PHYSIQUE-CHIMIE

MP/MP*-MPI/MPI*

Olivier Fiat

PHYSIQUE-CHIMIE

MP/MP*-MPI/MPI*

MÉTHODES & EXERCICES

l'intégrale

2e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083960-5

Table des matières

Vous pouvez télécharger les programmes Python à partir de la page de présentation de l'ouvrage sur le site Dunod.

LES + EN LIGNE https://dunod.com/EAN/9782100839605

L’auteur remercie Monsieur Benoît Rivet, professeur de mathématiques et d’informatique en MPSI au lycée Gay-Lussac de Limoges, pour l’aide précieuse qu’il lui a apportée dans la mise au point des programmes Python.

Avant-propos

Présentation générale.

Cet ouvrage de la collection Méthodes & Exercices traite de l'intégralité du programme de physique et de chimie des filières MP, MPI, MP* et MPI*. Chacun des 18 chapitres est divisé en quatre parties (le chapitre 19 est un formulaire de mathématiques).

Les méthodes à retenir : chaque chapitre commence par plusieurs fiches structurées avec des rappels de cours synthétiques, des méthodes de raisonnement ou de calcul, un exemple complet et un renvoi aux exercices concernés.

Capacités numériques : c'est une nouveauté du programme 2022, ce paragraphe ne figure que dans certains chapitres et correspond à une mention explicite du programme officiel. Après la description de la situation physique concernée, les spécificités informatiques du code Python sont détaillées, puis le code est donné intégralement et un exemple est présenté. Enfin, deux exercices sont proposés et corrigés, un de nature physique, avec l'utilisation du code Python pour simuler une expérience ou valider un résultat théorique, et un de nature informatique, nécessitant une modification du code. L'utilisation de Python au concours, à l'écrit et à l'oral de physique-chimie est explicitement prévue par les programmes.

Énoncés des exercices : des énoncés d'exercices d'application du cours et de nombreux exercices inspirés d'écrits et d'oraux de concours sont proposés. Ils sont affectés d'un niveau de difficulté, de 1 à 4.

Du mal à démarrer ? : des indications de méthode ou de calcul sont données à l'image de celles qui seraient données en colle ou à l'oral des concours.

Corrigés des exercices : les solutions détaillées sont entièrement rédigées.

Conseils de travail.

Nous vous encourageons à adopter une discipline de travail rigoureuse. Vous ne devez jamais oublier que c'est en faisant qu'on apprend. Lire un énoncé puis son corrigé est absolument contre-productif, et même si vous avez l'impression de « tout comprendre » (ce qui est flatteur pour le rédacteur de la solution !) vous n'apprendrez presque rien, et surtout vous ne retiendrez rien. Un exercice est fait pour être cherché, longuement, avec application, puis rédigé complètement, applications numériques, commentaires et conclusions compris. Si vous ne trouvez pas la réponse, cherchez encore. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à la fiche méthode et réessayez en profitant des rappels et conseils qui y sont donnés. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à l'aide donnée dans la rubrique « Du mal à démarrer ? ». Si vous n'avez que partiellement trouvé, laissez-vous un peu de temps encore, une nuit de repos, et cherchez encore le lendemain, c'est souvent profitable. Enfin, vous pouvez consulter le corrigé, sans oublier qu'avoir réellement compris une solution, c'est être capable, une heure, une semaine ou un an après, de la restituer.

À propos du choix d'exercices.

Les exercices ont été choisis pour couvrir tout le programme et tous les styles : certains sont calculatoires, d'autres plus qualitatifs, d'autres encore à forte composante documentaire (c'est alors mentionné dans le titre) avec une volonté dans cet ouvrage de proposer beaucoup de lectures graphiques (schémas, diagrammes, cartes de champ, de potentiel). Certains exercices, qui demandent une initiative particulière de modélisation, de choix d'hypothèses, d'organisation du raisonnement, sont estampillés « résolution de problème ».

Quelques données plus techniques.

