Pierre Flédrich

Licence

Nombres complexes

Problèmes corrigés et rappels de cours

ellipses

Chapitre 1

Le corps des complexes

On considère connus le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et la fonction exponentielle réelle, la trigonométrie basique sur les fonctions réelles sinus et cosinus. Après quelques éléments historiques, on construit les nombres complexes. Le lecteur pressé pourra directement aller à la section 1.1.3 page 16.

1.1 Nombres complexes

L'histoire des nombres complexes (cf. [Dahan-Dalmedico]) débute à la Renaissance en Italie, avec la résolution des équations du troisième et du quatrième degré qui nécessite l'introduction de *nombres impossibles* de carré négatif, avec les travaux de Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli, Nicolo Fontana, dit Tartaglia, et Ludovico Ferrari. C'est Descartes qui le premier emploie le terme de *racine imaginaire* pour une équation polynomiale en 1637 et c'est Albert de Girard en 1629 qui affirme, sans pouvoir le prouver, que toute équation polynomiale de degré n a n racines à condition de compter celles impossibles, chaque racine à son ordre de multiplicité. Les nombres complexes sont alors progressivement acceptés et utilisés de manière empirique. Moivre et Euler découvrent des liens trigonométrique, par exemple pour le premier en 1738 en décrivant les racines n-ièmes et le second dès 1740 en écrivant la célèbre et capitale identité

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

qui relie quatre réels fondamentaux. Bien que leur emploi soit de plus en plus fréquent, les nombres complexes incitent à la méfiance, entre ambiguïtés de notation et absence de fondements structurels. Il faut attendre le dix-neuvième siècle pour voir émerger leur aspect géométrique notamment grâce à l'abbé Buée et Jean-Robert Argand, puis encore avec les travaux de Gauss et de Cauchy : on les associe à des vecteurs ou des points du plan et les transformations du plan s'expriment alors sous forme de transformations complexes. Gauss propose à partir de 1799 quatre démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre conjecturé par Girard. Non content de penser géométriquement les nombres complexes, il développera aussi des conséquences arithmétiques par une extension de la notion de nombre entier : l'anneau des entiers de Gauss, en 1832. Cauchy n'est pas en reste en donnant dès 1847 une vision algébrique des complexes comme un corps de classes d'équivalences de polynômes modulo x^2+1, et c'est lui qui introduit la notation i. Toujours au dix-neuvième siècle, on commence à développer l'analyse complexe. Les fonctions sont maintenant à variable complexe avec une notion de dérivabilité : l'holomorphie. Les bâtisseurs les plus importants de cette théorie sont les mathématiciens Euler, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass. Les conséquences physiques et mathématiques sont alors innombrables et ne cesseront plus d'essaimer : électromagnétisme, prolongement analytique, géométrie des surfaces de Riemann, théorie analytique des nombres, systèmes dynamiques, théories modernes physiques, etc. On pourra en découvrir quelques-unes à la lecture de [Penrose].

1.1.1 Construction des complexes

Soit l'ensemble $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ constitué de l'ensemble des couples de réels (x, y). Nous allons fabriquer sur $\mathbb{C}$ deux lois de composition internes : des nouvelles formes d'addition et de multiplication de couples qui redonnent des couples.

Définition 1. Addition et multiplication sur $\mathbb{C}$:

1. On définit l'addition en posant pour toute paire de couples (x, y) et (x', y')
$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')\,.$$
2. On définit la multiplication en posant pour toute paire de couples (x, y) et (x', y')
$$(x, y) \otimes (x', y') = (x \times x' - y \times y', x \times y' + x' \times y)\,.$$

Exemple 1. Addition et multiplication.

1. $(2, 3) \oplus (4, 5) = (6, 8)$.
2. $(2, 3) \otimes (4, 5) = (-7, 22)$.

