

Pierre Flédric

Licence




# Nombres complexes



Problèmes corrigés et rappels de cours



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le corps des complexes</b>	<b>9</b>
1.1	Nombres complexes . . . . .	9
1.1.1	Construction des complexes . . . . .	10
1.1.2	Simplifions les écritures! . . . . .	13
1.1.3	Le corps des nombres complexes . . . . .	16
1.1.3.1	Parties réelles, imaginaires, conjugaison . . . . .	16
1.1.3.2	Interprétation géométrique . . . . .	20
1.2	Module d'un complexe . . . . .	22
1.2.1	Module . . . . .	22
1.2.2	Inégalités et égalité triangulaires . . . . .	26
1.3	Complexes de module 1 . . . . .	28
1.4	Arguments d'un nombre complexe . . . . .	35
1.5	Équations du second degré . . . . .	40
1.5.1	Complexes de carré donné . . . . .	40
1.5.2	Trinôme du second degré . . . . .	43
1.6	Racines n-ièmes . . . . .	45
1.7	Exponentielle complexe . . . . .	49
1.8	Nombres complexes et géométrie plane . . . . .	51
1.8.1	Interprétation d'un angle orienté . . . . .	51
1.8.2	Alignement et orthogonalité . . . . .	53
1.8.3	Complexes et transformations géométriques . . . . .	54
1.8.3.1	Le lien . . . . .	54
1.8.3.2	Isométries et similitudes du plan . . . . .	55
1.8.3.3	Rotation . . . . .	56
1.8.3.4	Translation . . . . .	60
1.8.3.5	Homothétie . . . . .	60
1.8.3.6	Réflexion d'axe passant par l'origine . . . . .	62
1.9	Quelques notions utiles pour les problèmes . . . . .	63
1.9.1	Les types de raisonnement . . . . .	63

1.9.2	Applications entre ensembles . . . . .	65
1.9.3	Systèmes d'équations linéaires . . . . .	69
1.9.4	Polynômes . . . . .	73
<b>2</b>	<b>Problèmes</b>	<b>81</b>
2.1	Géométrie et algèbre . . . . .	81
2.1.1	Constructions à la règle et au compas. . . . .	81
2.1.1.1	Un pentagone régulier . . . . .	81
2.1.1.2	Une racine quartique . . . . .	82
2.1.1.3	Une équation de racine $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ . . . . .	84
2.1.1.4	Premier point de Brocard . . . . .	85
2.1.2	Raisonnements géométriques . . . . .	86
2.1.2.1	Nature d'un quadrilatère . . . . .	86
2.1.2.2	Caractérisation de l'équilatéralité . . . . .	87
2.1.2.3	Centre du cercle circonscrit . . . . .	88
2.1.2.4	Théorème de Finsler–Hadwiger . . . . .	88
2.1.2.5	Division euclidienne et réseaux de $\mathbb{C}$ . . . . .	89
2.1.3	Images directes et réciproques . . . . .	92
2.1.3.1	Étude d'une fonction rationnelle . . . . .	92
2.1.3.2	La fonction carré  . . . . .	93
2.1.3.3	Retour sur la fonction rationnelle . . . . .	95
2.1.3.4	Lignes de niveau . . . . .	97
2.1.3.5	Inversion géométrique . . . . .	99
2.2	Analyse . . . . .	101
2.2.1	Suites . . . . .	101
2.2.1.1	La convergence complexe . . . . .	101
2.2.1.2	Une suite arithmético-géométrique  . . . . .	103
2.2.1.3	Une fractale : ensemble de Julia  . . . . .	104
2.2.2	Fonctions . . . . .	108
2.2.2.1	Une homographie . . . . .	108
2.2.2.2	Équations avec exponentielles . . . . .	108
2.2.2.3	Cosinus complexe . . . . .	109
2.2.2.4	Quelques calculs d'intégrales . . . . .	110
2.2.2.5	Interpolation des permutations de $\mathbb{U}_4$ . . . . .	111
2.2.3	Sommes et produits . . . . .	113
2.2.3.1	Inégalité triangulaire généralisée . . . . .	113
2.2.3.2	Une suite produit de complexes . . . . .	114
2.2.3.3	Une somme de quotients de sinus . . . . .	114
2.3	Polynômes . . . . .	116
2.3.1	Racines et factorisations . . . . .	116

