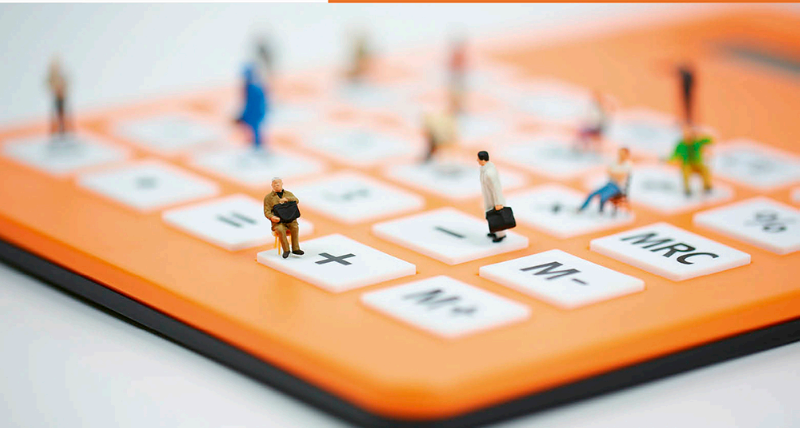
OUTILS **MATHÉMATIQUES** POUR **L'ÉCONOMIE**

Cours, exercices corrigés et applications économiques

Prérequis pour la licence



Franck Bien
Sophie Méritet

ellipses

Chapitre 1

Rappels sur le calcul numérique

Dans ce chapitre, nous rappelons les propriétés usuelles du calcul numérique, les notions de développement et de factorisation, l'utilisation des fractions et le calcul utilisant des puissances. Pour finir, nous proposons une application économique ainsi que des exercices corrigés.

Un peu d'histoire

Les premières traces d'écrits mathématiques remontent aux Sumériens qui, sur des tablettes d'argiles, dressaient des tables de multiplication et écrivaient des problèmes géométriques et de division.

Les mathématiciens Babyloniens (2000-1600 av. J.C.) utilisaient un système de numération à position de gauche vers la droite et de type sexagésimal (base 60). Ils utilisaient couramment l'addition et la soustraction. Pour les multiplications, ils utilisaient des tables numériques. Cependant, ils ne posaient pas de divisions car ils considéraient plutôt l'inverse du nombre. Ils connaissaient également les identités remarquables et appliquaient la factorisation.

Napier (1550 – 1617) aurait recouru à la notion de valeur absolue dans l'élaboration de sa table logarithmique. Descartes (1569 – 1650) et Newton (1642 – 1707) les auraient utilisées pour une théorie des équations polynomiales. Plus tard, Cauchy (1789 – 1857) a mobilisé ce concept pour l'analyse.

Bien souvent, le calcul littéral est utilisé en économie pour caractériser des valeurs d'équilibre ou de déséquilibre qui dépendant de paramètres. L'étude des valeurs d'équilibre en fonction des paramètres déterminent les actions de politique économique à mener. À cet effet, ce chapitre est présenté avec des entiers et ou des variables réelles représentés par des lettres. C'est ce maniement qui vous permettra de réussir vos calculs économiques.

Remarque sur les noms des variables

Les définitions, les propriétés et les calculs restent identiques même si le nom des variables change. Vous devez vous habituer à utiliser, par exemple, $x, y, z, t, a, b, c_1, c_2, q_1, q_2, k, l$.

1. Propriétés usuelles

Nous présentons brièvement, ci-après, les différentes propriétés pour réaliser des opérations avec des entiers représentés par des lettres et non plus par des nombres.

Propriétés de l'associativité et de la commutativité

Pour tous entiers a, b et c, l'addition et la multiplication sont associatives :

- $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c = abc$

Ces deux propriétés énoncent que l'ordre pour une séquence unique d'addition ou une séquence unique de multiplication est sans effet sur le résultat.
Entre deux entiers sous forme de lettres, le signe $\times$ est omis.