- Les grandeurs complexes sont soulignées, les grandeurs vectorielles surmontées d'une flèche, les vecteurs unitaires notés $\vec{u}$.
- L'imaginaire pur est noté i en électromagnétisme dans l'étude des ondes et en physique quantique, et j dans les chapitres d'électricité pour éviter la confusion avec l'intensité.
- Nous avons délibérément omis de fournir les lois d'analyse vectorielle dans le corps des exercices, afin d'éviter de donner ainsi une indication trop précise. Nous avons ainsi respecté la convention de l'écrit des concours, où la liste des formules utiles est toujours donnée avant ou après l'énoncé.
- Un formulaire de mathématiques utiles à la physique est proposé à la fin de l'ouvrage.
- Il en est de même pour les formules de trigonométrie et les éléments différentiels de longueur, de surface et de volume pour les intégrales spatiales.
- Un index complet est proposé à la toute fin de ce livre.

En guise de conclusion.

Nous espérons que cet ouvrage vous aidera à réussir le mieux possible les épreuves de physique-chimie des concours et nous vous souhaitons bon courage pour votre travail.

Première partie

Mécanique

CHAPITRE 1

Référentiels non galiléens

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Référentiel galiléen.
- ◇ Composition des vitesses et des accélérations.
- ◇ Point coïncident.
- ◇ Vitesse d'entraînement, vitesse relative.
- ◇ Accélération d'entraînement, accélération relative, accélération de Coriolis.
- ◇ Loi de la quantité de mouvement en référentiel non galiléen.
- ◇ Force d'inertie d'entraînement (référentiel en translation).
- ◇ Force d'inertie d'entraînement (référentiel en rotation uniforme).
- ◇ Force d'inertie de Coriolis.
- ◇ Champ de pesanteur.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.

Les méthodes à retenir

Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.

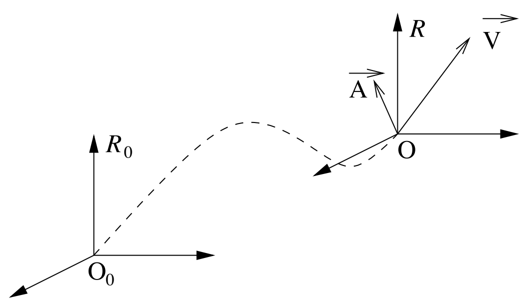
Soit $\mathscr{R}_0$ un référentiel muni d'un point fixe O_0 (il sera galiléen dans l'étude mécanique des paragraphes suivants), $\mathscr{R}$ un référentiel en mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ muni d'un point fixe O et M un point matériel. La **loi de composition des vitesses** donne la relation entre la vitesse absolue de M dans $\mathscr{R}_0$ et sa vitesse relative dans $\mathscr{R}$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O_0M}}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_0} \quad \text{et } \vec{v}_r = \vec{v}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right)_{\mathscr{R}}$$

La **loi de composition des accélérations** donne la relation entre l'accélération absolue de M dans $\mathscr{R}_0$ et son accélération relative dans $\mathscr{R}$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{O_0M}}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}_0} \quad \text{et } \vec{a}_r = \vec{a}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

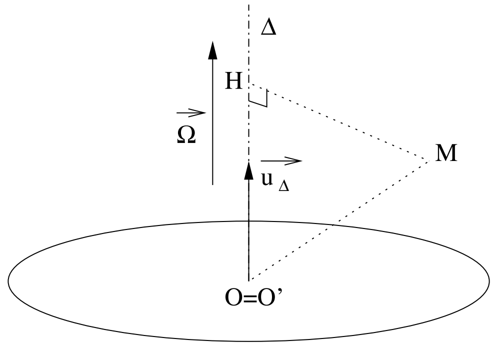
Seuls deux cas précis sont au programme.
a) $\mathscr{R}$ est en **translation** par rapport à $\mathscr{R}_0$ à la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{\mathrm{V}}$, vitesse de O dans $\mathscr{R}_0$ et d'accélération d'entraînement $\vec{a}_e = \vec{\mathrm{A}}$, accélération de O dans $\mathscr{R}_0$.



