

# Table des matières

<b>1 Probabilité</b>	<b>1</b>
1.1. Introduction	1
1.2. Définition classique d'une probabilité	3
1.2.1. Problème des partis	4
1.2.2. Problème du scrutin	5
1.3. Règles de dénombrement	5
1.3.1. Principe de multiplication	6
1.3.2. Nombre de permutations	6
1.3.3. Nombre de combinaisons	7
1.3.4. Répartition de boules dans des urnes	9
1.3.5. Principe d'addition	11
1.3.6. Nombre de sous-ensembles	11
1.3.7. Formule de Pascal	12
1.3.8. Formule du binôme	12
1.3.9. Coefficients multinomiaux	13
1.4. Espace de probabilité	14
1.4.1. Ensemble fondamental et tribu d'événements	14
1.4.2. Épreuves de Bernoulli	15
1.4.3. Mesure de probabilité	17
1.4.4. Formule d'inclusion-exclusion	19
1.4.5. Problème des rencontres	20
1.5. Probabilité conditionnelle	22
1.5.1. Définition	22
1.5.2. Paradoxe des deux enfants	23
1.5.3. Formule de Bayes	25
1.5.4. Paradoxe du faux positif	26
1.5.5. Paradoxe des trois prisonniers	26
1.6. Indépendance	27
1.6.1. Paire d'événements indépendants	27
1.6.2. Ensemble d'événements indépendants	28
1.6.3. Expériences aléatoires indépendantes	29
1.6.4. Circuits électriques	29
1.6.5. Proportions de Hardy-Weinberg	30
1.7. Exercices	31

<b>2</b>	<b>Variable aléatoire</b>	<b>39</b>
2.1.	Introduction .....	39
2.2.	Variable aléatoire discrète.....	40
2.2.1.	Définition .....	40
2.2.2.	Loi binomiale.....	40
2.2.3.	Modèle de Wright-Fisher.....	41
2.2.4.	Loi géométrique.....	43
2.2.5.	Loi binomiale négative .....	44
2.2.6.	Problème des allumettes de Banach.....	44
2.2.7.	Loi hypergéométrique.....	45
2.2.8.	Loi de Poisson .....	46
2.2.9.	Processus de Poisson .....	47
2.3.	Variable aléatoire continue .....	49
2.3.1.	Définition .....	49
2.3.2.	Fonction de répartition .....	50
2.3.3.	Loi uniforme.....	50
2.3.4.	Paradoxe de Bertrand .....	52
2.3.5.	Simulation de lois continues.....	53
2.3.6.	Loi exponentielle .....	53
2.3.7.	Datation .....	54
2.3.8.	Loi gamma .....	55
2.3.9.	Loi normale .....	57
2.3.10.	Quotient intellectuel.....	58
2.3.11.	Loi log-normale .....	59
2.3.12.	Loi du khi-deux .....	59
2.3.13.	Loi de Cauchy .....	60
2.4.	Variable aléatoire quelconque .....	61
2.4.1.	Définition .....	61
2.4.2.	Fonction de répartition .....	61
2.5.	Exercices .....	62
<b>3</b>	<b>Variables aléatoires simultanées</b>	<b>69</b>
3.1.	Introduction.....	69
3.2.	Variables aléatoires conjointement discrètes.....	69
3.2.1.	Fonctions de masse conjointe, marginale, conditionnelle .....	69
3.2.2.	Modèle de recombinaison génétique.....	71
3.3.	Variables aléatoires conjointement continues.....	74
3.3.1.	Fonctions de densité conjointe, marginale, conditionnelle .....	74
3.3.2.	Problème de trésor caché .....	76

