

Annales corrigées et commentées

Concours

2021/2022/2023

PC

Physique

Mines-Ponts

Centrale

CCINP



Renaud Pochet

Mines Ponts Physique 1 PC 2021

Corrigé

I Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

- 1 On choisit comme estimation de la température ambiante T_0 et la pression atmosphérique P_0 :

$$T_0 = 3 \cdot 10^2 \text{ K} \quad \text{et} \quad P_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

On utilise la loi des gaz parfaits pour déterminer le volume molaire, d'abord sous forme littérale :

$$V_m = \frac{RT_0}{P_0}$$

puis numériquement :

$$V_m = \frac{8,3 \times 3 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^5} \simeq \frac{25 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^5} \iff V_m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

Notons N le nombre de molécules présentes dans le récipient. Le volume total V du récipient et le volume $V_{\text{sphères}}$ occupé par l'ensemble des sphères s'écrivent respectivement :

$$V = \frac{N}{N_A} V_m \quad \text{et} \quad V_{\text{sphères}} = N \times \frac{4}{3} \pi R_m^3$$

Le rapport de ces deux volumes vaut :

$$r = \frac{V_{\text{sphères}}}{V} = \frac{4\pi R_m^3 N_A}{3V_m}$$

On le détermine numériquement :

$$r \simeq \frac{4 \times 3 \times (10^{-10})^3 \times 6 \cdot 10^{23}}{3 \times 2,5 \cdot 10^{-2}} = \frac{24 \cdot 10^{-7}}{2,5 \cdot 10^{-2}} \iff r \simeq 1 \cdot 10^{-4}$$

Commentaires

On respecte la consigne de l'énoncé qui demande de ne donner le résultat d'une application numérique qu'avec un seul chiffre significatif. Notez tout de même qu'il est parfois préférable, pour éviter les erreurs d'arrondi, de garder deux chiffres significatifs au cours du calcul (à condition que ça ne complique pas trop les choses, c'est à vous de juger). C'est pour la même raison que l'on a utilisé la valeur non-arrondie $V_m = 2,5 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ pour calculer le rapport r .

□ 2 Un gaz est parfait si :

- on peut négliger le volume propre des molécules,
- on peut négliger toute interaction à distance entre les molécules.

Chaque molécule occupe environ 0,01% du volume moyen disponible, la première hypothèse est correcte. La distance moyenne qui sépare deux molécules est de l'ordre de :

$$L \sim \left(\frac{V_m}{N_A} \right)^{\frac{1}{3}} \sim r^{-\frac{1}{3}} R_m > 1 \text{ nm}$$

soit plus de dix fois supérieure à la taille caractéristique d'une molécule. Dans ces conditions, il est correct de négliger les interactions intermoléculaires car leur intensité décroît rapidement avec la distance. **On peut adopter le modèle du gaz parfait dans les conditions normales de température et de pression.**

Commentaires

Généralement, les interactions entre molécules sont dipolaires avec une décroissance typique en $1/r^6$ (interactions de Van der Waals). Dans un gaz, les distances intermoléculaires sont telles qu'on peut le plus souvent négliger ces interactions.

□ 3 Puisqu'on néglige toute interaction entre molécules, l'énergie potentielle dont il est question ici est l'énergie potentielle de pesanteur. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'expriment ainsi :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m_m v^2 \quad \text{et} \quad E_{pm} = m_m g z$$

En moyenne sur l'ensemble des particules :

$$\begin{cases} \langle E_{cm} \rangle = \frac{1}{2} m_m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_0 \\ \langle E_{pm} \rangle = m_m g \frac{h}{2} \end{cases}$$

On compare ces deux énergies entre elles :

$$\frac{\langle E_{cm} \rangle}{\langle E_{pm} \rangle} = \frac{3k_B T_0}{m_m g h} = \frac{3RT_0}{Mgh}$$

En ordre de grandeur, on prend $h = 1 \text{ m}$. Numériquement, ce quotient vaut :

$$\frac{\langle E_{cm} \rangle}{\langle E_{pm} \rangle} = \frac{3 \times 8 \times 3 \cdot 10^2}{30 \cdot 10^{-3} \times 10 \times 1} = 2 \cdot 10^4$$

Cet ordre de grandeur montre que **l'effet de l'agitation thermique est prépondérant devant celui de la pesanteur**. Par conséquent, les molécules sont distribuées de manière à peu près uniforme dans l'ensemble du récipient et ne se regroupent pas au fond.