APPLICATION

Pour tous réels x, y, z et t, donner d'autres expressions des calculs suivants :

$A = (1 + 4) + (2 + 3) + (5 + 6),\ B = (x + 3) + (z + 5),$

$C = (x + y) + (z + t),\ D = (2 \times x) \times (4 \times t),$

$E = (x \times y) \times (z \times t)$

En appliquant les propriétés d'associativité et de commutativité, nous obtenons :

- $A = (1 + 4) + (2 + 3) + (5 + 6) = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = (7 + 7 + 7) = 21$
- $B = (x + 3) + (z + 5) = (x + z) + (3 + 5) = x + z + 8$
- $C = (x + y) + (z + t) = x + (y + z) + t = x + (y + z + t)$
  $= (x + y + z) + t = x + y + z + t$
- $D = (2 \times x) \times (4 \times t) = (2 \times 4) \times (x \times t) = 8 \times (x \times t) = 8xt$
- $E = (x \times y) \times (z \times t) = x \times (y \times z) \times t = x \times (y \times z \times t)$
  $= (x \times y \times z) \times t = (x \times y \times z \times t) = xyzt$

L'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, comprend les nombres $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Cet ensemble comprend le sous-ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, qui sont les entiers relatifs non négatifs ; c'est-à-dire : $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Nous avons $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Les nombres entiers relatifs sont un sous-ensemble des nombres réels, notés $\mathbb{R}$. Un nombre réel s'écrit sous la forme d'un entier suivi d'une séquence de chiffres finie ou infinie après la virgule. Nous avons donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
Par conséquent, toutes les propriétés présentées pour les entiers restent vérifiées pour les réels, à de rares exceptions près. Pour rappeler les cours de terminale, nous exprimons les propriétés avec des entiers et les applications avec des réels.

Propriétés des éléments neutres et de l'opposé

Pour tout entier $a \neq 0$, les propriétés suivantes sont respectées :

- Le nombre 0 est l'élément neutre de l'addition :

  $a + 0 = 0 + a = a$

- Le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication :

  $a \times 1 = 1 \times a = a$

- La somme d'un entier de son opposé est nulle :

  $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Le nombre 0 est le seul entier qui ne présente pas d'inverse, ce qui rend impossible une division par 0. C'est pour cette raison que l'on écrit $a \neq 0$ quand on veut diviser par a.

APPLICATION

Pour tous entiers x, y et z, calculer les expressions suivantes :

$$A = (8 + 12) + (-12),\ \ B = (x + z) + (-z) + y,$$

$$C = \big(x + (-z)\big) + (y + 2) + \big(z + (-x)\big),$$

$$D = (x \times 1) + (-z) + (y \times 1) + (z \times 1)$$

En appliquant les propriétés des éléments neutres de l'addition et de la multiplication, nous obtenons :

- $A = (8 + 12) + (-12) = 8 + \underbrace{\big(12 + (-12)\big)}_{=0} = 8$

- $B = (x + z) + (-z) + y = x + \underbrace{\big(z + (-z)\big)}_{=0} + y = x + y$

- $C = (x + (-z)) + (y + 2) + (z + (-x)) = \underbrace{\big(x + (-x)\big)}_{=0} +$

  $(y + 2) + \underbrace{\big(z + (-z)\big)}_{=0} = y + 2$

- $D = \underbrace{(x \times 1)}_{=x} + (-z) + \underbrace{(y \times 1)}_{=y} + \underbrace{(z \times 1)}_{=z} = x + (-z) + y + z =$

$$x + y + \underbrace{(z + (-z))}_{=0} = x + y$$

Les existences d'opposé et d'inverse permettent de présenter les autres opérations que sont respectivement la soustraction et la division.
Soient deux entiers a et b, l'addition de a et de l'opposé de b définit la soustraction de a par b :

$$a + (-b) = a - b$$

Propriétés de la soustraction et de l'opposé

Pour tous entiers a et b, les propriétés suivantes sont respectées :

- $a + (-b) = -\big((-a) + b\big) = -(-a + b) = a - b$
- $a - (-b) = -\big(-a + (-b)\big) = -(-a - b) = a + b$
- $a \times (-b) = -(a \times b) = (-a) \times b = -ab$
- $(-a) \times (-b) = -(-ab) = a \times b = ab$
- $-(-a) = a$

APPLICATION

Pour tous réels x, y et z, calculer les expressions suivantes :

$$A = (x + z) - (-y),\ B = (x + 2) + (-3) - (-4),$$

$$C = \big(x \times (-2)\big) + (-z + 3) + (y \times 3) + (2x - 3),$$

$$D = ((-2x) \times (-2)) + (8 - 4) + (y \times (-3)) + (-2x + 8)$$

En appliquant les propriétés de la soustraction, de l'opposé et des éléments neutres, nous obtenons :

