Chapitre 1

# Propagation d'un signal

UN SCIENTIFIQUE

Le génie anglais **Thomas Young** (1773-1829) est un esprit universel ; il parle une dizaine de langues, et contribue par exemple au déchiffrement des hiéroglyphes égyptiens. Il se passionne aussi pour la botanique et la philosophie, mais c'est en tant que médecin qu'il exerce. Sa célébrité lui vient pourtant de ses expériences en optique, sur les interférences lumineuses, qui font apparaître la nature ondulatoire de la lumière.

## Un peu d'histoire

La propagation du son est étudiée dès l'Antiquité mais sans en comprendre la nature ondulatoire. Robert Boyle (1627-1691) montre que le son ne se propage pas dans le vide et, peu après, Mersenne et Gassendi essayent d'en estimer la vitesse de propagation dans l'air.

En 1690, Christiaan Huygens propose une théorie ondulatoire de la lumière et entre en conflit avec Newton qui penche pour une nature corpusculaire. Au tout début du XIXe siècle, Thomas Young reprend l'idée du savant hollandais qu'il justifie par des expériences de diffraction en obtenant ce qu'il nomme des interférences. Cette approche est peu après confortée par les travaux d'Augustin Fresnel puis, en 1850, par l'expérience de Léon Foucault sur le calcul de la vitesse de la lumière. La théorie des ondes électromagnétiques, énoncée en 1873 par James Clerk Maxwell, confirme le caractère ondulatoire de la lumière.

# ■■ Objectifs

## ■ Ce qu'il faut connaître

▷ Les différents types d'ondes et les grandeurs physiques correspondantes

▷ La forme mathématique d'une onde progressive (cas général et cas sinusoïdal)

▷ Des ordres de grandeur de fréquences

▷ Les phénomènes d'interférences, de diffraction

## ■ Ce qu'il faut savoir faire

▷ Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive

▷ Établir et utiliser la relation entre fréquence, longueur d'onde et célérité pour une onde progressive sinusoïdale

▷ Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives

# Résumé de cours

## Propagation d'un signal

### Signaux et ondes

Un **signal** est une fonction $s(t)$ décrivant les variations d'une grandeur physique au cours du temps. Un signal existant en tout point $M$ d'une région de l'espace, et comportant des oscillations au cours du temps, constitue une **onde**, décrite par une fonction $s(M,t)$.

– Un signal acoustique est constitué de variations de la pression d'un milieu matériel, de sa masse volumique et de sa vitesse locale.

– Un signal électrique est constitué de variations de l'intensité et de la tension dans un circuit.

– Un signal électromagnétique est constitué de variations des champs électrique et magnétique dans le milieu de propagation (qui peut être le vide) ; cela inclut la lumière, les infrarouges, les ultraviolets, les rayons X et gamma, les ondes de radio et de télévision, les micro-ondes…

### Onde progressive unidimensionnelle

Une onde **unidimensionnelle** dépend d'une seule coordonnée spatiale le long d'un axe, souvent $(Ox)$. Il s'agit, soit d'une onde dans un milieu à une dimension (onde électrique dans un câble, onde mécanique sur une corde…), soit d'un type particulier d'onde, l'**onde plane**, dans un milieu à deux ou trois dimensions.

Une **onde** (plane) **progressive** (OP) est la propagation d'un signal dans une certaine direction de l'espace, avec une certaine vitesse de propagation dont la norme $c$ est appelée **célérité**.

Une OP se propageant sans déformation selon l'axe $(Ox)$ peut s'écrire sous la forme générale :

$s(M,t)=F(t-x/c)$ ou $s(M,t)=F(x-ct)$ si elle se propage dans le sens des $x$ croissants ;

$s(M,t)=G(t+x/c)$ ou $s(M,t)=G(x+ct)$ si elle se propage dans le sens des $x$ décroissants.

En un point $M$ d'abscisse $x$, le signal prend les mêmes valeurs qu'à l'abscisse 0 mais avec un **retard** (algébrique) de $x/c$ dans le premier cas, ou une **avance** de $x/c$ dans le second cas.

⇨ **Méthode 1.1. Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive**

## Onde progressive sinusoïdale

### Forme mathématique

Une onde (plane) progressive sinusoïdale (ou harmonique) est de la forme :

$s(M,t)=A\cos(\omega t-kx+\psi)$ si elle se propage dans le sens des $x$ croissants ;

$s(M,t)=A\cos(\omega t+kx+\psi)$ si elle se propage dans le sens des $x$ décroissants.