Commentaires

Quand vous devez comparer deux grandeurs de même dimension entre elles pour déterminer si l'une est négligeable devant l'autre, il convient de calculer le quotient de ces deux grandeurs.

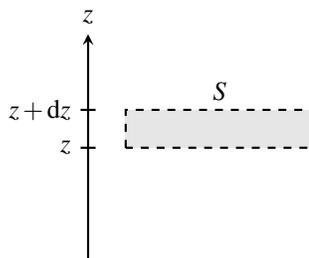
On a utilisé la relation classique du cours sur le gaz parfait : $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$ où $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ est la **vitesse quadratique moyenne** des molécules du gaz.

□ 4 D'après la loi des gaz parfaits :

$$\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT_0}$$

On étudie l'équilibre d'une tranche de gaz de section S et de hauteur dz . On projette la résultante fondamentale de la dynamique sur \hat{e}_z :

$$0 = P(z)S - P(z+dz)S - \rho(z)gSdz \iff \frac{dP}{dz} = -\rho(z)g$$



En utilisant l'expression de $\rho(z)$ déterminée plus haut, on aboutit à l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0}P = 0$$

□ 5 La solution de l'équation différentielle, avec la condition limite $P(z=0) = P_0$, vaut :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = P_0 A(z) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg} = \frac{k_B T_0}{m_m g}$$

On détermine numériquement la hauteur caractéristique :

$$H = \frac{8 \times 3 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-2} \times 10} = 8 \cdot 10^3 \text{ m}$$

Dans le récipient, sur une hauteur h de l'ordre du mètre, on peut évaluer la variation de pression en écrivant l'équation différentielle sous forme approchée autour de $z=0$:

$$\frac{\Delta P}{h} \simeq \frac{P_0}{H} \iff \frac{\Delta P}{P_0} \simeq \frac{h}{H} \simeq \frac{1}{8 \cdot 10^3} \sim 10^{-4}$$

La variation relative de pression dans le récipient, entre le fond et le sommet, est de l'ordre de 0,01%. **Elle n'est pas détectable avec un manomètre usuel.**

Si le récipient était rempli d'eau liquide, on considérerait alors que la masse volumique est indépendante de l'altitude (modèle de la phase condensée incompressible et homogène). La variation de pression s'écrirait alors :

$$\frac{\Delta P}{h} = \mu_e g \iff \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\mu_e g h}{P_0} = \frac{1 \cdot 10^3 \times 10 \times 1}{1 \cdot 10^5} = 0,1$$

Avec un liquide, la variation relative de pression serait de l'ordre de 10%. **Elle serait détectable avec un manomètre usuel.**

□ 6 La fonction $E(z)$ s'écrit :

$$E(z) = m_m g z$$

Il s'agit de **l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule**. $A(z)$ est le **facteur de Boltzmann**, qui décrit les variations de pression (et donc de densité) du gaz avec l'altitude. Dans ce facteur, le quotient des deux énergies $E(z)$ et $k_B T_0$ traduit la compétition entre deux effets antagonistes :

- **la pesanteur** qui tend à plaquer toutes les particules au sol,
- **l'agitation thermique** qui tend à distribuer uniformément les molécules dans l'ensemble du volume disponible.

Si l'on considère une tranche de gaz de hauteur h telle que $E(h) \ll k_B T_0$ (c'est-à-dire $h \ll H$) alors on pourra considérer que les molécules sont réparties uniformément. À l'inverse, si l'on étudie le gaz sur une échelle verticale telle que $E(h) \gg k_B T_0$ (ou $h \gg H$), on pourra considérer que les molécules sont quasiment toutes situées à proximité du fond.

Commentaires

D'un point de vue statistique, on peut montrer que pour un système dont l'énergie E peut varier de manière continue, la **probabilité** que l'énergie soit comprise entre E et $E + dE$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

On retrouve ce facteur dans de nombreux domaines de la physique (ou la chimie), on verra notamment qu'il intervient dans l'expérience de sédimentation de Jean PERRIN.

