Pascal Olive

PHYSIQUE CHIMIE

en PSI/PSI*

Le cours complet

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

[BOÎTE À OUTILS 1]

DIFFÉRENTIELLES ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Dérivées partielles

On raisonne sur une fonction f de deux variables réelles : $(x,y) \overset{f}{\mapsto} f(x,y)$, à valeurs réelles, de classe C^1.

On note $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ la dérivée de la fonction f par rapport à la variable x, les autres variables (ici y) étant fixées.

On note simplement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée partielle lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Par exemple, en thermodynamique, une fonction d'état d'un corps pur sous une seule phase, comme l'entropie S, est une fonction de deux variables indépendantes. On peut choisir comme couple de variables la température T et la pression p, mais aussi T et le volume V. Il faut distinguer $\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ et $\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, qui sont *a priori* différentes.

1.2 Théorème de Schwarz

$(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions de deux variables qui peuvent être dérivées par rapport à x ou y si elles sont de classe C^1. On peut former $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Si $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^1, f est de classe C^2 et le *théorème de Schwarz* s'applique :

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: peu importe l'ordre des dérivations.

Par exemple : $(x,y) \overset{f}{\mapsto} x^2 \ln(y)$ est de classe C^2 sur son domaine de définition.

On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln(y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{y}$. On a bien $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{2x}{y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

2. DIFFÉRENTIELLES

2.1 Fonction d'une seule variable

La fonction $f : x \overset{f}{\mapsto} f(x)$ étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de x un développement de Taylor :

$$f(x+\delta x) = f(x) + \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^3\right].$$

Intéressons-nous à la différence $f(x+\delta x) - f(x)$, quand δx est très petit :

$f(x+\delta x) - f(x) = \delta x \cdot f'(x) + \dfrac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^3\right]$. On a donc :

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) + \frac{\delta x}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^2\right].$$

On note dx un accroissement δx *infiniment petit* :

$\dfrac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x)$, ce qu'on écrit sous la forme :

$$f(x+\mathrm{d}x) - f(x) = f'(x)\mathrm{d}x.$$

> La différence $\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ est appelée *différentielle* de f en x.
> On a $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$ pour une fonction d'une seule variable.

Ceci fait tout l'intérêt de la notation de Leibniz : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ est la variation infinitésimale de f au voisinage de x, due à une variation infinitésimale dx de x.

Remarquons que, contrairement au cas d'un accroissement fini δx, il n'y a pas dans df de termes en $(\mathrm{d}x)^2$, $(\mathrm{d}x)^3$, etc. Ceci n'est pas une approximation car :

$$A\mathrm{d}x + B(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x\left[A + B\mathrm{d}x\right] = \mathrm{d}x \cdot \lim_{\delta x \to 0}\left[A + B\delta x\right] = A\mathrm{d}x.$$

> Un infiniment petit du premier ordre dx est infiniment plus grand qu'un infiniment petit du second ordre $(\mathrm{d}x)^2$. Des termes en $(\mathrm{d}x)^2$ n'interviennent que s'il n'y a pas de termes en dx ($A = 0$).

Pour le calcul de différentielles, on utilise souvent les dérivations composées. Si $x \overset{F}{\mapsto} F(x) = f\left[g(x)\right]$ alors $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$: on retrouve la formule $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

On en déduit $\mathrm{d}F = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$. Par exemple, si $F(x) = \exp(2\sqrt{x})$, $\mathrm{d}F = \dfrac{\exp(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2.2 Fonction de plusieurs variables

On raisonne sur une fonction f de deux variables réelles : $(x,y)\overset{f}{\mapsto} f(x,y)$, de classe C^2, à valeurs réelles.

La fonction f étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de (x,y) un développement de Taylor à l'ordre 2 (à des termes d'ordre 3 près, comme $(\delta x)^3$ ou $\delta x\cdot(\delta y)^2$) :

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \delta x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \delta y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left[(\delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\delta x\cdot\delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + (\delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right].$$

En notant dx et dy les infiniment petits d'ordre 1, on a :

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$, *différentielle* de f en (x,y).

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)$ est la variation infinitésimale de f au voisinage de (x,y), due à une variation infinitésimale dx de x et dy de y.

Par exemple, si $f : (x,y)\overset{f}{\mapsto} x^2\ln(y)$, $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 2x\ln(y)\mathrm{d}x + \dfrac{x^2}{y}\mathrm{d}y$.