On prouve sans difficulté les nouvelles règles de calcul pour ces deux opérations :

Proposition 1. ***Règles sur l'addition de couples.***

1. *la loi $\oplus$ est associative : quels que soient les couples (x, y), (x', y') et (x'', y'') on a*

$$(x, y) \oplus \left((x', y') \oplus (x'', y'')\right) = \left((x, y) \oplus (x', y')\right) \oplus (x'', y'') .$$

2. *la loi $\oplus$ admet un élément neutre $(0, 0)$: pour tout complexe couple (x, y), on a*

$$(x, y) \oplus (0, 0) = (0, 0) \oplus (x, y) = (x, y) .$$

3. *Tout couple admet un symétrique pour la loi $\oplus$: pour tout couple (x, y), il existe un couple (x', y') tel que*

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x', y') \oplus (x, y) = (0, 0) .$$

   avec $(x', y') = (-x, -y)$, noté $-(x, y)$ qu'on appelle l'opposé de (x, y).

4. *La loi $\oplus$ est commutative : quels que soient les couples (x, y) et (x', y') on a*

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x', y') \oplus (x, y) .$$

Exemple 2.

1. Associativité de l'addition :

$$\begin{aligned}(1, 2) \oplus ((3, 4) \oplus (5, 6)) &= (1, 2) \oplus ((8, 10)) = (9, 12) = (4, 6) \oplus (5, 6)\\ &= ((1, 2) \oplus (3, 4)) \oplus (5, 6) .\end{aligned}$$

2. Élément neutre de l'addition :

$$(1, 2) \oplus (0, 0) = (1 + 0, 2 + 0) = (1, 2) = (0 + 1, 0 + 2) = (0, 0) \oplus (1, 2) .$$

3. L'opposé de $(2, 3)$ est $-(2, 3) = (-2, -3)$. On a $(2, 3) \oplus (-2, -3) = (0, 0)$.
4. Commutativité de l'addition :

$$(1, 2) \oplus (3, 4) = (4, 6) = (3, 4) \oplus (1, 2) .$$

Proposition 2. ***Règles sur la multiplication de couples :***

1. *La loi $\otimes$ est associative : quels que soient les couples (x, y), (x', y') et (x'', y'') on a :*

$$\left((x,y)\otimes\left(x'\otimes y'\right)\right)\otimes\left(x'',y''\right)=(x,y)\otimes\left(\left(x',y'\right)\otimes\left(x'',y''\right)\right).$$

2. *la loi $\otimes$ admet un élément neutre $(1,0)$: quel que soit le couple (x, y), on a*

$$(x,y)\otimes(1,0)=(1,0)\otimes(x,y).$$

3. *Tout couple $(x, y) \neq (0, 0)$ admet un symétrique pour la loi $\otimes$ il existe (x', y') tel que $(x, y) \otimes (x', y') = (1, 0)$. Le symétrique de (x, y), est*

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

   On l'appelle l'inverse du couple (x, y).

4. *La loi $\otimes$ est commutative : quels que soient les couples (x, y) et (x', y') on a*

$$(x,y)\otimes\left(x',y'\right)=\left(x',y'\right)\otimes(x,y).$$

5. *La loi $\otimes$ est distributive sur la loi $\oplus$: quels que soient les couples (x, y), (x', y') et (x'', y'') on a*

$$(x,y)\otimes\left(\left(x',y'\right)\oplus\left(x'',y''\right)\right)=(x,y)\otimes\left(x',y'\right)\oplus(x,y)\otimes\left(x'',y''\right).$$

Exemple 3.

1. Associativité de la multiplication :

$$\begin{aligned}(1,2)\otimes((3,4)\otimes(5,6))&=(1,2)\otimes((-9,38))=(-85,20)=(-5,10)\otimes(5,6)\\&=((1,2)\otimes(3,4))\otimes(5,6).\end{aligned}$$

2. Élément neutre de la multiplication :

$$(1,2)\otimes(1,0)=(1,2)=(1,0)\otimes(1,2).$$

3. L'inverse de $(2, 3)$ est

$$(2,3)^{-1}=\left(\frac{2}{2^2+3^2},-\frac{3}{2^2+3^2}\right)=\left(\frac{2}{13},-\frac{3}{13}\right).$$

   On a $(2,3)\otimes\left(\frac{2}{13},-\frac{3}{13}\right)=(1,0)$.

