Annales
corrigées et commentées

Concours
2020/2021/2022/2023

PT

Physique
Chimie
Informatique

Physique A
Physique B Thermodynamique
Physique B Chimie
Informatique et modélisation

ellipses

Renaud Pochet

Physique A Banque PT 2020

Énoncé

103

Epreuve de Physique A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Le problème comporte néanmoins un certain nombre d'applications numériques, dont le caractère révèle une certaine importance pour la compréhension de l'ensemble.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Données :

Constantes universelles

- *Constante de la gravitation* $G = 6,67.10^{-11}\ kg^{-1}.m^{3}.\ s^{-2}$.
- *Constante de Planck* $h = 6,62.10^{-34}\ J.s$
- *Célérité de la lumière dans le vide :* $c = 3,0.10^{8}\ m.s^{-1}$
- *Permittivité électrique du vide :* $\varepsilon_0 = 8,85\ 10^{-12}\ F.m^{-1}$.
- *Perméabilité magnétique du vide* $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \approx 1,26.10^{-6}\ H.m^{-1}$

Caractéristiques du matériau formant le miroir :

- *Conductivité électrique* $1,0.\ 10^{7}\ S\ m^{-1}$
- *coefficient de dilatation* $1,0.\ 10^{-5}\ K^{-1}$
- *masse volumique* $8,0.\ 10^{3}\ kg\ m^{-3}$
- *capacité thermique massique :* $400\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
- *conductivité thermique* $400\ W.m.K^{-1}$

Formules mathématiques :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{u}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{u}\right) - \vec{\Delta}\vec{u}$$

Les calculs se feront avec un chiffre significatif.

Une onde gravitationnelle est une oscillation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à grande distance de son point de formation. Albert Einstein a prédit l'existence de telles ondes en 1916 : selon sa théorie de la relativité générale, de même que les ondes électromagnétiques (lumière, ondes radio, rayons X, etc.) sont produites par les particules chargées accélérées, les ondes gravitationnelles sont produites par des masses accélérées et ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant, ce n'est qu'en 2016, que la confirmation directe des ondes gravitationnelles a été possible grâce à une première observation faite le 14 septembre 2015. Cette observation ouvre un champ nouveau d'observation de l'univers à grande échelle. Depuis plusieurs autres observations directes d'ondes gravitationnelles résultant de la coalescence de deux astres ont été réalisées. Elles n'ont été possibles que grâce aux détecteurs interférométriques qui permettent de détecter un déplacement minimal de $\pm\ 2 \times 10^{-18}$ *m. Nous nous proposons dans ce sujet de modéliser les évènements astronomiques à l'origine de ces ondes, d'étudier comment leur détection a été possible et d'évaluer la sensibilité de l'interféromètre en prenant en compte les limitations imposées par différents processus physiques.*
Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 : (30%)

On se propose de dégager certaines caractéristiques des ondes gravitationnelles produites lors de la fusion de deux corps en interaction gravitationnelle. Les corps envisagés sont des trous noirs ou deux étoiles à neutrons. Bien que leur description relève de la relativité générale, on se contente, dans ce sujet, d'une approche gravitationnelle newtonienne sur laquelle on greffera certains résultats de relativité générale pour rendre compte de manière approchée des faits expérimentaux.

A. <u>Préliminaires.</u>

1. Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 disposées respectivement aux points P_1 et P_2. Rappeler l'expression de la force que q_1 exerce sur q_2. On introduira toutes les notations nécessaires.
2. Enoncer le théorème de Gauss de l'électrostatique.
3. On considère maintenant deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en P_1 et P_2. Exprimer la force de m_1 sur m_2.
4. Etablir une correspondance explicite entre l'électrostatique et la gravitation. Enoncer le théorème de Gauss gravitationnel. On notera $\vec{g}(M)$ le champ gravitationnel au point M.
5. On envisage un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse m uniformément répartie. En justifiant clairement chaque étape du raisonnement, établir que le champ gravitationnel créé par cet astre en un point M extérieur à l'astre s'écrit $\vec{g}(M) = -\frac{Gm}{OM^3}\overrightarrow{OM}$. Commenter cette expression.
6. Etablir également l'expression de $\vec{g}(M)$ pour un point M intérieur à l'astre.
7. Tracer alors l'allure de $\left\|\vec{g}(M)\right\|$ en fonction de r pour tout r.