2.3 Intégration

Pour une fonction d'une seule variable, découpons l'intervalle $[a,b]$ en N intervalles de longueur $\delta x = \dfrac{b-a}{N}$ et calculons $I = \sum_{i=1}^{N}\big(f[a+i\delta x] - f[a+(i-1)\delta x]\big)$.

Cette somme discrète se simplifie :

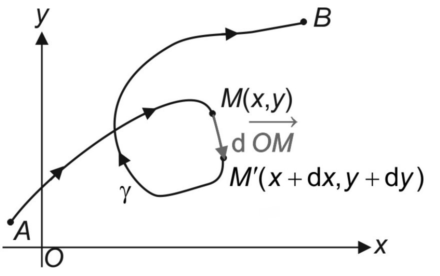
$I = f(b)\underbrace{-f(b-\delta x)+f(b-\delta x)}_{0}-\ldots\underbrace{-f(a+\delta x)+f(a+\delta x)}_{0}-f(a)$, soit $I = f(b)-f(a)$.

δx devient infiniment petit si $N\to\infty$, et est noté dx. La somme I n'est alors plus discrète, mais continue, et s'écrit $I = \int_{x=a}^{x=b}[f(x+\mathrm{d}x)-f(x)] = \int_{x=a}^{x=b}\mathrm{d}f = f(b)-f(a)$.

Ce résultat est bien traduit par la notation de Leibniz :

$$\int_{x=a}^{x=b}\mathrm{d}f = \int_{x=a}^{x=b}f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_a^b = f(b)-f(a).$$

Pour une fonction de deux variables, $\int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} \mathrm{d}f$ prend le sens suivant : on somme, le long d'un chemin γ menant de A à B, les différences $\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)$ entre les points M et M' de coordonnées respectives : (x,y) et $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$.



La somme continue $\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A) = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A)$ ne dépend que de A et B, et ne dépend donc pas du chemin γ suivi pour aller de A à B.

3. FORMES DIFFÉRENTIELLES

3.1 Définition

Pour un système décrit par deux variables x et y, une *forme différentielle* s'écrit $\delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

Par exemple, dans un champ de force $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{e}_x + Q(x,y)\vec{e}_y$, le travail reçu par une particule se déplaçant de $M(x,y)$ à $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ vaut :

$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$. Malgré la notation, qui est la même que celle d'un accroissement fini, c'est un travail *élémentaire*, ou *infinitésimal*, défini pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y$ de la particule, se produisant entre les dates t et $t+\mathrm{d}t$.

Une forme différentielle est donc définie pour une *transformation infinitésimale* correspondant à une variation dx de x et dy de y au voisinage de (x,y).

Lorsqu'on somme les formes différentielles δW le long d'un chemin γ entre deux points A et B, on obtient la grandeur $W^{\gamma}_{A\to B}$ (par exemple, le travail de la force s'exerçant sur la particule qui se déplace entre A et B le long de γ).

La grandeur $W^{\gamma}_{A\to B} = \int_A^B \delta W$ *dépend a priori du chemin* γ *suivi entre* A et B.

3.2 Théorème de Poincaré

À quelle condition $W_{A\to B}^{\gamma}$ ne dépend-il que de A et de B, et pas de γ ? Autrement dit, à quelle condition existe-t-il $f : (x,y)\overset{f}{\mapsto} f(x,y)$ telle que $W_{A\to B}^{\gamma} = f(B) - f(A)$?

Pour un déplacement élémentaire, la relation précédente s'écrit : $\delta W = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)$, soit $\delta W = \mathrm{d}f$. On cherche donc la condition pour qu'il existe une fonction f telle que $\delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$. Si c'est le cas, on identifie $\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$, et, d'après le théorème de Schwarz, on a nécessairement $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. La réciproque n'est pas toujours vraie (elle l'est à certaines conditions sur le domaine des valeurs prises par x et y, conditions généralement vérifiées en Physique). Retenons l'implication suivante (théorème de Poincarré) :

$$\exists\, f : (x,y)\overset{f}{\mapsto} f(x,y) \text{ telle que } \delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}f \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Prenons des exemples :

(i) La forme différentielle $\delta W = y\mathrm{d}x$ n'est pas une différentielle car $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. En conséquence $W_{A\to B}^{\gamma}$ dépend du chemin γ suivi entre A et B.