4. Commutativité de la multiplication :

$$(1,2) \otimes (3,4) = (-5,10) = (3,4) \otimes (1,2)\,.$$

Proposition 3. ***Parties réelles et imaginaires d'un couple.***
Remarquons que tout couple de réels (x,y) s'écrit alors de manière unique

$$(x,y) = (x,0) \oplus ((0,1) \otimes (y,0))\,.$$

En effet

$$(x,0) \oplus ((0,1) \otimes (y,0)) = (x,0) \oplus (0,y) = (x,y)\,.$$

Le couple $(x,0)$ s'appelle la partie réelle du couple (x,y) alors que le couple $(0,y)$ s'appelle la partie imaginaire du couple (x,y).

1.1.2 Simplifions les écritures !

Arrivés à ce point, nous sommes heureux d'avoir construit deux curiosités mais il ne fait aucun doute sur la lourdeur des notations. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x,0)\,. \end{aligned}$$

Elle est injective : tout couple $(x,0)$ possède un unique antécédent. Ceci donne envie de soulager la notation en identifiant tout réel x à son image $(x,0)$. Un couple (x,y) quelconque se note alors

$$(x,y) = (x,0) \oplus ((0,1) \otimes (y,0)) = x \oplus ((0,1) \otimes y)\,.$$

Encore un petit effort en notant $(0,1) = i$ et nous obtenons en supprimant les parenthèses

$$(x,y) = x \oplus i \otimes y.$$

Comme les deux opérations créées vérifient les mêmes propriétés que celles connues sur les réels, on se permet même de noter

$$(x,y) = x + i \times y,$$

voire $(x,y) = x + iy$. Les opérations s'écrivent alors plus élégamment

$$\begin{aligned} (x+iy) + \left(x' + iy'\right) &= \left(x + x'\right) + i\left(y + y'\right), \\ (x+iy) \times \left(x' + iy'\right) &= \left(xx' - yy'\right) + i\left(xy' + x'y\right). \end{aligned}$$

Il nous arrivera d'écrire $x - iy$ en place de $x + i(-y)$ pour éviter la surcharge de parenthèse. Le neutre pour l'addition se note alors

$$(0,0) = 0 + i0 = 0.$$

Le neutre pour la multiplication se note alors

$$(1,0) = 1 + 0i = 1.$$

Passons au fameux $i = (0,1)$. On a

$$\begin{aligned} i^2 &= i \times i \\ &= (0 + i1) \times (0 + i1) \\ &= (0 \times 0 - 1 \times 1) + i(0 \times 1 + 0 \times 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

L'inverse d'un couple non nul $(x, y) = x + iy$ s'écrira à la sauce réelle $\frac{1}{x+iy}$ et nous savons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+iy} &= (x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Définition 2. Le corps des nombres complexes.
L'ensemble $\mathbb{C}$ des couples $(x + iy)$ muni des deux opérations d'addition et de multiplication est appelé corps des nombres complexes.

1. Un élément $x + iy$ de $\mathbb{C}$ est alors appelé nombre complexe.
2. Pour tout réel x, le nombre complexe $x + i0$ est dit réel.
3. Pour tout réel y, le nombre complexe $0 + iy$ est dit imaginaire.
4. Tout nombre complexe s'écrit de façon unique comme la somme d'un réel et d'un imaginaire : $x + iy = (x + i0) + (0 + iy)$.

Le corps $\mathbb{C}$ peut être vu comme une extension du corps $\mathbb{R}$: les opérations de multiplication et addition complexes étendent à de nouveaux nombres celles connues sur les réels. Notons que la propriété d'intégrité est conservée :

Proposition 4. ***Intégrité de*** $\mathbb{C}$.
Si le produit de deux nombres complexes est nul, alors l'un au moins des deux est nul.