- $A = (x + z) \underbrace{-(-y)}_{=+y} = (x + z) + y = x + y + z$
- $B = (x + 2) + (-3) \underbrace{-(-4)}_{=+4} = x + (2 - 3 + 4) = x + 3$
- $C = \underbrace{(x \times (-2))}_{=-2x} + (-z + 3) + \underbrace{(y \times 3)}_{=3y} + (2x - 3) = -2x +$

  $(-z + 3) + 3y + (2x - 3) = \underbrace{(-2x + 2x)}_{=0} + 3y - z + \underbrace{(3 - 3)}_{=0} =$

  $3y - z$
- $D = \underbrace{((-2x) \times (-2))}_{=-(-4x)=4x} + (8 - 4) + \underbrace{(y \times (-3))}_{=-3y} + (-2x + 8) =$

$$4x + 4 - 3y + (-2x + 8) = (4x - 2x) - 3y + (4 + 8) = 2x - 3y + 12$$

Soient deux entiers a et b avec $b \neq 0$, le produit de a et de l'inverse de b définit la division de a par b :

$$a \times \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

Propriétés de la multiplication et de l'inverse

Pour tous entiers a et b avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, les propriétés suivantes sont respectées :

- $a \times \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{a} = 1$
- $a \times \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$
- $\left(\frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a \times b} = \frac{1}{ab}$
- $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$
- $a \times \left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right) = ab$

Propriétés de la division et de l'inverse

Pour tous entiers a et b avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, les propriétés suivantes sont respectées :

- $1 \div a = \frac{1}{a}$
- $1 \div \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{a}} = 1 \times a = a$
- $1 \div \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right) = 1 \times \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a}}}\right) = 1 \times \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$
- $a \div b = a \times \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$
- $a \div \left(\frac{1}{b}\right) = a \times \left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right) = a \times b = ab$
- $\left(\frac{1}{a}\right) \div \left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \times b = \frac{b}{a}$

APPLICATION

Pour tous réels x et y avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$, calculer les expressions suivantes :

$$A = 4x \times \left(\frac{1}{2x}\right), B = 8 \times \left(\frac{1}{2x}\right), C = 6x \times \left(\frac{1}{2y}\right), D = 4x \div \left(\frac{1}{2}\right),$$
$$E = 6x \div \left(\frac{1}{2y}\right)$$

En appliquant les propriétés de la décomposition, des éléments neutres, de la division et de l'inverse, nous obtenons :

- $A = 4x \times \left(\frac{1}{2x}\right) = \underbrace{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)} \times \underbrace{x \times \left(\frac{1}{x}\right)} = \underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)}_{=2} \times \underbrace{\left(\frac{x}{x}\right)}_{=1} = 2 \times 1 = 2$
- $B = 8 \times \left(\frac{1}{2x}\right) = \underbrace{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)} \times \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{8}{2}\right) \times \left(\frac{1}{x}\right) = 4 \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x}$
- $C = 6x \times \left(\frac{1}{2y}\right) = \underbrace{6 \times \left(\frac{1}{2}\right)} \times x \underbrace{\times \left(\frac{1}{y}\right)} = \left(\frac{6}{2}\right) \times \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{3x}{y}$
- $D = 4x \underbrace{\div \left(\frac{1}{2}\right)}_{=\times 2} = 4x \times 2 = (4 \times 2) \times x = 8x$
- $E = 6x \underbrace{\div \left(\frac{1}{2y}\right)}_{=\times 2y} = 6x \times 2y = (6 \times 2) \times (x \times y) = 12 \times (xy) =$

  $12xy$

Propriétés de la priorité des calculs

Les calculs s'effectuent de gauche à droite en respectant l'ordre des éléments suivants :

- Dans un premier temps, respecter les parenthèses ;
- Dans un second temps, tenir compte tout d'abord de la multiplication, ensuite de la division puis de l'addition et finir par la soustraction.