(ii) La forme différentielle $\delta W = 2x\sin(y)\mathrm{d}x + \left[x^2\cos(y) - 1\right]\mathrm{d}y$ peut être une différentielle puisque $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Cherchons donc s'il existe une fonction f telle que $\delta W = \mathrm{d}f$. On identifie pour cela les dérivées partielles : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y) - 1 \end{cases}$.

On intègre alors une de ces deux relations, par exemple la première : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y) \Rightarrow f(x,y) = x^2\sin(y) + \varphi(y)$.

Attention ! On a intégré à y constant, donc φ *n'est pas une constante*, mais n'importe quelle fonction de y à ce stade. En effet, la dérivée de $y\overset{\varphi}{\mapsto}\varphi(y)$ par rapport à x donne bien 0.

En reportant $f(x,y)=x^2\sin(y)+\varphi(y)$ dans la deuxième relation, on obtient : $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2\cos(y)+\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\underset{\text{aussi}}{=}x^2\cos(y)-1\Rightarrow\varphi(y)=-y+Cte$. Finalement, on a bien : $\delta W=\mathrm{d}f$, avec $f(x,y)=x^2\sin(y)-y+Cte$.

Revenons sur les différentes notations :

> Pour une transformation infinitésimale, on note δW une forme différentielle et $\mathrm{d}f$ une différentielle. Pour une transformation finie, on note $W^{\gamma}_{A\to B}=\int_A^B\delta W$, ou simplement W s'il n'y a pas d'ambiguïté, et $\Delta f=\int_A^B\mathrm{d}f=f(B)-f(A)$.

Par exemple, le premier principe de la thermodynamique s'écrit $\mathrm{d}E=\delta W+\delta Q$ pour une transformation infinitésimale, et $\Delta E=W+Q$ pour une transformation finie.

4. APPLICATIONS ◎

4.1 Fonctions implicites ◎

Considérons trois variables *x*, *y* et *z* liées par une relation $f(x,y,z)=0\ (*)$, par exemple $f(x,y,z)=yx^3+z\ln(x)+1=0$. Les variables *x*, *y* et *z* ne sont donc pas indépendantes. Si par exemple on fixe les valeurs de *y* et de *z*, alors *x* ne peut prendre que certaines valeurs, solutions de $(*)$. Cependant, comme dans l'exemple, on ne peut pas toujours expliciter *x* en fonction de *y* et de *z*, c'est-à-dire exprimer analytiquement la fonction $(y,z)\overset{x}{\mapsto}x(y,z)$: *x* est alors une fonction *implicite* de *y* et de *z*.

On peut néanmoins obtenir des relations entre les dérivées partielles. En effet, comme *f* est une constante, on a, en prenant la différentielle de $(*)$:

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\mathrm{d}z=0.$$

Si *z* est constant ($\mathrm{d}z=0$), on a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\mathrm{d}x+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}\mathrm{d}y=0$, or $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ à *z* constant est la dérivée partielle par rapport à *x* de la fonction implicite $(z,x)\overset{y}{\mapsto}y(z,x)$. On a donc $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z=-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\Big/\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}$. On constate qu'il faut bien se garder de « simplifier » par ∂f, cette simplification étant dénuée de sens et amenant à un résultat faux.

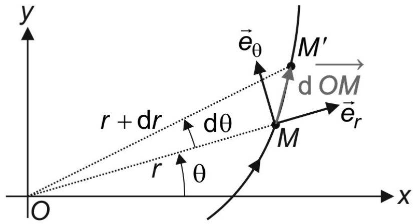
De même $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \Big/ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$, d'où la relation $\boxed{\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}}$

Un certain nombre de résultats peuvent être ainsi démontrés sans avoir à expliciter les fonctions $(x,y)\overset{z}{\mapsto} z(x,y)$, $(y,z)\overset{x}{\mapsto} x(y,z)$ et $(z,x)\overset{y}{\mapsto} y(z,x)$.

4.2 Calculs intégraux ◎

Le calcul de grandeurs finies se ramène souvent au découpage du domaine d'intégration en parties infinitésimales. Prenons quelques exemples.