B. <u>Description mécanique du système.</u>

On envisage deux corps identiques C_1 et C_2 de masse m, assimilables en première approximation à des points matériels. L'ensemble forme un système isolé. On note C leur centre de masse (ou centre d'inertie). On travaille dans un référentiel galiléen de centre C.

On note $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{CC_1}$ (de norme R_1) , $\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{CC_2}$ (de norme R_2) et $\vec{r} = \overrightarrow{C_1C_2}$ (de norme r).
On désigne par $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{R_1}}{R_1}$.

8. A partir de la définition de C, montrer que $\overrightarrow{R_1} = -\frac{1}{2}\vec{r}$.
9. Justifier que le mouvement de C_1 est plan.

On se place dans toute cette partie B dans le cas où r est une constante.

10. En déduire que le mouvement de C_1 est uniforme.

11. Décrire le mouvement de C_1. Faire un schéma où sont représentés, à un instant donné C, C_1 et C_2 ainsi que leurs vecteurs vitesse respectifs.

12. Le mouvement de C_1 est périodique de fréquence f. Etablir la relation $f = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^3}}$.

13. Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle E_{pot} de C_2 dans le champ gravitationnel créé par C_1 en fonction de G, m et r. On choisira E_{pot} nulle pour r tendant vers l'infini.

L'énergie mécanique totale E_m du système {C1 + C2} s'obtient en sommant les énergies cinétiques des deux corps et l'énergie potentielle précédente.

14. Par une méthode de votre choix, montrer que l'énergie cinétique de C_1 peut s'écrire : $E_{c1} = \frac{Gm^2}{4r}$.

15. En déduire une expression de E_m en fonction de G, m et r seuls. Cette énergie mécanique est une constante du mouvement : expliquer pourquoi.

16. En déduire que l'on a $E_m = -\alpha f^{2/3}$ où $\alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}$. Vérifier explicitement l'homogénéité de l'expression précédente.

C. Prise en compte de l'émission d'ondes gravitationnelles.

*On montre en relativité générale, que du fait du mouvement relatif, le système {C1 + C2} perd de l'énergie mécanique au cours du temps par émission d'ondes gravitationnelles avec une puissance instantanée $P(t) = \frac{64}{5}\frac{G^4 m^5}{c^5 r(t)^5}$ où r(t) est la distance C_1C_2 à l'instant t. On admet que cette perte d'énergie reste suffisamment faible sur une période pour pouvoir utiliser les différentes relations étables dans la partie **I.B.** en première approximation.*

17. Expliquer qualitativement comment évoluent r(t) et f(t) au cours du temps du fait de l'émission d'ondes gravitationnelles.

18. Etablir que la fréquence f du mouvement satisfait l'équation différentielle $\frac{df}{dt} = K\ f^{\beta}$ où K est une constante numérique que l'on ne cherchera pas à calculer et où β est une constante numérique que l'on précisera.

On note f_0 la fréquence du mouvement relatif des deux étoiles à l'instant pris comme origine des dates.

19. En procédant à une séparation des variables, intégrer l'équation différentielle précédente et montrer que l'on a $f(t) = \dfrac{f_0}{\left(1-\dfrac{t}{\tau}\right)^{3/8}}$ où τ est un temps caractéristique à exprimer en fonction de f_0 et K.

20. Donner une interprétation physique de τ.

Partie 2 : (45%)

A. L'interféromètre de Michelson.

L'interféromètre gravitationnel est assimilable à un interféromètre de Michelon.