Les lois de composition s'écrivent alors

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \end{cases} \text{soit } \begin{cases} \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \vec{\mathrm{V}} + \vec{v}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \\ \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \vec{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \end{cases}$$

Le sens physique de ces lois est assez simple. Quand on se déplace dans un train en translation, notre vitesse dans le référentiel terrestre est la somme de la vitesse du point du train où nous posons le pied, c'est-à-dire la vitesse du train car il est en translation, et de notre vitesse par rapport au train. Il en est de même pour les accélérations.
b) $\mathscr{R}$ est en **rotation uniforme autour d'un axe fixe** Δ **de** $\mathscr{R}_0$, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_\Delta$. Le **point coïncident** de M à la date t est le point fixe P de $\mathscr{R}$ par lequel passe M. On note H le projeté orthogonal de M sur Δ.



$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{P}) + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{P}) + \vec{a}_\mathrm{C} + \vec{a}_r \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{\mathrm{OM}} + \vec{v}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \\ \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = -\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{HM}} + \vec{a}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \end{cases}$$

Le terme

$$\vec{a}_e = -\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}$$

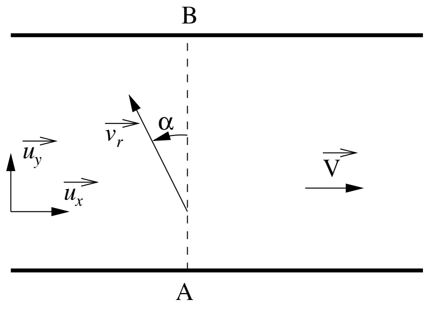
est l'accélération d'entraînement centripète de P, cohérente avec son mouvement circulaire uniforme autour de H. Le terme

$$\vec{a}_\mathrm{C} = 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{HM}}$$

est l'**accélération de Coriolis**, son sens physique est assez complexe et dans une approche pragmatique, on peut dire qu'il n'a pas d'intérêt immédiat pour la réussite aux concours.

Exemple :

Une rivière forme un référentiel $\mathscr{R}$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{\mathrm{V}} = \mathrm{V}\vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_0$. Un bateau à moteur M de vitesse maximale $v_{\max}$ veut traverser la rivière selon l'axe $\vec{u}_y$ perpendiculaire à la rivière dans le référentiel terrestre. Pour celà, il doit naviguer à une vitesse $\vec{v}_r$ dans le référentiel de la rivière faisant un angle α avec $\vec{u}_y$.



La loi de composition des vitesses donne

$$\vec{v}_a = \vec{\mathrm{V}} + \vec{v}_r \text{ soit } v_a \vec{u}_y = \mathrm{V}\vec{u}_x - v_r \sin\alpha \vec{u}_x + v_r \cos\alpha \vec{u}_y$$

$$\text{donc} \begin{cases} v_r \sin\alpha = \mathrm{V} \\ v_a = v_r \cos\alpha \end{cases}$$

Le problème n'est donc possible que si $v_r > \mathrm{V}$, donc $v_{\max} > \mathrm{V}$. En effet, dans le cas contraire, même à pleine vitesse, le bateau ne peut remonter le courant et dérive par rapport à [AB]. Si cette condition est vérifiée, alors

$$v_r = \frac{\mathrm{V}}{\sin\alpha} \text{ et } v_a = \frac{\mathrm{V}}{\tan\alpha}$$

↪ **Exercice 1.1.**

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.

Soit $\mathscr{R}_0$ un référentiel galiléen et $\mathscr{R}$ un référentiel en translation par rapport à $\mathscr{R}_0$ à la vitesse d'entraînement $\vec{\mathrm{V}}$ et avec l'accélération d'entraînement $\vec{\mathrm{A}}$ par rapport à $\mathscr{R}_0$. O est un point fixe de $\mathscr{R}$. Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$, ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}},\ \vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right)_{\mathscr{R}} \text{ et } \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen $\mathscr{R}$ est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter au forces la **force d'inertie d'entraînement**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} = m\vec{a}_r \text{ avec } \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{\mathrm{A}}$$

La confusion entre l'accélération du référentiel $\vec{\mathrm{A}}$ et celle de M dans le référentiel est une faute rédhibitoire. Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en translation.

a) On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en translation ».

b) On fait un schéma.

c) On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.

d) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}},\ \vec{v}_r,\ \vec{a}_r \text{ et } \vec{\mathrm{A}}$$

et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.

e) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f} \text{ et } \vec{f}_{ie} = -m\vec{A}$$

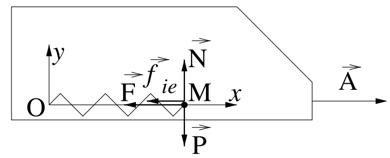
f) On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.
La **loi du moment cinétique** est elle aussi inchangée, le moment en O de la force d'inertie d'entraînement est le même que pour toute autre force

$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie}$$

La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple :

Un pendule élastique est formé d'un ressort de constante de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et d'un point matériel M de masse m coulissant sur un axe (O, x) horizontal en étant soumis à un frottement visqueux $\vec{f}_v = -h\vec{v}$. Ce dispositif est embarqué dans un train en accélération uniforme horizontale constante $\overrightarrow{A} = A\vec{u}_x$. On note $x(t)$ l'abscisse de M.
a) Le référentiel d'étude est le référentiel non galiléen du train en translation.
b) Voici le schéma du dispositif et des forces (à l'exception de la force de frottement).



c) Le repère de projection est $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
d) Les vecteurs cinématiques sont

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x \\ 0 \end{array}\right. , \ \vec{v}_r\left|\begin{array}{l} \dot{x} \\ 0 \end{array}\right. , \ \vec{a}_r\left|\begin{array}{l} \ddot{x} \\ 0 \end{array}\right. \text{ et } \vec{A}\left|\begin{array}{l} A \\ 0 \end{array}\right.$$

e) Les vecteurs forces sont

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l} -k(x-\ell_0) \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{f}_f\left|\begin{array}{l} -h\dot{x} \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{f}_{ie}\left|\begin{array}{l} -mA \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{P}\left|\begin{array}{l} 0 \\ -mg \end{array}\right. \quad \vec{N}\left|\begin{array}{l} 0 \\ N \end{array}\right.$$

f) Voici les projections sur les deux axes

$$\begin{cases} -k(x-\ell_0) - h\dot{x} - m\mathrm{A} = m\ddot{x} \\ -mg + \mathrm{N} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k\left(\ell_0 - \frac{m\mathrm{A}}{k}\right) \\ \mathrm{N} = mg \end{cases}$$

L'équation différentielle vérifiée par x est celle d'un oscillateur amorti, l'abscisse d'équilibre est $x_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{m\mathrm{A}}{k}$, le régime (pseudo-périodique, critique, apériodique) dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène $\Delta = h^2 - 4km$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.2, 1.3, 1.4.**

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.

Soit $\mathscr{R}_0$ un référentiel galiléen et $\mathscr{R}$ un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe Δ fixe de $\mathscr{R}_0$ passant par O, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_\Delta$. Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$, ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}},\ \vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right)_{\mathscr{R}} \text{ et } \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ. La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen $\mathscr{R}$ est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter au forces la **force d'inertie d'entraînement** et la **force d'inertie de Coriolis**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \text{ avec } \begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}} \\ \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_{\mathrm{C}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

La force d'inertie d'entraînement est dite **axifuge** (ce terme est préférable au terme usuel « centriguge ») car elle tend à faire fuir M de l'axe (et non pas du centre O). Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en rotation.
a) On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en rotation ».
b) On fait un schéma.
c) On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.
d) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$, $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$ et $\vec{\Omega}$ et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.
e) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles, de la force d'inertie d'entraînement et de la force d'inertie de Coriolis.

$$\vec{f},\ \vec{f}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}, \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

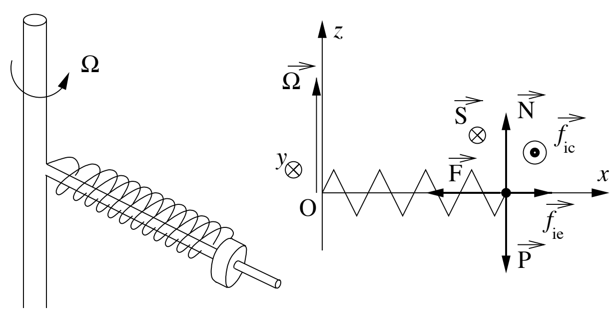
f) On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.
La **loi du moment cinétique** est elle aussi inchangée, le moment en O des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont les mêmes que pour toute autre force

