CHAPITRE I

Equations fondamentales de l'électromagnétisme

L'étude des ondes électromagnétique (électromagnétisme dynamique) peut être envisagée de deux manières distinctes.

La première d'ordre axiomatique, consiste à poser les lois générales (équations de Maxwell) comme postulats pour déduire les applications possibles. Les régimes statiques et quasi-statiques sont alors déduits comme étant des cas particuliers. Il est clair que cette dernière approche, plus complexe et plus abstraite, présente l'avantage d'utiliser un formalisme plus général.

La seconde, d'ordre chronologique, consiste à reprendre les développements théoriques et expérimentaux effectués dans le cas des régimes statiques et quasi-statiques et leur apporter les corrections nécessaires pour les rendre compatibles en régime variable C'est cette approche qui sera utilisée dans ce cours car elle jugée plus pédagogique dans le sens où elle exploite des résultats déjà établis (cf. référence 1). Dans le vide, ces résultats s'écrivent comme suit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad \text{(1a)} ; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_o \quad \text{(1b)}; \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{J} \quad \text{(1c)}; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(1d)}.$$

Lors de l'étude des phénomènes d'induction de Faraday (chapitre VIII de la référence 1), nous avons été amenés, à corriger la relation (1a) entre les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$. Cette correction réside dans l'introduction du concept de l'induction électromagnétique qui se traduit par la relation de Maxwell-Faraday (M.F) à savoir

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \textit{(forme locale)} \qquad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{(forme intégrale)} \qquad (2)$$

qui est une forme dynamique de la relation (1) valable.

Il est légitime à ce stade e se poser la question si toutes les relations entre les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, les potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$ sont entièrement établies. La réponse est non. En effet, nous allons voir qu'effectivement, il manque quelque chose concernant le théorème d'Ampère (relation 1c) auquel il faut apporter une correction si l'on doit tenir compte des régimes dynamiques.

Pour établir définitivement les équations de Maxwell, valables en régime quelconque, on commencera par effectuer un bilan des relations entre les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ obtenues en régime statique et quasi-statique, puis en régime dynamique en tenant compte des différents résultats obtenus en cours d'électrostatique et de magnétostatique [1]. On verra que ce bilan fera apparaitre une contradiction qui nous amènera à introduire un nouveau concept qui est celui du courant de déplacement. On obtiendra alors une forme généralisée du théorème d'ampère dite équation de Maxwell-Faraday (M.F).

Les équations de Maxwell étant valables en tout point d'un milieu continu illimité, il est intéressant de scruter le comportement du champ électromagnétique au voisinage immédiat de l'interface de séparation entre deux milieux différents. Ceci nous conduit à introduire les *conditions de passage et d'en déduire la structure du champ électromagnétique sur la surface d'un conducteur électrique parfait.*

Une fois les équations de Maxwell établies, on reviendra aux problèmes des potentiels V et $\vec{A}$ et, en particuliers, à la question de l'invariance de jauge qui nous amènera à introduire la jauge de Lorentz qui permet la simplification du calcul de ces potentiels et de déduire ensuite les expressions des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$.

On traitera ensuite le cas du champ électromagnétique dont la variation temporelle est de type harmonique en introduisant la notion des vecteurs phaseurs. Le concept de phaseurs (entité mathématique n'ayant aucun sens physique au sens de la mécanique classique) permet de simplifier les calculs en transformant les équations de Maxwell sous forme locale (équations différentielle) en équations algébriques plus faciles à résoudre.

Enfin, on termine ce chapitre par l'aspect énergétique du champ électromagnétique en introduisant les notions d'énergie emmagasinée par ce champ, la puissance fournie aux charges en mouvement éventuelles par le biais de la force de Lorentz et la puissance rayonnée définie comme étant le flux du vecteur de Poynting.

