

Claire Meyer  
Gérard Meyer

# Outils mathématiques pour réussir en physique

Cours et exercices corrigés



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction au déterminant</b>	<b>9</b>
1.1	Quelques définitions . . . . .	10
1.1.1	Définition de la base canonique $\mathbf{R}^n$ (ou de $\mathbf{C}^n$ ) . . . . .	10
1.1.2	Définition du produit scalaire . . . . .	10
1.2	Application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ . . . . .	11
1.3	Forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	12
1.4	Forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	12
1.4.1	Forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	13
1.4.2	Forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	13
1.5	Forme trilinéaire sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	14
1.5.1	Forme trilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	14
1.5.2	Forme trilinéaire antisymétrique sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	15
1.6	Forme p-linéaire sur $\mathbf{R}^n$ . . . . .	16
1.6.1	Forme p-linéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$ (ou sur $\mathbf{C}^n$ ) . . . . .	16
1.6.2	Forme p-linéaire antisymétrique sur $\mathbf{R}^n$ (ou sur $\mathbf{C}^n$ ) . . . . .	16
1.6.3	Forme p-linéaire alternée sur $\mathbf{R}^n$ (ou sur $\mathbf{C}^n$ ) . . . . .	16
1.7	Déterminant d'une suite de vecteurs . . . . .	17
1.7.1	Cas particulier $n = 2$ . . . . .	17
1.7.2	Cas particulier $n = 3$ . . . . .	18
1.7.3	Cas général $n \geq 4$ . . . . .	21
1.7.4	Propriétés du déterminant . . . . .	22
1.7.5	Application des déterminants à la résolution de systèmes . . . . .	26
1.8	Produit extérieur de formes multilinéaires . . . . .	29
1.8.1	Définition du produit extérieur . . . . .	29
1.8.2	Propriétés du produit extérieur . . . . .	30
1.9	Exercices du chapitre 1 . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Notion d'opérateurs</b>	<b>39</b>
2.1	Notion de champ scalaire et de champ vectoriel . . . . .	39
2.1.1	Champ scalaire sur $\mathbf{R}^3$ . . . . .	39

2.1.2	Champ vectoriel sur $\mathbf{R}^3$ ou champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$	39
2.2	Gradient d'un champ scalaire	41
2.3	Gradient d'un champ vectoriel $\vec{V}$	42
2.4	Divergence d'un champ de vecteurs $\vec{V}$	43
2.5	Rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{V}$	43
2.6	Laplacien d'une fonction scalaire $f$	44
2.7	Laplacien d'un champ de vecteurs $\vec{V}$	44
2.8	Utilisons la définition intrinsèque du gradient	44
2.8.1	Composantes du gradient en coordonnées cylindriques	44
2.8.2	Composantes du gradient en coordonnées sphériques	46
2.9	Exercices du chapitre 2	48
<b>3</b>	<b>Notion d'intégrales doubles</b>	<b>77</b>
3.1	Définition d'une intégrale double	77
3.2	Calcul d'une intégrale double	79
3.2.1	Première méthode (Fig. 3.2)	79
3.2.2	Deuxième méthode (Fig. 3.3)	79
3.2.3	Changement de variable - intégrale double	82
3.3	Exercices du chapitre 3	84
<b>4</b>	<b>Notion d'intégrales triples</b>	<b>107</b>
4.1	Méthode par tranches (Fig. 4.2)	108
4.2	Méthodes par piles (Fig. 4.3)	109
4.3	Changement de variable - intégrale triple	110
4.4	Exercices du chapitre 4	112
<b>5</b>	<b>Formes différentielles</b>	<b>139</b>
5.1	Notion de forme différentielle	139
5.1.1	Formes différentielles de degré 1	141
5.1.2	Produit extérieur de deux formes différentielles	143
5.1.3	Forme différentielle de degré 2	144
5.1.4	Propriétés du produit extérieur de deux formes	144
5.1.5	Forme différentielle de degré 3	145
5.1.6	Classe d'une forme différentielle	146
5.2	Différentiation extérieure	146
5.3	Primitive d'une forme différentielle	148
5.4	Transposée d'une forme différentielle	149
5.5	Propriétés des transposées	151
5.6	Théorème de Poincaré	151
5.6.1	Forme différentielle fermée	151
5.6.2	Forme différentielle totale	152

5.6.3	Définition d'une partie étoilée de $\mathbf{R}^2$ . . . . .	152
5.6.4	Théorème de Poincaré . . . . .	153
5.7	Exercices du chapitre 5 . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Notion d'intégrale curviligne</b> . . . . .	<b>159</b>
6.1	Définition d'un arc paramétré . . . . .	159
6.2	Définition d'un arc géométrique . . . . .	160
6.3	Définition d'une intégrale curviligne . . . . .	160
6.4	Exemple de calcul d'intégrales curvilignes . . . . .	162
6.5	Cas particulier où la différentielle $\omega$ est totale . . . . .	164
6.6	Propriétés de l'intégrale curviligne . . . . .	164
6.7	Exercices du chapitre 6 . . . . .	165
<b>7</b>	<b>Notion d'intégrales de surface</b> . . . . .	<b>175</b>
7.1	Définition d'une nappe paramétrée . . . . .	175
7.2	Définition d'une nappe géométrique . . . . .	176
7.3	Définition de l'intégrale de surface . . . . .	177
7.4	Formules pour le calcul . . . . .	180
7.5	Cas particulier : surface d'équation $z = f(x, y)$ . . . . .	184
7.6	Cas des surfaces de révolution . . . . .	185
7.6.1	Aire d'une surface de révolution . . . . .	185
7.6.2	Volume de révolution . . . . .	186
7.7	Exercices du chapitre 7 . . . . .	187
<b>8</b>	<b>Formule de Green-Riemann</b> . . . . .	<b>209</b>
8.1	Démonstration de la formule de Green-Riemann . . . . .	209
8.2	Green-Riemann avec les formes différentielles . . . . .	211
8.3	Exercices du chapitre 8 . . . . .	212
<b>9</b>	<b>Formules de Stokes et d'Ostrogradsky</b> . . . . .	<b>225</b>
9.1	Démonstration de la formule de Stokes-Ampère . . . . .	225
9.2	Démonstration de la formule d'Ostrogradsky . . . . .	229
9.3	Utilisation des formes différentielles . . . . .	232
9.3.1	Retour sur la formule de Stokes-Ampère . . . . .	233
9.3.2	Retour sur la formule d'Ostrogradsky . . . . .	234
9.4	Champ de gradients . . . . .	235
9.5	Champ de rotationnels . . . . .	238
9.6	Exercices du chapitre 9 . . . . .	241