C'est un cas particulier de la forme générale indiquée précédemment, à condition que la **pulsation temporelle** $\omega$ et la **pulsation spatiale** $k$ vérifient : $\boxed{\omega=kc}$ ($c$ étant également appelée ici **vitesse de phase**).

On appelle **vecteur d'onde** le vecteur $\vec{k}=k\overrightarrow{e_x}$ (premier cas) ou $\vec{k}=-k\overrightarrow{e_x}$ (second cas).

$A$ (> 0) est l'**amplitude** de l'onde ; elle correspond à la valeur maximale de $s(x,t)$.
$(\omega t \pm kx + \psi)$ est la **phase** au point d'abscisse $x$ à un instant $t$, et $\psi$ est la **phase à l'origine**.

La **fréquence (temporelle)** $f$ est le nombre d'oscillations par unité de temps : $\boxed{f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}}$.

$\omega$ et $f$ ont les dimensions de l'inverse d'un temps, mais $\omega$ s'exprime en radians par seconde (rad/s) et $f$ en hertz (Hz).

### ❑ Double périodicité

Une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité, temporelle et spatiale :

– la **période temporelle** $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$ est l'intervalle de temps minimal séparant deux valeurs identiques de l'onde en un point donné ;

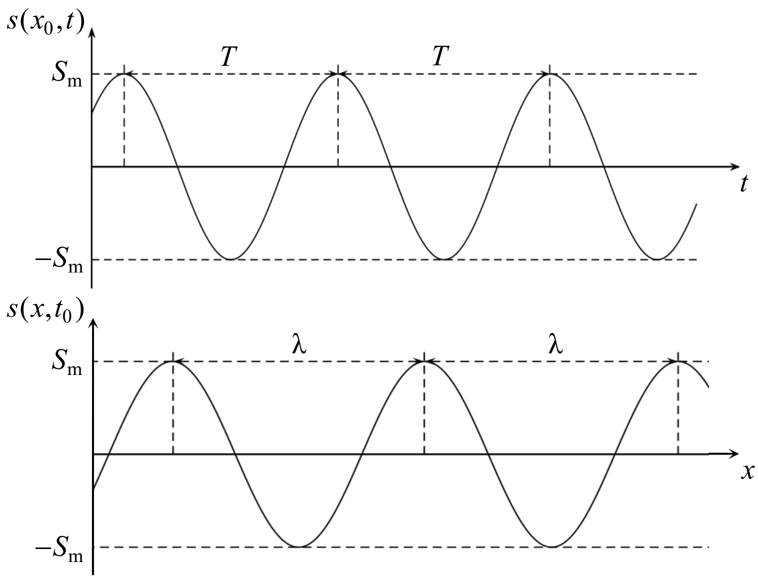
– la période spatiale ou **longueur d'onde** $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{k}}$ est, à un instant donné, la distance minimale séparant deux points où la valeur de l'onde est la même.

Ces deux périodes vérifient la relation $\boxed{\lambda = cT}$ qui montre que la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde en une période. Autre expression : $\boxed{\lambda = \dfrac{c}{f}}$ où $f$ est la fréquence temporelle.

⇨ **Méthode 1.2. Établir la relation entre périodes temporelle et spatiale**

Évolution de l'onde au cours du temps, en un point d'abscisse donnée $x_0$

Profil de l'onde le long de l'axe $(Ox)$, à un instant donné $t_0$




## ■ Onde progressive quelconque

### ❑ Spectre

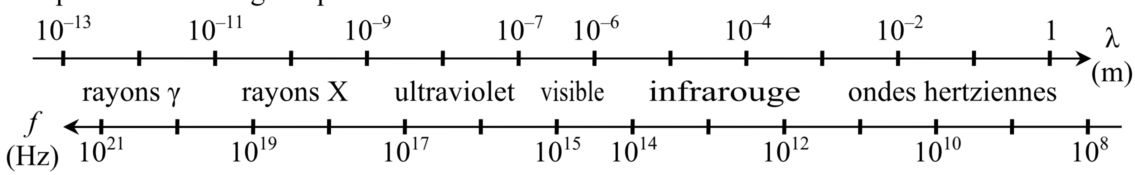
Une onde progressive quelconque peut être considérée comme une somme d'ondes progressives sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes : elles constituent le **spectre** de l'onde.