1. Bilan des relations en régime statique.

Les sources (densité de charges ρ et de courant $\vec{J}$) sont situées en un point d'excitation $P(\vec{r}\,')$ alors que les champs ($\vec{E}$ et $\vec{B}$) ainsi que les potentiels (V et $\vec{A}$) sont déterminés en un point d'observation $M(\vec{r})$ (fig. 1). ε_o et μ_o sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

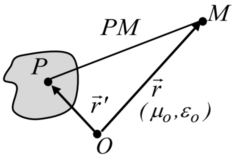

Fig. 1 Positions des sources, des champs et des potentiels.

Rappelons qu'en régime statique [1], les lois régissant les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, dans le vide, sont résumées dans le tableau 1.

Forme locale	Forme intégrale	Signification
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ (3a)	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (3b)	Le champ électrostatique est à circulation conservative
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_o$ (4a)	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{in}}{\varepsilon_o}$ (4b)	Théorème de Gauss
$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{J}$ (5a)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I_{enlacés}$ (5b)	Théorème d'Ampère
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (6a)	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (6b)	Le champ magnétostatique est à flux conservatif
$\Delta \cdot V = -\rho / \varepsilon_o$ (7a)	$V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint_\tau \dfrac{\rho(P)}{PM} d\tau$ (7b)	Equation de Poisson pour le potentiel scalaire et sa solution
$\Delta \cdot \vec{A} = -\mu_o \vec{J}$ (8a)	$\vec{A}(M) = \dfrac{\mu_o}{4\pi} \iiint_\tau \dfrac{\vec{J}(P)}{PM} d\tau$ (8b)	Equation de Poisson pour le potentiel vecteur et sa solution

Tableau 1 Résumé des lois de l'électrostatique et de la magnétostatique [1].

Enfin, pour compléter le formalisme mathématique (équations de Maxwell illustrées dans le tableau), il faut ajouter les conditions de passage du champ ($\vec{E},\vec{B}$) d'un milieu vers un autre que l'on présentera au paragraphe 2.5.6 ainsi que la force électromagnétique de Lorentz. Cette force agissant sur une particule de charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ et placée dans un lieu ou règne un champ électromagnétique ($\vec{E},\vec{B}$), s'écrit

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge B\right) \tag{9}$$

Les relations (3) à (9) ainsi que les conditions de passage régissent le champ électromagnétique en régime statique dans le vide.

Dans le cas des milieux matériels il faut ajouter la réponse de ces milieux (propriétés diélectriques et magnétiques) et faire intervenir les densités de charges de polarisation et de courants magnétiques [1].

2. Régime dynamique

En régime dynamique, les sources (densités de charges et de courant) seront considérées comme étant variables aussi bien selon leur position $P(\vec{r}\,')$ que dans le temps. Soit $\rho(\vec{r}\,',t)$ et $\vec{J}(\vec{r}\,',t)$. Le champ électromagnétique généré par ces sources va dépendre également de sa position $M(\vec{r})$ (fig. 1) et du temps. Autrement dit, il est de la forme $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$. Comment cette dépendance temporelle va-t-elle se traduire sur la forme des équations stationnaires (3) à (8) ?

Trois lois demeurent inchangées

2.1 Loi d'induction de Faraday

Depuis la découverte des phénomènes d'induction par Faraday, la relation, qui devient l'équation de Maxwell-Faraday, s'écrit définitivement sous la forme de la relation (2) à savoir

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{10}$$

Cette loi demeure valable en régime variable et stipule que le champ électrique $\vec{E}$ peut être considéré comme étant la superposition d'un champ statique (à circulation conservative) et d'un champ électromoteur généré par la variation temporelle du champ magnétique $\vec{B}$. Cette relation a été largement commentée au chapitre VIII du cours de la référence [1].

2.2 Théorème de Gauss

Le théorème de gauss sous sa forme locale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_o} \tag{11}$$

doit être conservé en régime dynamique car aucun fait expérimental n'a remis en cause cette loi.