APPLICATION

Calculer les expressions suivantes :

$$A = 12 - 6 \times 2 + 3, \; B = (4 + 2) \times (8 \div 2) - (18 - 6),$$

$$C = 10 - 5 \times 2 + 4 \div 2, \; D = 4 + 2 \times 8 \div 4 - (18 - 6)$$

En appliquant les règles de la priorité des calculs, nous obtenons :

- $A = 12 - 6 \times 2 + 3 = 12 - (6 \times 2) + 3 = 12 - 12 + 3 = 3$

- $B = (4 + 2) \times (8 \div 2) - (18 - 6) = 6 \times 4 - 12 = (6 \times 4) - 12 = 24 - 12 = 12$
- $C = 10 - 5 \times 2 + 4 \div 2 = 10 - (5 \times 2) + (4 \div 2) = 10 - 10 + 2 = 2$
- $D = 4 + 2 \times 8 \div 4 - (18 - 6) = 4 + (2 \times 8) \div 4 - 12 = 4 + 16 \div 4 - 12 = 4 + (16 \div 4) - 12 = 4 + 4 - 12 = -4$

Pour la suite du chapitre, le signe $\times$ est supprimé entre deux entiers, deux variables, un entier ou une variable et une parenthèse. Il est cependant conservé entre deux parenthèses.

2. Développement et factorisation

Le développement consiste à écrire sous forme de somme une expression factorisée pour faire disparaître le(s) facteur(s) commun(s) ainsi que les parenthèses.

Propriétés des développements de produits

Pour tous entiers a, b, c, d et k, les relations de distributivité suivantes sont vérifiées :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + b) \times (c + d) = a(c + d) + b(c + d)$
  $= ac + ad + bc + bd$
- $(a - b) \times (c + d) = a(c + d) - b(c + d)$
  $= ac + ad - bc - bd$
- $(a - b) \times (c - d) = a(c - d) - b(c - d) = ac - ad - bc + (-b) \times (-d) = ac - ad - bc + bd$

APPLICATION

Pour tous réels x, y, et entiers a et b, développer les expressions suivantes :

$A = 4(x - 3) - 2(y - 2)$, $B = (x - 3) \times (y + 2)$,

$C = (a - x) \times (y - b)$

En appliquant les propriétés des développements de produits, nous obtenons :

- $A = 4(x-3) - 2(y-2) = 4x - 12 - 2y + 4 = 4x - 2y - 8$
- $B = (x-3) \times (y+2) = xy + 2x - 3y - 6$
- $C = (a-x) \times (y-b) = a(y-b) - x(y-b) = ay - ab - xy + xb$

La factorisation d'une expression mathématique est un procédé inverse à celui du développement. Elle consiste à écrire une expression en faisant apparaître le(s) facteur(s) commun(s) ainsi que des parenthèses. Nous obtenons les relations inverses énoncées pour les propriétés de développements des produits.

Propriétés des factorisations de produits

Pour tous entiers a, b, c, d et k, les relations de factorisation suivantes sont vérifiées :

- $ka + kb = k(a+b)$
- $ka - kb = k(a-b)$
- $ac + ad + bc + bd = a(c+d) + b(c+d)$
  $= (a+b) \times (c+d)$
- $ac + ad - bc - bd = a(c+d) - b(c+d)$
  $= (a-b) \times (c+d)$
- $ac - ad - bc + bd = a(c-d) - b(c-d) = ac - ad - bc + (-b) \times (-d) = (a-b) \times (c-d)$

APPLICATION

Pour tous réels x, y, et entiers a et b, factoriser les expressions suivantes :

$A = 2x - 4y + 8$, $B = 2xy - 2x + y - 1$,

$C = -8xy + 6xb - 4ay + 3ab$

- Le facteur commun de l'expression $A = 2x - 4y + 8$ est 2. On a $A = 2 \times x - 2 \times 2y + 2 \times 4 = 2(x - 2y + 4)$.
- Le facteur commun de l'expression $2xy - 2x$ est $2x$. On a $B = 2x(y-1) + (y-1)$. Le facteur commun de l'expression $B = 2x(y-1) + (y-1)$ est $(y-1)$. On a $B = (2x+1) \times (y-1)$.
- Le facteur commun de l'expression $-8xy + 6xb$ est $2x$ et celui de l'expression $-4ay + 3ab$ est a. On a :