Les notations sont les suivantes :

- *on définit l'éclairement (ou intensité lumineuse) E d'une onde d'amplitude S(t) et de représentation complexe* $\underline{S}$ *par* $E = \underline{S}\ \underline{S}^*$ *où* $\underline{S}^*$ *désigne le complexe conjugué de* $\underline{S}$ *. L'éclairement est compté en* $W.m^{-2}$.
- *on considère un interféromètre de Michelson (voir Figure 1) constitué de deux bras de longueurs respectives* $L_x = 0A$ *et* $L_y = 0B$ *compris entre une séparatrice* (S_p) *et des miroirs* M_x *et* M_y. *Les miroirs sont supposés parfaits et induisent un déphasage à la réflexion de* π.
- *La séparatrice sera considérée d'épaisseur nulle mais est telle que* ***l'une des réflexions sur cette lame se fait avec un déphasage de π sur une face et sans déphasage sur l'autre****.*

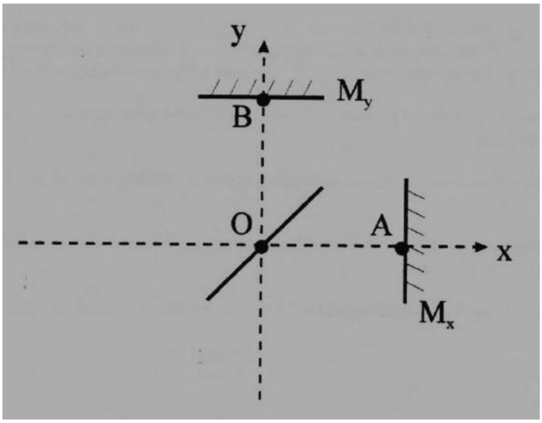

Figure 1

Dans tout le problème on ***<u>envisage exclusivement un interféromètre de Michelson en lame d'air</u>.***

1. **1.** Expliquer qualitativement ce que cela signifie. Si on éclaire le dispositif avec une source étendue, où observe-t-on les franges ? Que se passe-t-il si l'écran d'observation est placé à une autre position ?
2. **2.** En général on doit introduire dans le montage une lame compensatrice. Expliquer son rôle et la placer sur un schéma.

*Pour les questions **3** et **4** qui suivent, on considère une onde incidente monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ convergente de demi-angle d'ouverture α avec $\overrightarrow{u_x}$. On observe les interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f'.*

3. **3.** Dessiner la marche des rayons qui interfèrent en un point M sur l'écran. Etablir l'expression de leur différence de marche δ en fonction de l'épaisseur e de la lame d'air équivalente et de leur angle d'incidence i. Justifier la forme des franges observées.
4. **4.** Dans le cas où e= 3,0 mm, λ= 600 nm et f'= 10,0 cm, déterminer le rayon du premier anneau brillant.

B. <u>Détection des ondes gravitationnelles.</u>

On s'intéresse dans cette partie à la détection de l'onde gravitationnelle arrivant sur Terre.
Le principe de l'interféromètre gravitationnel est le suivant. Un faisceau laser ultra-stable est divisé en deux par un miroir semi-réfléchissant. Les faisceaux sortants sont dirigés le long de deux bras perpendiculaires, formés de tubes en acier inoxydable placés sous ultravide et situés dans des tunnels légèrement surélevés. Aux extrémités des bras sont suspendus deux miroirs également maintenus sous ultravide, isolés des perturbations sismiques. Après une série de réflexions successives sur les miroirs afin d'augmenter la longueur de trajet, les faisceaux sont à nouveau combinés sur une table de détection, suspendue et placée elle aussi sous vide. Les deux faisceaux produisent des interférences. Si les photodiodes ne détectent aucune variation de lumière, c'est que chacun des faisceaux a parcouru la même distance et que les miroirs n'ont pas bougé l'un par rapport l'autre à 10^{-18} mètre près. Si au contraire on repère un déplacement des franges d'interférence, c'est que cette distance a varié et qu'une onde gravitationnelle est passée par là. On peut souligner la prouesse expérimentale réalisée : bien que les bras de l'interféromètre mesurent 3 km de long, l'amplitude de leur déformation est inférieure la taille d'un atome. Par ailleurs, à l'intérieur des bras de 3 km règne le vide le plus poussé que l'on puisse réaliser sur Terre.

Vue aérienne du détecteur d'ondes gravitationnelles européen Virgo construit près de Pise, en Italie On distingue le bâtiment central d'où partent les deux bras de 3 kilomètres chacun, les bâtiments d'administration et de recherche.