□ 7 Toujours d'après la loi des gaz parfaits, la concentration est proportionnelle à la pression $P(z)$ du gaz :

$$c_g(z) = \frac{P(z)}{RT_0} = c_{g0} A(z) \quad \text{avec} \quad c_{g0} = \frac{P_0}{RT_0}$$

II Étude d'un équilibre de sédimentation

□ 8 Chaque grain est soumis à :

- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$,
- son poids $\vec{P} = m_b \vec{g}$,
- la force de viscosité $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

□ 9 On applique le principe fondamental de la dynamique à un grain dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \hat{e}_z :

$$-m_b \frac{dv}{dt} = \mu_e V_b g - m_b g + \alpha v \iff \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} v = g \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right)}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{\alpha t}{m_b}\right) + \frac{m_b g}{\alpha} \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right)$$

où A est une constante d'intégration. Les grains sont lâchés sans vitesse initiale donc $v(0) = 0$. Avec cette condition initiale, la vitesse s'écrit sous la forme :

$$\boxed{v(t) = \frac{m_b g}{\alpha} \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{m_b}\right)\right)}$$

En régime permanent ($t \gg \frac{m_b}{\alpha}$), la vitesse est quasi-constante, égale à :

$$v_\ell = \frac{m_b g}{\alpha} \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right) = \frac{m^* g}{\alpha} \quad \text{avec} \quad \boxed{m^* = m_b \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right)}$$

Dans une situation où l'on pourrait négliger la poussée d'Archimède, la vitesse limite serait égale à $v_\ell = \frac{m_b g}{\alpha}$. Le résultat que l'on vient d'établir signifie que **prendre en compte l'effet de la poussée d'Archimède revient, dans la modélisation, à remplacer la masse m_b par la « masse apparente » m^*** .

La durée caractéristique du régime transitoire vaut :

$$\boxed{\tau = \frac{m_b}{\alpha} = \frac{4,1 \cdot 10^{-17}}{4,5 \cdot 10^{-9}} \simeq 9 \cdot 10^{-9} \text{ s}}$$

Numériquement, la vitesse limite vaut :

$$v_\ell = g \tau \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right) = 10 \times 9 \cdot 10^{-9} \times \left(1 - \frac{1}{1,2}\right) \simeq \frac{0,2 \times 9 \cdot 10^{-8}}{1,2}$$

$$\iff \boxed{v_\ell \simeq 1 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Commentaires

Quand vous appliquez un théorème de la mécanique, n'oubliez pas de préciser le référentiel d'étude et son caractère galiléen si c'est le cas. Dans cette question, il faut être vigilant au niveau des signes. L'énoncé propose une expression pour la projection du vecteur vitesse et il convient d'en tenir compte dans la suite des calculs. Par exemple :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-v(t)\hat{e}_z) = -\frac{dv(t)}{dt}\hat{e}_z$$

- 10 On détermine la dimension des vecteurs \vec{j}_c et \vec{j}_e en écrivant $\vec{j}_c(z) = -c(z)v_\ell\hat{e}_z$ sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$[j] = [c] \cdot L \cdot T^{-1} = L^{-2} \cdot T^{-1}$$

Ces grandeurs s'expriment en $m^{-2} \cdot s^{-1}$. On détermine D en écrivant l'équation de définition de $\vec{j}_n(z)$ sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$L^{-2} \cdot T^{-1} = \frac{L^{-3}}{L} \cdot [D] \iff [D] = L^2 \cdot T^{-1}$$

D s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$. À l'équilibre macroscopique, la quantité de sphères situées à l'intérieur d'une tranche de récipient de section S comprise entre $z = 0$ et une altitude z quelconque se conserve au cours du temps. Comme il n'y a pas de flux à travers la section $z = 0$ (on est au fond du récipient), le bilan de sphères sur cette tranche, entre deux dates t et $t + dt$, s'écrit ainsi :

$$dN = 0 = -j_n(z)Sdt - j_c(z)Sdt \iff \vec{j}_c + \vec{j}_n = \vec{0}$$

Cette relation conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dc}{dz} + \frac{v_\ell}{D}c = 0$$

Avec la condition limite $c(z = 0) = c_0$, la solution vaut :

$$c(z) = c_0 A(z) \quad \text{avec} \quad H_b = \frac{D}{v_\ell} = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^*g}$$

Commentaires

Attention, contrairement à la partie précédente, $c(z)$ désigne une **densité particulière** et pas une concentration molaire. C'était bien précisé dans l'énoncé et il fallait y être vigilant. On reconnaît pour D la dimension d'un **coefficient de diffusivité**.