### ❑ Cas des ondes acoustiques

– Les sons audibles correspondent aux ondes acoustiques dans l'intervalle de fréquences $20\,\text{Hz} < f < 20\,\text{kHz}$ environ. La fréquence correspond à la hauteur du son (grave pour les faibles fréquences, aigu pour les fréquences élevées).
– Une note de musique est généralement une superposition de signaux appelés **harmoniques**, dont les fréquences sont multiples de la fréquence **fondamentale** définissant cette note.
– Les ultrasons correspondent à $f > 20\,\text{kHz}$, les infrasons à $f < 20\,\text{Hz}$.

### ❑ Cas des ondes électromagnétiques

– La lumière visible correspond aux ondes électromagnétiques dans l'intervalle de fréquences $4 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} < f < 8 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$ environ ; dans le vide où la célérité est $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, cela correspond à l'intervalle de longueurs d'onde $800\text{ nm} > \lambda > 400\text{ nm}$ environ.
La fréquence correspond à la couleur de la lumière (du rouge au violet, voir chapitre **2**).
– Certaines lumières sont **monochromatiques** (une seule fréquence), mais la plupart sont polychromatiques, avec un spectre **discret** (constitué seulement de quelques fréquences) ou **continu** (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).
– Certains dispositifs, tels que le prisme ou le réseau de diffraction, permettent de séparer les différentes composantes d'une lumière polychromatique.
– Spectre électromagnétique :



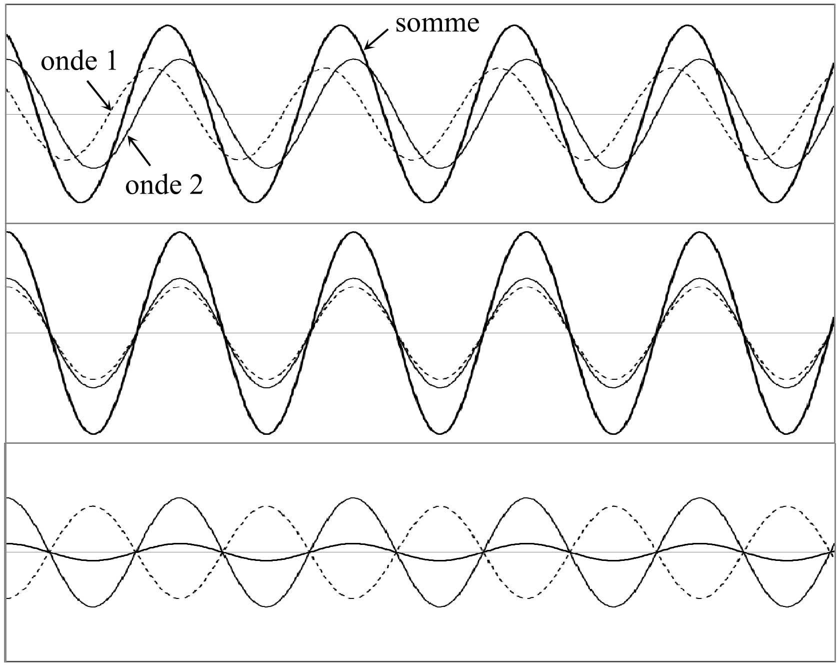

## ■ Interférences entre deux ondes

### ❑ Déphasage entre deux ondes en un point

Lorsque deux ondes progressives sinusoïdales, de célérité $c$ et *de même fréquence* $f$ (donc de même pulsation $\omega = 2\pi f$) se propagent dans une région de l'espace, il existe en tout point $M$ une différence $\delta$ entre les chemins parcourus par les deux ondes, d'où un décalage temporel $\tau$ et un déphasage $\varphi$ proportionnels à $\delta$ : $\tau = \dfrac{\delta}{c}$ et $\varphi = k\delta = kc\tau = \omega\tau = 2\pi\dfrac{\tau}{T}$.