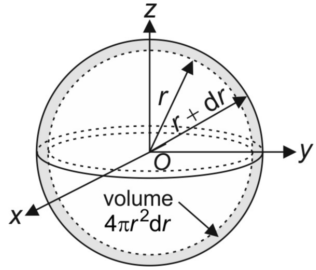
Exemple 1 : longueur d'une courbe d'équation polaire $\theta \mapsto r(\theta)$



On découpe la courbe en segments élémentaires $[MM']$, où M a pour coordonnées polaires (r,θ) et M' : $(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta)$. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. On obtient le déplacement élémentaire en prenant la différentielle de $\overrightarrow{OM}$:

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$ car $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e}_\theta$. La longueur élémentaire vaut $\mathrm{d}L = \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \mathrm{d}\theta\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}$, en parcourant la courbe dans le sens des θ croissants afin d'avoir $\mathrm{d}\theta > 0$. On obtient la longueur de la courbe comprise entre θ_{min} et θ_{max} en calculant $\boxed{L = \displaystyle\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta}$.

Exemple 2 : charge d'une boule



Une boule de rayon R possède une densité volumique de charges $\rho(r)$ qui ne dépend que de la distance r au centre O de la boule : il y a *symétrie sphérique* (invariance du système par toute rotation autour de O). Si ρ était uniforme, la charge Q de la boule serait le produit de ρ par son volume $\mathscr{V}$, mais ici on doit découper la sphère de façon à ce que $\rho(r)$ reste constant dans un volume élémentaire.

On peut prendre le volume compris entre deux sphères de centre O, et de rayons r et $r+\mathrm{d}r$. Ce volume vaut $\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\mathrm{d}r) - \mathscr{V}(r)$ où $\mathscr{V}(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ est le volume d'une boule de rayon r. On a donc $\mathrm{d}\mathscr{V} = 4\pi r^2\mathrm{d}r$, d'où ;

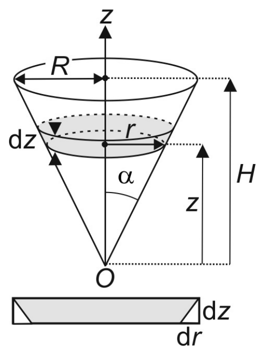
$$Q = \int_{r=0}^{R} \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r \, .$$

Tout l'intérêt des différentielles est le passage à une variation infiniment petite. Si le rayon de la boule subissait un accroissement fini δr , on aurait :

$$\delta \mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\delta r) - \mathscr{V}(r) = \frac{4}{3}\pi\left[(r+\delta r)^3 - r^3\right] = \frac{4}{3}\pi\left[3r^2\delta r + 3r(\delta r)^2 + (\delta r)^3\right] \neq 4\pi r^2 \delta r \, .$$

En revanche, $\mathrm{d}\mathscr{V} = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ est une relation exacte.

Exemple 3 : volume d'un cône



On peut calculer le volume $\mathscr{V}$ d'un cône de sommet O, d'axe Oz, de hauteur H, et de demi-angle au sommet α, en le découpant en tranches infinitésimales de hauteur dz. Le volume d'une telle tranche se confond avec celui d'un cylindre circulaire de hauteur dz et de rayon r, soit $\mathrm{d}\mathscr{V} = \pi r^2 \mathrm{d}z$.

Là encore, ce qui ne serait qu'une approximation pour un petit accroissement δz devient rigoureux pour dz infiniment petit. En effet la différence de volume entre le cylindre et la portion du cône de hauteur dz est de l'ordre de $r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$, donc c'est un infiniment petit d'ordre 2 en dz puisque $r = z\tan\alpha$.

Finalement, $\mathscr{V} = \int_{z=0}^{H} \pi r^2 \mathrm{d}z = \int_{z=0}^{H} \pi \tan^2\alpha \cdot z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3}\pi\tan^2\alpha \cdot H^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Exemple 4 : énergie reçue par un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ reçoit une puissance instantanée $p(t) = Ri^2(t)$. Pendant une durée finie Δt, le conducteur reçoit un travail W, ce qui permet de définir la puissance moyenne $P = \frac{W}{\Delta t}$ reçue pendant Δt. Pour définir la puissance instantanée à la date t, on effectue le rapport entre le travail élémentaire δW reçu entre t et $t + \mathrm{d}t$ (attention ! δW est une forme différentielle et pas une différentielle), et la durée dt infinitésimale.

> La puissance instantanée, définie par $p(t) = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$, n'est *pas une dérivée* puisque W n'est pas une fonction du temps (parler du « travail reçu à la date t » n'a pas de sens ; parler du travail δW reçu entre t et $t + \mathrm{d}t$ en a un).

Le travail reçu par le conducteur entre t_1 et t_2 s'obtient en sommant les travaux élémentaires : $W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\mathrm{d}t$.