2.3 Champ magnétique à flux conservatif

Le champ magnétique $\vec{B}$ demeure à flux conservatif. Autrement dit, la loi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{12}$$

reste valable en régime dynamique.

2.4 Généralisation du théorème d'Ampère

Avant de voir comment modifier ce théorème, établi en magnétostatique [1] afin de le rendre valable en régime dynamique, on doit d'abord établir la loi de conservation de la charge électrique.

a) Equation de conservation de la charge

On se propose de déterminer la quantité de charges électriques sortant à la vitesse $\vec{v}$, en un temps très court δt, de la surface S délimitant le volume τ (fig. 2). Durant ce laps de temps, la quantité de charges sortant à travers l'élément de surface $d\vec{S}$ correspond à la variation de la charge quittant l'élément de volume $\delta^2\tau = \vec{v}\,\delta t \cdot d\vec{S}$ centré au point P et qui vaut $\delta^2 q = \rho\,\delta^2\tau = \rho\,\vec{v}dt \cdot d\vec{S}$. ρ étant la densité volumique de charges au point P. Dans ces conditions la variation totale de charges quittant le volume total τ à travers la surface S est

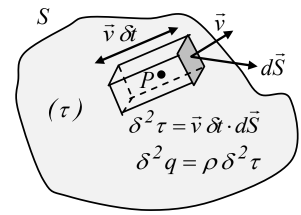

Fig. 2 flux sortant à travers une surface S délimitant un volume τ.

$$\delta q(t) = -\iiint_{\tau} \delta^2 q(t) = -\oiint_{S} \rho\,\vec{v}\,\delta t \cdot d\vec{S} \tag{13}$$

Le signe – indique une perte de charges dans le volume τ.

Il s'en suit que

$$\frac{\delta q(t)}{\delta t} = -\oiint_{S} \rho\,\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Lorsque δt devient infiniment petit, cette expression est assimilée à la dérivée de la charge totale q contenue dans le volume τ. Soit

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\oiint_{S} \rho\,\vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{14}$$

La charge totale q est indépendante de la position du point P considéré dans ce volume. Par contre, la densité volumique de charges ρ dépend de la position du point P. Dans ces conditions, on peut écrire

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \rho\; d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t}\rho\; d\tau \tag{15}$$

Des relations (14) et (15), on en déduit que

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oiint_{S} \rho\,\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence (annexe B), cette expression peut être reformulée de la manière suivante

$$\iiint_{\tau}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right)d\tau=0$$

Comme la forme du volume τ est quelconque, il s'en suit que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0 \tag{16}$$

Cette relation illustre ce que l'on appelle l'équation de continuité (ou de conservation de la charge électrique). Sachant que la densité de courant électrique est $\vec{J}=\rho\vec{v}$, la relation (16) est très souvent exprimée sous la forme bien connue

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{17}$$

Cette loi stipule que la divergence de la densité de courant $\vec{J}$ est compensée par la variation temporelle de densité volumique de charges électriques ρ.

Le problème qui se pose est que cette loi est incompatible avec le théorème d'Ampère sous sa forme stationnaire (relations 5) à savoir

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_o\vec{J}$$

En effet, en appliquant l'identité vectorielle $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}\right)\equiv 0$ au théorème d'Ampère, on obtient

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\mu_o\vec{J}\right)=\mu_o\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right)=0$$

Soit
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \tag{18}$$

Cette relation montre que la densité de courant $\vec{J}$ est à flux conservatif.