### ❑ Onde résultante

Les fonctions correspondant aux deux ondes s'additionnent. On obtient ainsi le phénomène d'**interférences** : l'onde résultante au point $M$ est encore une onde sinusoïdale, dont l'amplitude dépend du déphasage $\varphi$ entre les deux ondes initiales en ce point. En particulier :
– en un point où les deux ondes arrivent **en phase** ($\varphi = 2m\pi$ avec $m$ entier), l'amplitude résultante est *maximale*, les interférences sont **constructives** ;
– en un point où les deux ondes arrivent **en opposition de phase** ($\varphi = (2m+1)\pi$ avec $m$ entier), l'amplitude résultante est *minimale* (et même nulle si ces deux ondes ont la même amplitude), les interférences sont **destructives**.




Ondes avec déphasage quelconque

Ondes en phase : amplitude résultante maximale (interférences constructives)

Ondes en opposition de phase : amplitude résultante minimale (interférences destructives)

## ■ Diffraction d'une onde

### ❑ Phénomène de diffraction

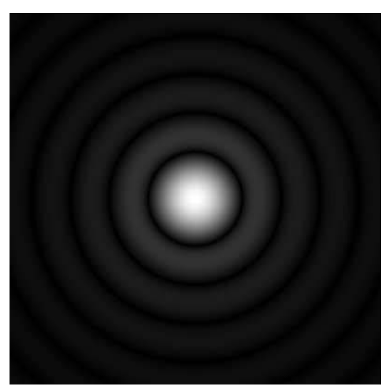
Lorsqu'une onde passe à côté d'un obstacle, elle est déviée. En particulier, si elle traverse une ouverture de largeur $a$, elle ressort en divergeant : c'est le phénomène de **diffraction**. Pour une onde monochromatique de longueur d'onde $\lambda$, la zone où l'amplitude diffractée est importante est un secteur de demi-angle $\theta$ tel que : $\boxed{\sin\theta \approx \frac{\lambda}{a}}$. Pour $\theta \ll 1$ (en rad), on peut écrire $\theta \approx \frac{\lambda}{a}$.

Le phénomène n'est donc pas perceptible pour une ouverture large, telle que $a \gg \lambda$.

### ❑ Observation

Pour la lumière visible, la diffraction est facilement observable pour des ouvertures de l'ordre de 1 à 100 µm.

Dans le cas d'une ouverture circulaire, la lumière diffractée « à l'infini » (à grande distance ou dans le plan focal d'une lentille convergente) forme une tache circulaire brillante appelée **tache d'Airy**, entourée d'anneaux peu lumineux.



La diffraction peut être mise en évidence pour tous les autres types d'ondes. Par exemple, on peut l'observer sur des photographies aériennes de la houle à l'entrée d'un port.

## ■ Comment étudier une onde progressive quelconque ?

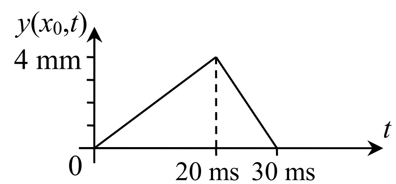
### ❑ Méthode 1.1. Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive

Supposons qu'on connaisse l'évolution temporelle d'un signal en un point donné, ainsi que la célérité de l'onde considérée.
– On peut en déduire l'évolution temporelle du signal en un autre point où passe l'onde, en déterminant simplement le retard entre les deux points.
– On peut également en déduire la forme globale du signal, sur l'ensemble du milieu considéré, à un instant donné. Pour cela, on repère les abscisses où apparaissent à cet instant certaines valeurs particulières du signal ; l'allure de la courbe est alors analogue à la précédente (variation temporelle), mais à l'envers.

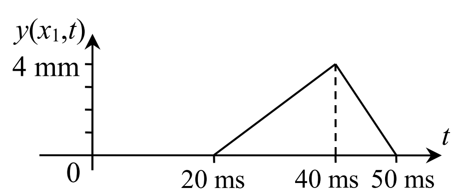
Inversement, si on connaît à un instant donné la forme du signal dans l'espace, on peut en déduire sa forme à un autre instant, ou l'évolution temporelle en un point donné.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2**

Considérons une onde de déformation se propageant le long d'une corde, selon l'axe $(Ox)$, dans le sens des $x$ croissants à partir du point d'abscisse 0, à une célérité $c = 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
La variation de l'élongation $y$ en $x_0 = 0$ au cours du temps est représentée sur le schéma ci-contre ; elle est nulle pour $t < 0$ et pour $t > 30$ ms.
On cherche à en déduire, d'une part la variation temporelle de l'élongation en $x_1 = 1{,}0$ m, d'autre part l'aspect de la corde aux instants $t_1 = 20$ ms, $t_2 = 40$ ms et $t_3 = 60$ ms.