2.3.1.1	Factorisation de polynômes de degré 2 . . . . .	116
2.3.1.2	Deux polynômes de degré 4 et 8 . . . . .	116
2.3.1.3	Un polynôme à 3 racines non réelles  . . . . .	116
2.3.1.4	Un polynôme à 4 racines non réelles . . . . .	117
2.3.2	Applications . . . . .	117
2.3.2.1	Équivalents des racines d'un polynôme . . . . .	117
2.3.2.2	Un calcul de produit de sinus . . . . .	118
2.3.2.3	Une famille de polynômes  . . . . .	119
2.3.2.4	Le théorème de Lucas . . . . .	121
2.3.2.5	Étude d'un produit de distances . . . . .	123
2.4	Matrices & systèmes . . . . .	124
2.4.1	Configuration définie par un système linéaire . . . . .	124
2.4.2	Construction matricielle de $\mathbb{C}$ . . . . .	126
2.5	Pour aller un peu plus loin . . . . .	128
2.5.1	Le théorème fondamental de l'algèbre . . . . .	128
2.5.2	Spectre des matrices stochastiques $3 \times 3$ . . . . .	130
2.5.3	Spectre des matrices stochastiques $3 \times 3$ , suite . . . . .	132
2.5.4	Polygones réguliers convexes . . . . .	133
2.5.5	Birapport et théorème de Ptolémée . . . . .	134
2.5.6	Les quaternions comme matrices complexes . . . . .	136
<b>3</b>	<b>Corrigés</b> . . . . .	<b>139</b>
3.1	Géométrie . . . . .	139
3.1.1	Constructions à la règle et au compas . . . . .	139
3.1.1.1	Un pentagone régulier . . . . .	139
3.1.1.2	Une racine quartique . . . . .	143
3.1.1.3	Une équation de racine $\pi/8$ . . . . .	145
3.1.1.4	Premier point de Brocard . . . . .	149
3.1.2	Raisonnements géométriques. . . . .	152
3.1.2.1	Nature d'un quadrilatère . . . . .	152
3.1.2.2	Caractérisation de l'équilatéralité . . . . .	153
3.1.2.3	Centre du cercle circonscrit . . . . .	155
3.1.2.4	Théorème de Finsler-Hadwiger . . . . .	157
3.1.2.5	Division euclidienne et réseaux de $\mathbb{C}$ . . . . .	159
3.1.3	Images directes et réciproques . . . . .	166
3.1.3.1	Étude d'une fonction rationnelle . . . . .	166
3.1.3.2	La fonction carré . . . . .	170
3.1.3.3	Retour sur la fonction rationnelle . . . . .	177
3.1.3.4	Lignes de niveau . . . . .	183
3.1.3.5	Inversion géométrique . . . . .	186

3.2	Analyse . . . . .	193
3.2.1	Suites . . . . .	193
3.2.1.1	La convergence complexe . . . . .	193
3.2.1.2	Une suite arithmético-géométrique . . . . .	196
3.2.1.3	Une fractale : ensemble de Julia . . . . .	200
3.2.2	Fonctions . . . . .	209
3.2.2.1	Une homographie . . . . .	209
3.2.2.2	Équations avec exponentielles . . . . .	211
3.2.2.3	Cosinus complexe . . . . .	212
3.2.2.4	Quelques calculs d'intégrales . . . . .	215
3.2.2.5	Interpolation des permutations de $\mathbb{U}_4$ . . . . .	219
3.2.3	Sommes et produits . . . . .	221
3.2.3.1	Inégalité triangulaire généralisée . . . . .	221
3.2.3.2	Une suite produit de complexes . . . . .	225
3.2.3.3	Une somme de quotients de sinus . . . . .	226
3.3	Polynômes . . . . .	229
3.3.1	Racines et factorisations . . . . .	229
3.3.1.1	Factorisation de polynômes de degré 2 . . . . .	229
3.3.1.2	Deux polynômes de degrés 4 et 8 . . . . .	230
3.3.1.3	Un polynôme à 3 racines non réelles . . . . .	231
3.3.1.4	Un polynôme à 4 racines non réelles . . . . .	235
3.3.2	Applications . . . . .	238
3.3.2.1	Équivalents des racines d'un polynôme . . . . .	238
3.3.2.2	Un calcul de produit . . . . .	241
3.3.2.3	Une famille de polynômes . . . . .	242
3.3.2.4	Le théorème de Lucas . . . . .	247
3.3.2.5	Étude d'un produit de distances . . . . .	253
3.4	Matrices & systèmes . . . . .	256
3.4.1	Configuration définie par un système linéaire . . . . .	256
3.4.2	Construction matricielle de $\mathbb{C}$ . . . . .	262
3.5	Pour aller un peu plus loin . . . . .	268
3.5.1	Théorème de Gauss-d'Alembert . . . . .	268
3.5.2	Spectre des matrices stochastiques $3 \times 3$ . . . . .	273
3.5.3	Spectre des matrices stochastiques $3 \times 3$ , suite . . . . .	278
3.5.4	Polygones réguliers convexes . . . . .	280
3.5.5	Birapport et théorème de Ptolémée . . . . .	283
3.5.6	Les quaternions comme matrices complexes . . . . .	288