Démonstration. Soient z et z' deux complexes tels que $z \times z' = 0$. Supposons l'un des deux z, z' non nul, par exemple z. Alors il est inversible et en multipliant dans chaque membre par z^{-1} :

$$z^{-1} z \times z' = z^{-1} \times 0.$$

D'où $z' = 0$. □

Remarque 1. Comme les propriétés d'addition et multiplication complexes reprennent celles déjà connues, on généralise :

1. les règles sur les exposants à entiers relatifs : $z^{n_1} \times z^{n_2} = z^{n_1+n_2}$, $\frac{z^{n_1}}{z^{n_2}} = z^{n_1-n_2}$, $(z^{n_1})^{n_2} = z^{n_1 \times n_2}$, etc.
2. les identités remarquables $(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$, etc.
3. les habitudes de calcul sur les réels : développements, factorisations, factorisations partielles, réductions au même dénominateur, etc.

Remarque 2. Une chose ne se généralise pas sur $\mathbb{C}$: l'ordre connu sur $\mathbb{R}$. En effet, si c'était le cas, nous aurions $i < 0$ ou $i > 0$. Si $i < 0$, alors multiplier l'inégalité $i < 0$ par i négatif ferait changer de sens cette dernière et on aurait $i^2 > 0$ alors que $i^2 = -1$. Si $i > 0$, alors multiplier l'inégalité $i > 0$ par i positif ne ferait pas changer de sens cette dernière et on aurait encore $i^2 > 0$...

Donnons maintenant un outil utile dans de très nombreux calculs :

Proposition 5. ***Somme des termes d'une progression géométrique.***
Soit $q \neq 1$. *On a, pour tout couple d'entiers naturels* (m, M) *vérifiant* $m \leqslant M$ *:*

$$\begin{aligned} q^m + q^{m+1} + \cdots + q^M &= q^m \times \left(q^0 + q^1 + \cdots + q^{M-m}\right) \\ &= q^m \frac{1 - q^{M-m+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Démonstration. Développons $(q-1)\left(q^0 + q^1 + \cdots + q^{M-m}\right)$:

$$\begin{aligned} &(q-1)\left(q^0 + q^1 + \cdots + q^{M-m}\right) \\ &= q + q^2 + \cdots + q^{M-m} + q^{M-m+1} - \left(q^0 + q^1 + \cdots + q^{M-m-1} + q^{M-m}\right). \end{aligned}$$

Les termes de droite vont d'éliminer deux à deux – ils se « télescopent » – sauf les deux extrêmes. On a alors

$$(q-1)\left(q^0 + q^1 + \cdots + q^{M-m}\right) = q^{M-m+1} - 1.$$

et, sachant que q est différent de 1, en divisant on obtient l'identité (très importante à retenir)

$$q^0 + q^1 + \cdots + q^{M-m} = \frac{q^{M-m+1} - 1}{q - 1}.$$

D'où le résultat. □

Remarque 3. Le fameux nombre complexe i de carré -1 qui abrège le couple $(0,1)$ se note en physique plutôt j. Chez les anglo-saxons, on préfère le noter « carrément » $\sqrt{-1}$:

$$\sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

On devrait trouver

$$\sqrt{-1}^2 = i^2 = -1.$$

Qu'est-ce qui cloche ? En fait, nous avons implicitement appliqué la règle

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

sur les racines carrées des nombres réels positifs : ce n'est plus possible avec les complexes ! Il n'existe pas de fonction racine carrée « raisonnable » sur $\mathbb{C}$. Nous en dirons plus à la section qui définit les exponentielles e^{it}.

1.1.3 Le corps des nombres complexes

1.1.3.1 Parties réelles, imaginaires, conjugaison

On a fabriqué un nouveau nombre i qui n'est pas réel et dont le carré vaut -1. Les nombres complexes sont alors les expressions de la forme $x + iy$ pour tout couple (x, y) de réels. Un réel x est un complexe avec $x = x + 0i$. On pratique l'addition et la multiplication sur ces nouvelles entités exactement comme sur $\mathbb{R}$, en ajoutant la nouvelle règle de simplification $i^2 = -1$. Le « zéro » et le « un » des réels gardent les mêmes rôles avec $0 = 0 + 0i$ et $1 = 1 + 0i$. Tout nombre complexe possède un unique opposé. Le nombre complexe $x + iy$ est inversible si et seulement si $(x, y) \neq (0, 0)$ et il possède alors un unique inverse. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs l'est.