3.4. Variables aléatoires indépendantes .....	78
3.4.1. Définitions .....	78
3.4.2. Problème de rendez-vous.....	80
3.4.3. Problème de l'aiguille de Buffon .....	80
3.4.4. Variables indépendantes de lois de Poisson.....	81
3.4.5. Variables indépendantes de lois exponentielles .....	83
3.4.6. Loi multinomiale .....	84
3.5. Somme de variables aléatoires indépendantes .....	84
3.5.1. Somme de variables de lois continues .....	84
3.5.2. Somme de variables de lois gamma.....	85
3.5.3. Somme de variables de lois normales .....	86
3.5.4. Somme d'un nombre aléatoire de variables .....	87
3.6. Loi normale multidimensionnelle.....	88
3.6.1. Loi binormale .....	88
3.6.2. Loi multinormale .....	89
3.6.3. Postulat de la moyenne .....	90
3.7. Transformation de variables conjointement continues .....	91
3.7.1. Transformation de la fonction de densité conjointe .....	91
3.7.2. Transformation en coordonnées polaires .....	93
3.7.3. Transformation linéaire d'une loi multinormale .....	94
3.8. Exercices .....	95
<b>4 Espérance</b> .....	<b>101</b>
4.1. Introduction.....	101
4.2. Espérance d'une variable discrète.....	102
4.2.1. Définition .....	102
4.2.2. Espérance d'une fonction d'une variable discrète .....	102
4.2.3. Variance et écart-type d'une variable discrète .....	103
4.2.4. Espérance et variance avec une loi binomiale .....	104
4.2.5. Espérance et variance avec une loi de Poisson.....	105
4.2.6. Espérance et variance avec une loi géométrique .....	106
4.3. Espérance d'une variable continue ou quelconque.....	107
4.3.1. Définition .....	107
4.3.2. Espérance d'une fonction d'une variable continue .....	108
4.3.3. Variance et écart-type d'une variable continue .....	110
4.3.4. Espérance et variance avec une loi uniforme .....	110
4.3.5. Espérance et variance avec une loi exponentielle.....	111
4.3.6. Espérance et variance avec une loi normale.....	113
4.4. Espérance avec des variables simultanées.....	114
4.4.1. Espérance d'une fonction de variables simultanées.....	114
4.4.2. Espérance du temps d'attente à un rendez-vous.....	115

4.4.3. Covariance et corrélation de deux variables .....	116
4.4.4. Espérance d'un produit de variables indépendantes .....	119
4.5. Espérance pour des sommes de variables .....	119
4.5.1. Variance et covariance de sommes de variables .....	119
4.5.2. Espérance et variance pour une marche aléatoire.....	121
4.5.3. Espérance et variance du nombre de rencontres.....	121
4.5.4. Espérance et variance avec une loi hypergéométrique .....	122
4.5.5. Covariance de variables de loi multinomiale .....	124
4.5.6. Covariance de variables de loi multinormale .....	125
4.6. Espérance conditionnelle .....	127
4.6.1. Espérance et variance par conditionnement .....	127
4.6.2. Problème de bâton cassé deux fois.....	129
4.6.3. Problème d'autobus et de passagers .....	129
4.6.4. Somme d'un nombre aléatoire de variables .....	130
4.7. Exercices .....	131
<b>5 Fonction génératrice et théorèmes limites</b> .....	<b>137</b>
5.1. Introduction.....	137
5.2. Fonction génératrice .....	138
5.2.1. Définitions.....	138
5.2.2. Cas d'une loi de Poisson .....	140
5.2.3. Cas d'une loi gamma.....	141
5.2.4. Cas d'une loi normale .....	142
5.2.5. Cas d'une somme de variables indépendantes.....	143
5.2.6. Cas des lois binomiale et binomiale négative.....	143
5.2.7. Cas d'une somme de lois normales ou de Poisson.....	144
5.3. Théorèmes limites.....	144
5.3.1. Moyenne d'échantillon.....	144
5.3.2. Loi des grands nombres.....	146
5.3.3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev .....	146
5.3.4. Nombre d'observations .....	148
5.3.5. Théorème limite central .....	149
5.3.6. Démonstration du théorème limite central .....	151
5.4. Exercices .....	152
<b>6 Suppléments</b> .....	<b>157</b>
6.1. Paradoxe de l'urne vide et pleine .....	157
6.2. Problème du secrétaire .....	159
6.3. Problème du plus grand de deux nombres.....	160
6.4. Loi exponentielle et loi géométrique.....	161
6.5. Variance d'échantillon d'une loi normale.....	162
6.6. Loi forte des grands nombres.....	164

<b>Corrigés des exercices</b>	<b>165</b>
Corrigés des exercices du chapitre 1.....	165
Corrigés des exercices du chapitre 2.....	169
Corrigés des exercices du chapitre 3.....	171
Corrigés des exercices du chapitre 4.....	173
Corrigés des exercices du chapitre 5.....	175
<b>Tableau d'une loi normale standard</b>	<b>177</b>
<b>Index</b>	<b>179</b>