Si la loi de conservation de la charge (relation 17) est compatible avec le théorème d'Ampère en régime statique, elle ne l'est plus en régime variable. Il manque donc quelque chose à l'expression du théorème d'Ampère pour le rendre applicable en régime quelconque. C'est ce quelque chose que l'on se propose d'étudier et qui va nous conduire à introduire la notion de courant de déplacement et établir une nouvelle équation à savoir la relation de Maxwell-Ampère.

b) Courant de déplacement et équation de Maxwell-Ampère

Pour introduire le courant de déplacement, on part de la loi de Gauss (relation 11), soit

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

qui implique
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

La loi de conservation de la charge (relation 17) devient alors

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}+\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0$$

On vient ainsi d'introduire un terme supplémentaire, homogène à une densité de courant, appelé densité de courant de déplacement à savoir

$$\vec{J}_D = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{19}$$

et qui permet la généralisation du théorème d'Ampère sous la forme de l'équation dite de Maxwell-Ampère qui s'écrit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{20}$$

L'équation (20) renseigne sur la nature des sources du champ magnétique: une variation temporelle du champ électrique, assimilée à un courant, et la présence de courant électrique local.

On retrouve là le résultat d'une expérience célèbre. Celle d'Oersted (1920, qui constata que la circulation d'un courant électrique provoquait la rotation de l'aiguille d'une boussole, phénomène qui correspond au premier terme de droite de cette équation. Par contre, le deuxième terme n'a rien d'expérimental. C'est Maxwell lui-même (1865) qui a introduit ce terme pour rendre cohérent son ensemble d'équations sans présenter aucune justification expérimentale de cette modification. Il a fallu attendre la mise en évidence expérimentale des ondes électromagnétiques par Hertz (1887) pour la vérifier.

La relation (20) présente une certaine similitude avec le théorème de Maxwell-Faraday (relation 11) qui stipule qu'une variation temporelle du champ magnétique produit un champ électrique d'induction. La grande intuition de Maxwell a été de penser que pour des raisons de symétrie, une relation équivalente inverse devait être vraie. Autrement dit, une variation temporelle du champ électrique doit générer un champ magnétique.

En régime variable, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont indissociables et ce phénomène est régi par les équations couplées de Maxwell-Faraday (10) et de Maxwell-Ampère (20). Ces deux équations couplées traduisent la conversion de la composante magnétique d'une onde en sa composante électrique et vice-versa, alternativement. Dans le cas général, on ne peut pas découpler les deux champs, c'est pourquoi on parle d'un champ électromagnétique ou d'une onde électromagnétique, que l'on note $(\vec{E},\vec{B})$, et qui peut donc se propager sans autre support qu'elle même.

2.5 Equations de Maxwell dans le vide

2.5.1 Formulation locale des équations

Avec l'introduction de la densité de courant de déplacement $\vec{J}_D$ (relation 19) qui permet, en particulier, d'expliquer la propagation des ondes et l'établissement de la relation (20), Maxwell à formulé les quatre lois fondamentales de l'électromagnétisme. Dans le vide, ces lois s'écrivent sous la forme locale bien connue comme suit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Faraday: MF)} \tag{21a}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère: MA)} \tag{21b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \text{(Maxwell-Gauss : MG)} \tag{21c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(“Maxwell flux”: M}\Phi\text{)} \tag{21d}$$

On a un système de quatre équations différentielles, qui à partir d'une distribution de charges et de courant permet de calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en tout point de l'espace et à chaque instant. Dans les conditions réelles (sources d'extension finie), on impose au champ $(\vec{E},\vec{B})$ la condition d'être nul à l'infini.

2.5.2 Remarques

- A partir des équations de Maxwell, des conditions initiales et des conditions aux limites, on peut déterminer de manière univoque le champ électromagnétique. C'est le critère d'unicité pour les solutions des équations de Maxwell

- Les équations de Maxwell sont compatibles entre elles. L'équation de Maxwell-Faraday (relation 21a) permet de déduire l'équation de "Maxwell flux" (relation 21d). En effet, en appliquant l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation (21a), et en tenant compte de l'identité vectorielle $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}\right)\equiv 0$, on obtient

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)=0$$

Cette relation montre que $(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$ est une constante indépendante du temps. Si cette constante n'est pas nulle, on aurait une distribution de charges magnétique par analogie avec le théorème de Gauss (relation 21c) à savoir $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_o$. Comme les charges magnétiques n'existent pas dans la nature, cette constante est alors nulle et on obtient bien la relation (21d) à savoir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