- 11 La résultante de la poussée d'Archimède et du poids est équivalente au poids de la masse apparente :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = m^* \vec{g}$$

Cette force résultante est la seule qui est conservative (la force de viscosité, bien sûr, ne l'est pas), et son énergie potentielle associée (on choisit arbitrairement l'origine en $z = 0$) est :

$$E_p^*(z) = m^* g z$$

Selon cette expression, la grandeur D vérifie :

$$\frac{1}{k_B T_0} = \frac{1}{6\pi\eta R_b D} \iff D = \frac{k_B T_0}{6\pi\eta R_b}$$

- 12 La quantité totale de grains est reliée à la densité $c(z)$ par l'intégrale :

$$N = \int_0^{+\infty} c(z) S dz = c_0 S \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right) dz$$

Le calcul de l'intégrale aboutit à :

$$N = c_0 S H_b \iff c_0 = \frac{N}{S H_b}$$

- 13 À condition de pouvoir supposer $c(z)$ à peu près uniforme sur l'épaisseur e choisie, on peut écrire que :

$$n(z) = c(z) S e \iff \ln[n(z)] = -\frac{z}{H_b} + \ln(c_0 S e)$$

En théorie, la relation entre $\ln n$ et z est **affine**, ce qui semble confirmé par les résultats expérimentaux rassemblés sur le graphe de la figure 1. Par identification, le coefficient directeur de la droite de régression doit être égal à $-1/H_b$. On en déduit que :

$$H_b = \frac{1000}{24} \simeq 4 \cdot 10^1 \mu\text{m}$$

La hauteur du récipient utilisée par Jean PERRIN est environ 2,5 fois plus élevée que la hauteur caractéristique. C'est suffisant pour pouvoir observer une diminution notable de la concentration des sphères entre le fond et le sommet. En effet, à cette échelle, la concentration au sommet est environ dix fois plus faible que c_0 .

- 14 À partir de la valeur de H_b , il est possible de remonter à celle de la constante de Boltzmann :

$$k_B = \frac{m^* g H_b}{T_0} = \frac{V_b (\mu_b - \mu_e) g H_b}{T_0}$$

On la détermine numériquement :

$$k_B = \frac{3,4 \cdot 10^{-20} \times 2 \cdot 10^2 \times 10 \times 4 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^2} \simeq \frac{27 \cdot 10^{-22}}{3 \cdot 10^2} \iff \boxed{k_B = 9 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$$

Les causes d'erreur sont principalement liées à la difficulté de compter les sphères. Celles-ci sont en mouvement incessant (le mouvement brownien !) ce qui doit rendre le comptage très délicat, d'autant plus que, au vu de leur taille, elles doivent être observées à travers un instrument d'optique. Le comptage repose aussi sur le choix de l'épaisseur e , qui doit être exactement la même pour chaque tranche. Encore une fois, à l'échelle de quelques microns et avec des sphères en mouvement, il doit être difficile de s'assurer que l'épaisseur est la même pour chaque comptage. L'hypothèse selon laquelle $c(z)$ est uniforme à l'échelle de e est critiquable (tout dépend de la valeur de e , que l'on ne connaît pas). Cette méthode de comptage introduit un **biais** dans le mesurage qui peut avoir un effet sur les valeurs obtenues. Enfin, le nombre total de sphères ($N = 13000$) est certes élevé, mais sur une tranche de petite épaisseur, la quantité est beaucoup plus faible. Sur le graphe de la figure 1, on constate que n varie d'environ une centaine pour $z \simeq 0$ à une dizaine pour $z \simeq 100 \mu\text{m}$. Avec une quantité si faible, il est probable que les valeurs mesurées soient soumises à des **fluctuations statistiques** sensibles.

Commentaires

Prenez garde à bien répondre à la question posée. Une réponse (vue fréquemment dans des compte-rendus de TP) du type : « il y a une erreur sur $n(z)$ » n'identifie pas la **cause** de l'erreur.

III Le modèle de LANGEVIN

- 15 On applique le principe fondamental de la dynamique à un grain dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v} + \vec{F}_c \iff \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} \vec{v} = \frac{\vec{F}_c}{m_b}} \quad (E_L)$$

En l'absence de la force \vec{F}_c , la vitesse décroît exponentiellement sur une durée environ égale à $5m_b/\alpha \simeq 5 \cdot 10^{-8}$ s. Le mouvement s'atténue très rapidement.

- 16 On calcule la dérivée du produit xv :

$$\frac{d(xv)}{dt} = x \frac{dv}{dt} + v^2 \iff \boxed{x \frac{dv}{dt} = \frac{d(xv)}{dt} - v^2}$$