– L'onde progressive est une fonction de la forme $y(M,t) = f(t - x/c)$. Tout se qui se passe en $x_0$ se reproduit en $x$ quelconque avec un retard $(x - x_0)/c$.
À l'abscisse $x_1$, le retard de l'onde par rapport au point d'abscisse 0 vaut $x_1/c = 20$ ms. L'évolution temporelle de $y$ en ce point reproduit donc celle à l'abscisse $x_0 = 0$ avec un retard de 20 ms.

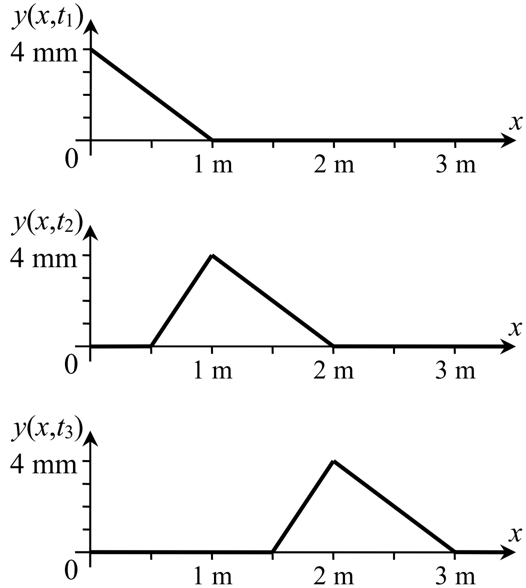


– Déterminons maintenant l'aspect global de la corde à différents instants.
Tout se qui se passe en $x_0$ à instant $t_0$ se reproduit ensuite, à un instant $t > t_0$, à l'abscisse $x_0 + c(t - t_0)$.

Le « front » du signal, c'est-à-dire le point où une élongation non nulle apparaît à cet instant, se trouve à l'abscisse $ct_i$, soit $ct_1 = 1{,}0$ m à $t_1$ puis $ct_2 = 2{,}0$ m et $ct_3 = 3{,}0$ m.

Le maximum d'élongation, qui se produit en 0 à l'instant $t_{\max 0} = t_1 = 20$ ms, se trouve à un instant ultérieur $t_i > t_{\max 0}$ à une abscisse $c(t_i - t_{\max 0})$, soit $c(t_2 - t_{\max 0}) = 1{,}0$ m à $t_2$ puis $c(t_3 - t_{\max 0}) = 2{,}0$ m à $t_3$.

Enfin la « queue » du signal, où se trouve la dernière élongation non nulle, n'apparaît sur la corde qu'à partir de l'instant $t_{q0} = 30$ ms où l'excitation se termine. Elle se trouve à un instant ultérieur $t_i > t_{q0}$ à une abscisse $c(t_i - t_{q0})$, soit à l'abscisse $c(t_2 - t_{q0}) = 0{,}5$ m à $t_2$ puis $c(t_3 - t_{q0}) = 1{,}5$ m à $t_3$.




– On peut finalement vérifier la cohérence entre le premier graphe et les deux autres :
en $x_0 = 0$, à l'instant $t_1 = 20$ ms l'ordonnée est à son maximum de 4 mm, puis à $t_2 = 40$ ms et à $t_3 = 70$ ms elle est redevenue nulle ;
le point d'abscisse $x_1 = 1{,}0$ m a bien une ordonnée nulle (mais qui va juste commencer à augmenter) à $t_1 = 20$ ms, une ordonnée de 4 mm à $t_2 = 40$ ms, et de nouveau nulle à $t_3 = 60$ ms.

## ■ Comment étudier une onde progressive sinusoïdale ?

### ❑ Méthode 1.2. Établir la relation entre périodes temporelle et spatiale

– On utilise la notion de retard de l'onde entre deux points pour établir la relation entre la période temporelle $T$ et la longueur d'onde (période spatiale) $\lambda$.
– On peut aussi la retrouver en utilisant l'autre définition de la longueur d'onde : distance parcourue par l'onde pendant une période (temporelle).

⇨ **Exercice 1.4**

Considérons une onde se propageant selon l'axe ($Ox$), dans le sens des $x$ croissants à partir du point d'abscisse 0, avec une célérité $c$.