- Les équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation de conservation de la charge. Pour confirmer cette assertion, on effectue un travail analogue au précédent en appliquant l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation (21b) tout en tenant compte du théorème de Gauss (relation 21c). Soit

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=\mu_o\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\right)=0 \quad \text{ou encore} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_o}\right)=0$$

ou encore
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

- Si $\vec{E}$ est solution des équations de maxwell alors $\vec{E}+\vec{E}_o$ est également solution de ces équations pour peu que $\vec{E}_o$ soit un champ stationnaire.

- En régime statique ($\partial/\partial t=0$), on retrouve bien les équations de l'électrostatique et de la ma magnétostatique [1] illustrées sur le tableau 1.

- Si les distributions $(\rho_1,\vec{J}_1)$ et $(\rho_2,\vec{J}_2)$ produisent respectivement les champs $(\vec{E}_1,\vec{B}_1)$ et ($\vec{E}_2,\vec{B}_2$), alors la distribution $(\alpha\rho_1+\beta\rho_2,\alpha\vec{J}_1+\beta\vec{J}_2)$ produira le champ $(\alpha\vec{E}_1+\beta\vec{E}_2,\alpha\vec{B}_1+\beta\vec{B}_2)$.

- Comme remarque historique, il est à signaler qu'à l'époque de Maxwell, les opérateurs divergence, rotationnel et gradient n'existaient pas. Il en était de même pour la représentation d'une grandeur vectorielle, par une lettre en dessous d'une flèche, telle que nous la connaissons maintenant. Aussi, les résultats présentés par Maxwell (une vingtaine d'équations) étaient lourds et fastidieux. C'est Heaviside (1850-1925) qui donna aux équations de Maxwell la forme actuelle.

2.5.3 Sources et équations duales

Si on suppose l'existence de sources magnétiques en introduisant les densités de charge ρ_m et de courant $\vec{J}_m$, duales des sources électrique (ρ et $\vec{J}$), on doit modifier les équations sans sources (21a et 21d) en les remplaçant par leurs équations duales [2,3]

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m$$

Il faut ajouter également une équation duale à l'équation de conservation de la charge (relation 17) que l'on exprime comme suit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

2.5.4 Importance du courant de déplacement

Considérons la portion de circuit électrique constituée par un condensateur plan dont les armatures sont supposées de grandes dimensions par rapport à leur écartement afin de négliger les effets de bords (fig. 3). Considérons un contour fermé orienté $\mathcal{C}$ sur lequel s'appuient deux surfaces S_1 et S_2 (fig.3). Montrons que l'application du théorème d'Ampère (relation 5a) pour déterminer la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long du contour $\mathcal{C}$ aboutit à un paradoxe et que celui-ci est résolu par le théorème de Maxwell-Ampère (relation 21b).

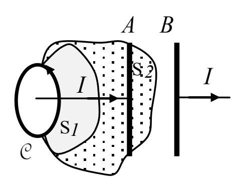

Fig. 3. Paradoxe du Condensateur.

a) Théorème d'Ampère

- Contour $\mathcal{C}$ et surface S_1 (fig. 3): $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \mu_o \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_o \vec{J}$

- Contour $\mathcal{C}$ et surface S_2 : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \mu_o \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ (courant nul entre les armatures).

La même méthode fournit des résultats contradictoires pourtant les deux surfaces S_1 et S_2 s'appuient sur le même contour $\mathcal{C}$.

b) Théorème de Maxwell-Ampère

- Contour $\mathcal{C}$ et surface S_1 : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \mu_o \left(\vec{J} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \mu_o \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_o \vec{J}$

car $\iint_{S_1} \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$ (champ électrique nul à l'extérieur du condensateur plan).

- Contour $\mathcal{C}$ et surface S_2 : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \mu_o \left(\vec{J} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$