$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie} \text{ et } \mathcal{M}_O(\vec{f}_{ic}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ic}$$

La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en remarquant que la force d'inertie de Coriolis, orthogonale au vecteur vitesse relative, ne travaille pas et en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (voir exercice 1.6) mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple :

Un point matériel coulisse sans frottement sur une tige horizontale (O, x) animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical (O, z) à la vitesse angulaire Ω. Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k a une extrémité fixe en O et son autre extrémité reliée à M. On note $x(t)$ l'abscisse de M sur l'axe.
a) On travaille dans le référentiel non galiléen en rotation de la tige. Dans celui-ci, la masse a un mouvement rectiligne.
b) Voici le schéma du dispositif.



c) On travaille dans le repère cartésien (O, x, y, z).
d) Voici les composantes des vecteurs cinématiques.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{HM} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{v}_r \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{a}_r \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix}$$

e) Voici les composantes du poids et de la force de rappel du ressort.

$$\vec{P}\left|\begin{array}{l}0\\0\\-mg\end{array}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{array}{l}-k(x-\ell_0)\\0\\0\end{array}\right.$$

En l'absence de frottements, l'action de la tige sur M est orthogonale à la tige, c'est donc la somme d'une force normale verticale $\vec{N}$ qui compense le poids et d'une force normale horizontale $\vec{S}$ qui compense la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{N}\left|\begin{array}{l}0\\0\\N\end{array}\right. \qquad \vec{S}\left|\begin{array}{l}0\\S\\0\end{array}\right.$$

Les forces d'inertie s'écrivent

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM} = m\Omega^2 x\vec{u}_x \text{ et}$$

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r = \left|\begin{array}{l}0\\-2m\Omega\dot{x}\\0\end{array}\right.$$

f) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P}+\vec{F}+\vec{N}+\vec{S}+\vec{f}_{ie}+\vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \text{ donc}$$

$$\left\{\begin{array}{l}-k(x-\ell_0)+m\Omega^2 x = m\ddot{x}\\ S-2m\Omega\dot{x}=0\\ N-mg=0\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}\ddot{x}+\omega_0^2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)x = \omega_0^2\ell_0\\ S=2m\Omega\dot{x}\\ N=mg\end{array}\right.$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pulsation propre de l'oscillateur élastique en référentiel galiléen. Deux cas sont possibles.

• Si $\Omega < \omega_0$, le coefficient de x est positif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

• Si $\Omega > \omega_0$, le coefficient de x est négatif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur hyperbolique, dont la solution diverge quand $t\to\infty$. La force d'inertie axifuge est trop forte pour être compensée par la force de rappel du ressort et la masse s'éloigne indéfiniment, jusqu'à la limite élastique du ressort.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10.**

Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.

Le **référentiel géocentrique** est galiléen en bonne approximation. Le **référentiel terrestre** est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_s} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$T_s = 86\ 164$ s est le jour sidéral. Le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen. On doit donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement axifuge et la force d'inertie de Coriolis pour les points matériels évoluant à proximité de la surface terrestre.

a) Le **poids** est la somme de la force de gravitation dirigée vers le centre de la Terre et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{P} = \vec{f}_g + \vec{f}_{ie} = -\frac{\mathcal{G} m_T m}{R_T^2}\vec{u}_r + m\Omega^2\overrightarrow{HM}$$

$$\text{soit } \vec{P} = m\vec{g} \text{ avec } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G} m_T}{R_T^2}\vec{u}_r + \Omega^2\overrightarrow{HM}$$

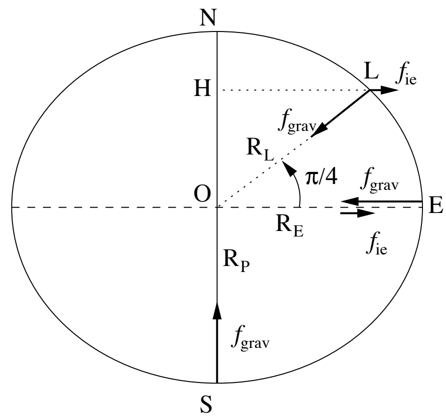
b) La force d'inertie de Coriolis n'a d'effet significatif que pour les objets dont la vitesse est grande (plus de 50 ou 100 $m \cdot s^{-1}$) ou sur des durées importantes (plus d'une heure)