L'interféromètre est éclairé <u>sous incidence normale</u> par une onde incidente monochromatique de longueur d'onde λ, d'amplitude S_0 et d'éclairement E_0, se propageant dans la direction $\overrightarrow{u_x}$. On suppose que le long des trajets parallèles à $\overrightarrow{u_x}$ (respectivement $\overrightarrow{u_y}$), l'indice de réfraction vaut n_x (respectivement n_y) (voir figure 1).

5. La séparatrice étant une lame semi-transparente qui laisse passer 50% de l'éclairement incident et réfléchit 50 %. Quel est l'éclairement obtenu en sortie de l'interféromètre (dans la direction $-\overrightarrow{u_y}$) si on occulte l'un des miroirs ?

6. Exprimer en la justifiant la différence de phase $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ entre les deux ondes qui interfèrent en sortie de l'interféromètre en fonction de n_x, n_y, L_x, L_y et λ.

7. Exprimer les amplitudes complexes des deux ondes qui interfèrent dans la direction $-\overrightarrow{u_y}$. En déduire l'expression de l'éclairement E_y récupéré dans la direction $-\overrightarrow{u_y}$ en fonction de E_0 et φ.

La théorie de la Relativité Générale d'Albert Einstein prévoit que lors de l'explosion d'une supernovae dans l'amas de la vierge, une onde gravitationnelle de fréquence $f_0 \approx 1kHz$ se propageant à la même célérité c que les ondes électromagnétiques dans le vide est émise. Au niveau de l'interféromètre de Michelson, une telle onde provoque une anisotropie de l'indice lumineux du vide de la forme :

$$n_x = 1-\tau, \quad n_y=1+\tau$$

avec

$$\tau\ (z,t)= \tau_M \cos(2\pi f_0(t-z/c)) \quad \text{avec} \quad \tau_M = 10^{-21}$$

8. Justifier que l'on puisse négliger la dépendance en z de τ à l'échelle de l'interféromètre sachant que l'extension verticale des miroirs ne dépasse pas D = 1m.

9. Le temps d'intégration (ou temps de réponse) des détecteurs d'éclairement est pris égal à T= 10^{-4} s. Justifier que l'on puisse, dans ces conditions, utiliser l'expression de l'éclairement établi à la question **7** de la section **B**.

10. Du fait de la faible valeur de τ, on limite dans toute la suite nos calculs à l'ordre 1 en τ. Montrer que le rapport de l'éclairement détecté sur l'éclairement incident prend la forme

$$\frac{E_y}{E_0} = \frac{1 - cos\varphi_0}{2} + \frac{2\pi\left(L_x + L_y\right)\tau(t)sin\varphi_0}{\lambda}$$

où φ_0 est à exprimer en fonction de L_x, L_y et λ

11. La puissance lumineuse étant simplement proportionnelle à l'éclairement , pour quelle valeur de φ_0 la variation de puissance sur le détecteur est-elle maximale lors du passage de l'onde gravitationnelle ? Calculer numériquement la variation maximale pour une puissance incidente égale à 10W avec λ= 600 nm et $L_x \approx L_y \approx 3km$.

C. <u>Seuil de détection.</u>

On se place dans le cas où φ_0=$\pi/2$.
La limite ultime de la précision sur la mesure de la variation de puissance en sortie est imposée par l'existence de fluctuations de la puissance P_y mesurée par le détecteur (proportionnelle à E_y).

12. L'onde de puissance moyenne $<P_y>$ est détectée pendant une durée T. Sachant qu'elle peut être assimilée à un flux de photons d'énergie hc/λ , où h est ici la constante de Planck, exprimer le nombre moyen $<N>$ de photons détectés en fonction de T, $<P_y>$, h, c (la vitesse de la lumière) et λ .

13. Sachant que le nombre de photons réellement détectés peut fluctuer de $\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle}$ autour de sa valeur moyenne, exprimer la fluctuation ΔP_y de puissance correspondante.

14. On s'impose un rapport signal sur bruit supérieur à 1, autrement dit la variation de puissance mesurée due au signal $<P_y>$ (τ) - $<P_y>$ (0) doit être supérieure à la fluctuation de puissance ΔP_y . En déduire que la plus petite valeur de τ_M mesurable vaut

$$\tau_M = \frac{1}{2\pi(L_x + L_y)}\sqrt{\frac{hc\lambda}{< P_y > T}}$$

Calculer τ_M et conclure.