire asymétrique..... | 185 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 4.2 | Martingale arrêtée | 186 |
| 4.2.1 | Temps d'arrêt | 186 |
| 4.2.2 | Théorème d'arrêt..... | 186 |
| 4.2.3 | Exemple : marche aléatoire symétrique arrêtée | 187 |
| 4.2.4 | Exemple : marche aléatoire asymétrique arrêtée | 189 |
| 4.2.5 | Exemple : martingale classique de doubler la mise..... | 191 |
| 4.2.6 | *Démonstration du théorème d'arrêt..... | 192 |
| | Exercices du chapitre 4..... | 194 |
| 5. | Introduction au mouvement brownien..... | 197 |
| 5.1 | Définitions et exemples..... | 197 |
| 5.1.1 | Introduction..... | 197 |
| 5.1.2 | Mouvement brownien standard | 198 |
| 5.1.3 | Construction du mouvement brownien standard | 199 |
| 5.1.4 | Mouvement brownien avec dérive et écart-type..... | 200 |
| 5.2 | *Mouvement brownien géométrique..... | 202 |
| 5.2.1 | Description générale | 202 |
| 5.2.2 | Exemple : seuil d'exercice d'une option d'achat | 203 |
| 5.2.3 | Formule de Black-Scholes..... | 204 |
| 5.2.4 | Exemple : prix juste d'une option d'Apple | 206 |
| | Exercices du chapitre 5..... | 206 |
| 6. | Corrigés des exercices 209..... | 209 |
| | Avertissement..... | 209 |
| | Exercices du chapitre 1 | 209 |
| | Exercices du chapitre 2 | 230 |
| | Exercices du chapitre 3 | 246 |
| | Exercices du chapitre 4 | 258 |
| | Exercices du chapitre 5 | 260 |
| | Bibliographie..... | 263 |
| | Index..... | 265 |