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

où $\vec{v}_r$ est la vitesse relative, donc mesurée dans le référentiel terrestre. Comme les axes du repère d'étude sont en général définis par rapport à l'horizontale et à la verticale du lieu du laboratoire, il faut au préalable projeter le vecteur $\vec{\Omega}$ (qui est selon l'axe sud-nord des pôles) dans ce repère, en utilisant l'angle λ appelé latitude.

Exemple :

Le rayon terrestre au pôle sud est $R_P = 6\ 357$ km et en un point de l'équateur $R_E = 6\ 378$ km. La constante de gravitation est $\mathcal{G} = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et la masse de la Terre est $m_T = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg. La ville de Limoges est presque sur le 45ième parallèle et le rayon terrestre y vaut $R_L = 6\ 371$ km. Évaluons le champ de pesanteur en ces trois points.



• Au pôle sud, on est sur l'axe de rotation, donc la force d'inertie d'entraînement axifuge est nulle et le poids est égal à la force de gravitation, soit

$$g_S = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_P^2} = 9,863 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

• Sur l'équateur, la force d'inertie d'entraînement axifuge est verticale vers le haut donc

$$g_E = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_E^2} - \Omega^2 R_E = 9,798 - 0,034 = 9,755 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

• À Limoges, la force de gravitation est dirigée vers le centre de la Terre et a pour norme $f_{grav} = \frac{\mathcal{G} m_T m}{R_L^2} = 9,8195 \cdot m$. Le rayon du cercle décrit par Limoges lorsque la Terre tourne est $HL = R_L \cos \frac{\pi}{4} = 4\,504$ km. La force d'inertie d'entraînement axifuge a donc pour norme

$$f_{ie} = m\Omega^2 HL = 0,024 \cdot m$$

La somme vectorielle des deux vecteurs donne un vecteur qui est dirigé vers un point de l'axe des pôles un peu plus au sud que le centre de la Terre. On en déduit la norme

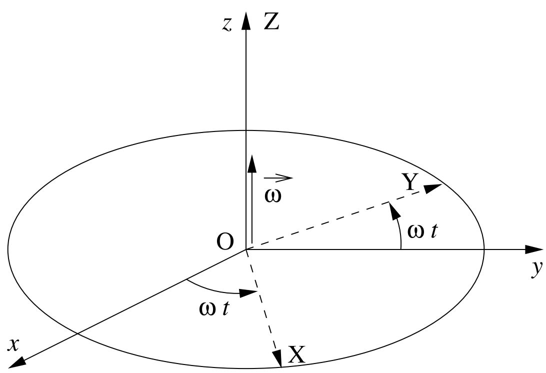
$$g_L = \sqrt{\left(9,8195 - 0,024 \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(0,024 \sin \frac{\pi}{4}\right)^2} = 9,803 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16.**

Énoncés des exercices

1.1 Composition des vitesses, des accélérations

Un manège est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. À la date $t = 0$, $\theta = 0$ et l'axe (O, X) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, x) du sol, l'axe (O, Y) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, y) du sol, et les axes verticaux (O, Z) et (O, z) sont confondus.



Un promeneur, initialement en O, marche sur le plateau du manège à la vitesse relative constante $\vec{v}_r = v_0 \vec{u}_X$ dans le référentiel du manège. On exprimera tous les vecteurs dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

a) Déterminer les coordonnées de ses vecteurs vitesse relative et d'entraînement à la date t. En déduire celles du vecteur vitesse absolue.

b) Déterminer les coordonnées de ses vecteurs accélération relative, d'entraînement et de Coriolis à la date t.

c) Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du promeneur.

d) Vérifier les lois cinématiques de composition des vitesses et des accélérations en retrouvant les coordonnées de $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$.

1.2 Étude d'un pendule simple dans un référentiel en translation

Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur L, et d'un point matériel M de masse m. Son extrémité O est accrochée au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$. L'angle d'inclinaison du fil est notée $\theta(t)$.